

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МЕЩЕРСКОГО,  
ОПИСЫВАЮЩИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ШАРА  
УБЫВАЮЩЕЙ МАССЫ**

В функциях Бесселя построены замкнутые аналитические решения нелинейного дифференциального уравнения вертикального движения шара переменной массы при линейном убывании его радиуса во времени и квадратично-полиномиальном сопротивлении воздушной среды.

У функціях Бесселя побудовано замкнуті аналітичні розв'язки нелінійного диференціального рівняння вертикального руху кулі змінної маси при лінійному убуданні її радіуса в часі й квадратично-поліноміальному опорі повітряного середовища.

The closed analytical solutions of a nonlinear differential equation of a vertical motion of the variable-mass sphere are constructed in the Bessel functions with linear decreasing its radius in time and a square-polynomial resistance of the air environment.

Несмотря на то, что прошло более ста лет со времени публикации первых работ по динамике тела переменной массы, получение аналитических решений дифференциальных уравнений, описывающих движение таких тел, представляет научно-технический интерес. В этой области механики приходится решать нелинейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, которые относятся к классу Риккати [1]. Только в отдельных случаях удаётся найти их точное аналитическое решение. Об одном из них идёт речь ниже, где удалось при довольно общих предположениях, касающихся силы сопротивления и реактивной силы, построить решение уравнения вертикального движения тела с помощью цилиндрических функций. Заметим, что И. В. Мещерский [1] первым свёл к функциям Бесселя решение задачи о свободных колебаниях математического маятника переменной массы. В дальнейшем это направление приобрело развитие в работе [2]. Решение задачи вертикального подъёма точки переменной массы в газовой среде с использованием функций Бесселя было получено В. В. Белецким [3]. Методы моделирования разгона испаряющихся сферических капель жидкости конвективным потоком как частиц переменной массы изложены в работе [4]. Вопросы баллистики шара переменных размеров и массы рассматривались в работе [5], где с помощью функций Бесселя выражены скорости и перемещения шара, но без учёта реактивной силы. Поэтому здесь поставлена цель: обобщить результаты работы [5] на случай, когда нельзя пренебречь действием реактивной силы.

При определении реактивной силы будем использовать два способа. В первом, реактивную силу принимаем пропорциональной скорости полёта шара, что приводит к дифференциальному уравнению Мещерского – Леви – Чивита. Второй способ определения реактивной силы связываем с гипотезой К. Э. Циолковского, согласно которой относительная скорость отделения частиц от шара является постоянной величиной.

Решим сначала задачи баллистики, используя первый способ определения реактивной силы.

**Исследование скорости полёта шара без привлечения гипотезы К. Э. Циолковского.**

*Вертикальное падение шара.* Предполагаем, что уменьшение радиуса  $r = r(t)$  однородного шара является линейной функцией времени  $t$ , т.е.

$$r(t) = r_0 - \gamma t \geq 0,$$

где  $r_0 = r(0)$  – начальное значение радиуса;  $\gamma > 0$  – параметр, характеризующий скорость уменьшения  $r$  за счёт сгорания, испарения и пр. При квадратично-полиномиальном сопротивлении воздушной (газовой) среды скорость падения тела  $v = v(t) = v(r)$  является решением дифференциального уравнения И. В. Мещерского

$$\frac{dv}{dr} \pm \frac{3\mu}{r} v - \frac{\alpha_1}{r} v - \frac{\alpha_2}{r} v^2 = -g_0. \quad (1)$$

В нём  $\alpha_1 = \frac{3k_1}{4\rho\gamma}$ ;  $\alpha_2 = \frac{3k_2}{4\rho\gamma}$ ;  $g_0 = g\gamma^{-1}$ ;  $k_1, k_2$  – коэффициенты аэродинамического сопротивления;  $\rho$  – плотность шара;  $g$  – ускорение свободного падения;  $0 \leq \mu \leq 1$  – коэффициент реактивности, учитывающий, какая часть отделяющейся от шара массы идёт на создание реактивной силы; знак “+” перед  $3\mu$  соответствует действию на шар движущей (ускоряющей) реактивной силы, а знак “–” – действию тормозящей (замедляющей движение) реактивной силы.

