УДК 621. 192:519.2

Е.С. ПЕРЕВЕРЗЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВИДА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЧНОСТИ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЧНОСТИ ОБРАЗЦОВ

На основе статистических теорий прочности исследовано влияние вида распределения прочности структурных элементов на вероятностные характеристики прочности образцов. Из анализа приведенных соотношений показано, что резервы повышения прочности состоят как в увеличении прочности структурных элементов, так и в уменьшении их разброса.

На основі статистичних теорій міцності досліджено вплив виду розподілу міцності структурних елементів на імовірнісні характеристики міцності зразків. З аналізу наведених співвідношень показано, що резерви підвищення міцності складаються як у збільшенні міцності структурних елементів, так і в зменшенні їхнього розкиду.

Based on statistical theories of the strength, the effects of the type of distribution of structural elements strength on the probability characteristics of the sample strength are studied. From the analysis of presented relations, it is shown that the reserves of an improvement of the strength lie both in an increase of the strength of structural elements and in a decrease of their spread.

Известно, что техническая (реальная) прочность конструкционных материалов на несколько порядков меньше теоретической. Одной из основных причин такого расхождения является наличие в материалах различного рода дефектов, которые значительно уменьшают его прочность. Влияние дефектов на прочность материалов и элементов конструкций изучает механика разрушения. Объяснить различие между теоретической и технической прочностью можно также на основе статистических теорий прочности, которые для описания разбросов прочности как отдельных структурных элементов, так и для всего образца материала применяют вероятностные методы. Ниже на основе статистических теорий прочности кратко обсуждаются возможные пути повышения прочности конструкционных материалов.

Представим образец конструкционного материала, состоящий из n структурных элементов. Для получения последующих зависимостей, что собой представляет структурный элемент, особого значения не имеет. Для металлических материалов это могут быть зерна.

В простейшем случае полагается, что для разрушения всего образца достаточно разрушить один элемент. Обозначим через $G_1(x)$ функцию распределения прочности одного элемента. Тогда в случае n одинаковых независимых элементов функция распределения $G(x)$ прочности всего образца определится так [1]:

$$G(x)=1-\left[1-G_1(x)\right]^n . \qquad (1)$$

Здесь под x понимается несущая способность элемента конструкции или критическое напряжение, при котором происходит его разрушение.

Выражение (1) представляет собой функцию распределения наименьшего значения из совокупности n одинаковых независимых случайных величин. Соответственно вероятность неразрушения $P(x)=1-G(x)$ находится так:

$$P_x = P_1^n(x),\ P_1(x)=1-G_1(x).$$

Плотность распределения $g(x)$ и математическое ожидание M прочности образца вычисляются по формулам:

$$g(x)=ng_1(x)[1-G_1(x)]^{n-1}=ng_1(x)P_1^{n-1}(x),$$

$$M=\int_x xg_1(x)P_1^{n-1}(x)dx,$$

где $g_1(x)=dG_1/dx$.

Если прочность принимает только положительные значения, то математическое ожидание прочности может быть найдено так:

$$M=\int_0^\infty P_1^n(x)dx.$$

Из приведенных выражений следует, что чем больше элементов в образце, т.е. чем больше его размеры, тем меньше вероятность неразрушения и математическое ожидание прочности образца, и что вид функции распределения прочности элемента оказывает влияние на характеристики прочности образца. Рассмотрим некоторые конкретные функции распределения прочности структурных элементов. Для нормального распределения получим

$$M=m_1-\sigma_1\left(\sqrt{2\ln n}-\frac{\ln\ln n+\ln 4\pi-2c}{2\sqrt{2\ln n}}\right),$$

где $c=0{,}5772\ldots$ – число Эйлера; m_1, σ_1 – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение прочности элемента.

Для приближенного анализа вторым слагаемым в скобках можно пренебречь, тогда

$$M=m_1-\sigma_1\sqrt{2\ln n}. \qquad (2)$$

Из этого выражения следуют выводы: с увеличением числа элементов прочность образца уменьшается, и для идеального материала, для которого $\sigma_1=0$, прочность образца равна прочности элемента.