Обозначив символом  $v_0$  стартовое значение направленной вертикально вниз скорости, начальным условием к уравнению (1) принимаем

$$v(r_0) = v_0. \quad (2)$$

Выразим, аналогично [5], искомую скорость через вспомогательную функцию  $w = w(r)$  по формуле

$$v(r) = -\frac{r}{\alpha_2} w^{-1} \frac{dw}{dr}. \quad (3)$$

Подставив (3) в (1), приходим к линейному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1 \pm 3\mu - \alpha_1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{\alpha_2 g_0}{r} w = 0. \quad (4)$$

Далее, в зависимости от знака разности  $(\pm 3\mu - \alpha_1)$ , будем различать три варианта движения.

В первом, когда  $\nu = 3\mu - \alpha_1 \geq 0$ , общее решение уравнения (4) имеет вид [6]

$$w(r) = \tau^{-\nu} [c_1 I_\nu(\tau) + c_2 K_\nu(\tau)]. \quad (5)$$

Здесь  $\tau = 2\sqrt{\alpha_2 g_0 r}$ ;  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные;  $I_\nu(\tau)$ ,  $K_\nu(\tau)$  – модифицированная функция Бесселя и Макдональда индекса  $\nu$ .

Учитывая (3) и (5), получаем выражение скорости падения шара, или общее решение уравнения (1) с точностью до произвольной постоянной  $c_3 = \tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2^{-1}$ :

$$v(r) = \frac{\tau}{2\alpha_2} \frac{K_{\nu+1}(\tau) - c_3 I_{\nu+1}(\tau)}{K_\nu(\tau) + c_3 I_\nu(\tau)}. \quad (6)$$

Константу  $c_3$  находим из начального условия (2). Она принимает значение

$$c_3 = \frac{\tau_0 K_{\nu+1}(\tau_0) - 2\alpha_2 \nu_0 K_\nu(\tau_0)}{\tau_0 I_{\nu+1}(\tau_0) + 2\alpha_2 \nu_0 I_\nu(\tau_0)}, \quad (7)$$

где  $\tau_0 = 2\sqrt{\alpha_2 g_0 r_0}$ .

При  $\nu = 0$  выражения (6) и (7) совпадают с теми, что опубликованы в работах [5, 7].

Второму варианту движения соответствует  $\sigma = -\nu = \alpha_1 - 3\mu > 0$ . Для него общее решение уравнения (4) имеет вид [6]

$$w(r) = \tau^\sigma [c_1 I_\sigma(\tau) + c_2 K_\sigma(\tau)]. \quad (8)$$

Постановкой решения (8) в формулу (3), с учётом начального условия (2), получаем выражение скорости падения шара

$$\nu(r) = \frac{\tau}{2\alpha_2} \frac{K_{\sigma-1}(\tau) - c_4 I_{\sigma-1}(\tau)}{K_\sigma(\tau) + c_4 I_\sigma(\tau)}; \quad (9)$$

$$c_4 = \frac{\tau_0 K_{\sigma-1}(\tau_0) - 2\alpha_2 \nu_0 K_\sigma(\tau_0)}{\tau_0 I_{\sigma-1}(\tau_0) + 2\alpha_2 \nu_0 I_\sigma(\tau_0)}.$$

Третий вариант вертикального движения тела имеем при действии тормозящей реактивной силы. Вид частного решения уравнения (1) остаётся прежним, но значения индекса  $\sigma$  в (9) следует вычислять по формуле  $\sigma = \alpha_1 + 3\mu$ .

**Вертикальное движение шара вверх.** Причиной такого движения считаем направленную вертикально вверх стартовую скорость  $\nu_0$ . В этом случае движения в правой части уравнения (1) меняется знак перед  $g_0$ . Вместо (4), для определения вспомогательной функции  $w(r)$  имеем уравнение

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1 + 3\mu - \alpha_1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{\alpha_2 g_0}{r} w = 0. \quad (10)$$

Будем, как и выше, различать три варианта движения. В первом, когда  $\nu = 3\mu - \alpha_1 \geq 0$ , общим решением уравнения (10) является [6]

$$w(r) = \tau^{-\nu} [c_5 J_\nu(\tau) + c_6 Y_\nu(\tau)]. \quad (11)$$

Здесь  $c_5, c_6$  – произвольные постоянные;  $J_\nu(\tau)$ ,  $Y_\nu(\tau)$  – функции Бесселя и Неймана индекса  $\nu$ .

Продифференцировав выражение (11) согласно (3), с учётом (2) получаем расчётные формулы скорости

$$\nu(r) = \frac{\tau}{2\alpha_2} \frac{Y_{\nu+1}(\tau) + c_7 J_{\nu+1}(\tau)}{Y_\nu(\tau) + c_7 J_\nu(\tau)}; \quad (12)$$

$$c_7 = \frac{2\alpha_2 v_0 Y_v(\tau_0) - \tau_0 Y_{v+1}(\tau_0)}{\tau_0 J_{v+1}(\tau_0) - 2\alpha_2 v_0 J_v(\tau_0)}.$$

Для второго варианта движения, когда  $\sigma = -v = \alpha_1 - 3\mu \geq 0$ , общее решение уравнения (10) имеет вид [6]

$$w(r) = \tau^\sigma [c_5 J_\sigma(\tau) + c_6 Y_\sigma(\tau)].$$

Согласно (2) и (3), ему соответствует

$$v(r) = -\frac{\tau}{2\alpha_2} \frac{Y_{\sigma-1}(\tau) + c_8 J_{\sigma-1}(\tau)}{Y_{\sigma-1}(\tau) + c_8 J_\sigma(\tau)}; \quad (13)$$

$$c_8 = -\frac{2\alpha_2 v_0 Y_\sigma(\tau_0) + \tau_0 Y_{\sigma-1}(\tau_0)}{2\alpha_2 v_0 J_\sigma(\tau_0) + \tau_0 J_{\sigma-1}(\tau_0)}.$$

При  $v = \sigma = 0$  решения (12) и (13) совпадает с теми, что опубликованы в работах [5, 8].

Третий вариант вертикального движения шара вверх имеет место при действии тормозящей реактивной силы. Для него выражения скорости остаются в виде (13), но индекс  $\sigma = \alpha_1 + 3\mu$ .

**Результаты расчёта и их анализ.** Проведен расчёт  $v(t)$  при  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $k_1 = 5 \cdot 10^{-2}$  кг/м<sup>2</sup>/с;  $k_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  кг/м<sup>3</sup>;  $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$  м/с;  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $v = 1$  и различных значениях  $v_0$  для ускоряющей реактивной силы. Рассмотрены случаи вертикального падения (рис. 1) и подъёма шара (рис. 2). На рис.1 представлены зависимости скорости от времени для значений  $v_0$ : 1 – 40 м/с; 2 – 45 м/с; 3 – 50 м/с, а на рис. 2 – зависимости скорости от времени для значений  $v_0$ : 1 – 30 м/с; 2 – 37 м/с; 3 – 45 м/с.

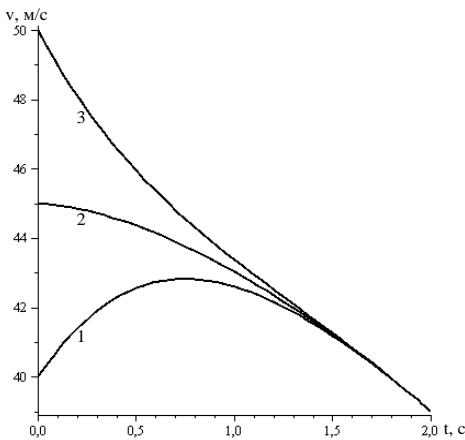


Рис. 1

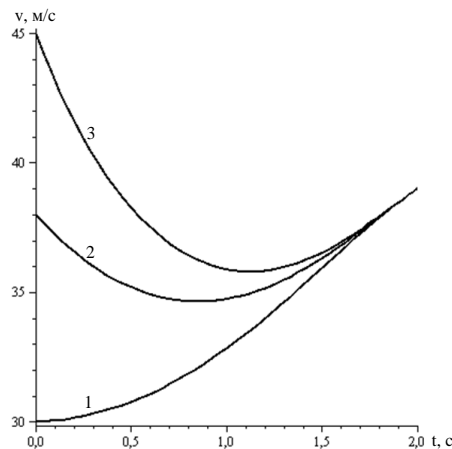


Рис. 2

На рис. 1, 2 проявляются экстремальные свойства скорости: максимум при падении и минимум при подъёме шара. Но эти свойства проявляются лишь в определённой области значений  $v_0$ , за пределами которой  $v(t)$  является монотонной функцией. С течением времени  $t$  ослабевают зависимости

$v(t)$  от начального значения  $v_0$ , что приводит к слиянию графиков на рисунках.