Экспериментальные данные показывают, что часто распределение прочности элементов конструкций описывается законом Вейбулла.

Для распределения Вейбулла

$$G(x)=1-\exp\left[-\lambda(x)^\beta\right],$$

где λ, β – параметры распределения.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение прочности в этом случае находятся так:

$$M=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/\beta}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right),$$

$$s=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/\beta}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^{1/2},$$

где $\Gamma(\ldots)$ – гамма-функция.

Параметр формы β связан с коэффициентом вариации ν соотношением

$$\nu=\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^{1/2}\Gamma^{-1}\left(1+\frac{1}{\beta}\right).$$

Для приближенной оценки влияния масштабного фактора на прочность образца положим, что прочность элемента также описывается распределением Вейбулла с тем же параметром β: $G_1(x)=1-\exp\left(-\lambda_1 x^{\beta}\right)$. Соответственно вероятность неразрушения элемента $P_1(x)=\exp\left(-\lambda_1 x^{\beta}\right)$. Вероятность неразрушения всего образца определяется так: $P(x)=\exp\left(-n\lambda_1 x^{\beta}\right)=\exp\left(-\lambda x^{\beta}\right)$, где $\lambda=n\lambda_1$.

Отношение математического ожидания прочности образца к математическому ожиданию прочности элемента в этом случае находится так:

$$M/m_1=(1/n)^{1/\beta}. \tag{3}$$

Положим $n=V/V_0$, где V – объем образца; V_0 – объем элемента.

В этом случае

$$M=m_1\left(\frac{V_0}{V}\right)^{1/\beta}.$$

Иногда под n понимают отношение не объемов, а площадей, тогда

$$M=m_1\left(\frac{F_0}{F}\right)^{1/\beta},$$

где F_0 – площадь поперечного сечения элемента; F – площадь поперечного сечения образца.

В общем случае под F_0 понимают площадь поперечного сечения стандартного образца, а под F – площадь поперечного сечения исследуемого элемента конструкции. Параметр β можно найти из соотношения (3), предварительно вычислив значение коэффициента вариации ν. Заметим, что при $\nu\to 0$ параметр $\beta\to\infty$ и соответственно $1/\beta\to 0$, а $M\to m_1$. Случай же $\nu=0$ соответствует идеальной схеме, когда образец состоит из однородных элементов с одинаковыми значениями прочности.

Этот вывод подтверждается экспериментально: с увеличением размеров образца, как правило, его прочность снижается.

Нами были рассмотрены приближенные соотношения для простейшей схемы, когда образец представляется в виде цепочки из n независимых элементов. В случае зависимых элементов получить такие простые соотношения в общем случае не всегда возможно. С математической точки зрения здесь возникает проблема описания многомерных распределений с заданными одномерными распределениями. Из многомерных распределений к настоящему времени лучше всего изучено гауссовское. Поэтому для качественной оценки влияния зависимости составляющих элементов на характеристики прочности образца приведем некоторые соотношения для случая, когда прочность отдельных элементов описывается нормальным законом.

Рассмотрим частный случай зависимых элементов, когда прочности всех элементов описываются нормальным законом и все они попарно имеют один и тот же коэффициент корреляции $r>0$.

В этом случае корреляционная матрица прочностей всех элементов имеет следующий вид:

$$\| r \| = \begin{vmatrix} 1 & r & r & \ldots & r \\ r & 1 & r & \ldots & r \\ r & r & r & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

а функция распределения прочности образца, состоящего из таких элементов, описывается выражением

$$G(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) F^n\left(\frac{v\sqrt{r} + x - m_1}{\sigma_1 \sqrt{1-r}}\right) dv,$$

где $F(\ldots)$ – функция нормального распределения.

При большом n имеем

$$M = m_1 r + (1-r)\left[m_1 - \sigma_1 \sqrt{2 \ln n}\right].$$

При $r = 0$ последнее выражение переходит в (2).

Анализ этой формулы показывает, что с увеличением r математическое ожидание прочности образца увеличивается. При $r = 1$ имеем $M = m_1$. Случай $r = 1$ эквивалентен случаю, когда прочности всех элементов одинаковы.

Приведенные соотношения показывают, что положительная корреляция между элементами увеличивает прочность образцов.

В работе [2] приведено выражение для функции $G_1(x)$, для которой максимально математическое ожидание наибольшего значения при заданном математическом ожидании m_1 и дисперсии σ_1^2 исходного распределения.

Функция распределения $G_1(x)$, для которой будет максимально математическое ожидание наименьшего значения при заданных m_1 и σ_1, имеет следующий вид:

$$G_1(x) = 1 - \left[\frac{n-1}{n} \frac{m_1 - x}{\sigma_1 \sqrt{2n-1}} + \frac{1}{n}\right]^{1/n-1}. \quad (4)$$

Соответственно функция распределения прочности образца с наибольшим математическим ожиданием описывается выражением

$$G(x) = 1 - \left\{1 - \left[\frac{n-1}{n} \frac{m_1 - x}{\sigma_1 \sqrt{2n-1}} + \frac{1}{n}\right]^{1/n-1}\right\}^n.$$

Вероятность неразрушения образца в этом случае находится так:

$$P(x) = \left[\frac{n-1}{n} \frac{m_1 - x}{\sigma_1 \sqrt{2n-1}} + \frac{1}{n}\right]^{n/n-1}.$$

Математическое ожидание прочности образца M выражается через математическое ожидание m_1 и среднее квадратическое отклонение σ_1 элемента следующим образом:

$$M = m_1 - \frac{\sigma_1(n-1)}{\sqrt{2n-1}}.$$

При больших n можно положить

$$M = m_1 - \sigma_1\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Из последней формулы следует, что $M \to m_1$ при $\sigma_1 \to 0$. Таким образом, резервы повышения прочности состоят, с одной стороны, в увеличении прочности составляющих элементов, а с другой – в повышении степени однородности материала. В частности, если все составляющие элементов имеют одинаковую прочность и $\sigma_1 = 0$, $M = m_1$.

Для многомерных распределений с произвольными маргинальными распределениями можно записать следующее приближенное выражение [3]

$$P(x) = \eta P_1(x) + (1-\eta)P_1^n(x).$$

Параметр η характеризует степень зависимости между элементами и изменяется от нуля до единицы. При $\eta = 0$ элементы независимы, при $\eta = 1$ между элементами жесткая зависимость.

Для многомерного нормального распределения параметр η приближенно вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{2}{\pi n(n-1)}\sum_{i \neq j}\sum \arcsin r_{ij},\ i, j = \overline{1, n}.$$

Математическое ожидание прочности образца для случая, когда одномерные распределения прочности элементов описываются законом Вейбулла, следующим образом выражается через математическое ожидание прочности элементов

$$M = \eta m_1 + (1-\eta)m_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

При $\eta = 1$ имеем

$$M = m_1,$$

при $\eta = 0$

$$M = m_1\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Если одномерные распределения прочности элементов описываются выражением (4), соответственно получим

$$M = \eta m_1 + (1-\eta)\left[m_1 - \sigma_1\sqrt{\frac{n}{2}}\right].$$

Таким образом, для идеального материала, состоящего из структурных элементов с одинаковыми значениями прочности, масштабный фактор не влияет на характеристики прочности и прочность материала достигает максимального значения и определяется прочностью структурного элемента.

Из приведенных выражений следует, что резервы повышения прочности состоят как в увеличении прочности структурных элементов, так и в уменьшении их разброса.

1. *Переверзев Е. С.* Модели накопления повреждений в задачах долговечности / *Переверзев Е. С.* – Киев : Наук. думка, 1995. – 359 с.
2. *Гумбель Э.* Статистика экстремальных значений / *Гумбель Э.* – М. : Мир, 1965. – 452 с.
3. *Переверзев Е. С.* Вероятностные распределения и их применение / *Переверзев Е. С., Даниев Ю. Ф.* – Днепропетровск : НАНУ и НКАУ, Институт технической механики, 2004. – 418 с.

Институт технической механики
НАН Украины и НКА Украины,
Днепропетровск

Получено 28. 01.10,
в окончательном варианте 28.01.10