**Исследование скорости полёта шара с привлечением гипотезы К. Э. Циолковского.** Выясним, как поменяются выражения скорости движения тела при постоянной скорости отделения частиц от шара. Отдельно рассмотрим случаи его движения вниз и вверх.

*Вертикальное падение шара.* В отличие от (1), скорость падения является частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dr} \pm \frac{3}{r} v_r - \frac{\alpha_1}{r} v - \frac{\alpha_2}{r} v^2 = -g_0 \quad (14)$$

при начальном условии (2).

В уравнении (14)  $v_r = const$  – относительная скорость отделения частиц; знак “+” перед  $3/r$  соответствует действию ускоряющей реактивной силы, а знак “–” – замедляющей.

Преобразованием (3) уравнение (14) сводим к виду

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1 - \alpha_1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{\alpha_2}{r} \left( g_0 \pm \frac{3}{r} v_r \right) w = 0. \quad (15)$$

В первом случае движения тела, под действием ускоряющей реактивной силы, общим решением уравнения (15) есть сумма

$$w(r) = \eta^{\alpha_1} [c_9 I_p(\eta) + c_{10} K_p(\eta)]. \quad (16)$$

Здесь  $\eta = 2\sqrt{\alpha_2 g_0 r}$ ;  $p = 2 \left( \frac{1}{4} \alpha_1^2 + 3\alpha_2 v_r \right)^{1/2}$ ;  $c_9, c_{10}$  – произвольные постоянные.

Продифференцировав (16) согласно (3), с учётом начального условия (2) получаем выражение для скорости падения

$$v(\eta) = \frac{\eta}{2\alpha_2} \left[ \frac{c_{11} K_{p+1}(\eta) - I_{p+1}(\eta)}{c_{11} K_p(\eta) + I_p(\eta)} - \frac{p + \alpha_1}{\eta} \right]. \quad (17)$$

В нём

$$c_{11} = \frac{c_{10}}{c_9} = \frac{v_1 I_p(\eta_0) + I_{p+1}(\eta_0)}{K_{p+1}(\eta_0) - v_1 K_p(\eta_0)}; \quad (18)$$

$$v_1 = \frac{1}{\eta_0} (2\alpha_2 v_0 + p + \alpha_1); \quad \eta_0 = 2\sqrt{\alpha_2 g_0 r_0}.$$

Второй вариант движения имеем при действии замедляющей реактивной силы. Если она такая, что  $\alpha_1^2 \geq 12\alpha_2 v_r$ , то скорость падения шара также описывается выражениями (17) и (18), но в них следует положить  $p = \left( \alpha_1^2 - 12\alpha_2 v_r \right)^{1/2}$ .

При большой замедляющей реактивной силе, когда  $\alpha_1^2 < 12\alpha_2 v_r$ , становится чисто мнимым индекс  $p$  в решении (17). Некоторые из свойств функций Бесселя чисто мнимого индекса изложены в [9], но на этом вопросе останавливаться не будем.

**Вертикальное движение шара вверх.** В этом случае полёта меняется знак перед  $g_0$  в уравнении (15). Поэтому, в отличие от (16), при действии ускоряющей реактивной силы зависимость скорости от времени имеет вид

$$v(\eta) = \frac{\eta}{2\alpha_2} \left[ \frac{c_{12} Y_{p+1}(\eta) + J_{p+1}(\eta)}{c_{12} Y_p(\eta) + J_p(\eta)} - \frac{p + \alpha_1}{\eta} \right], \quad (19)$$

причём

$$c_{12} = \frac{v_1 J_p(\eta_0) - J_{p+1}(\eta_0)}{Y_{p+1}(\eta_0) - v_1 Y_p(\eta_0)}. \quad (20)$$

При действии замедляющей реактивной силы, такой что  $\alpha_1^2 \geq 12\alpha_2 v_r$ , в решениях (19), (20) индекс  $p$  надо заменить на  $q = (\alpha_1^2 - 12\alpha_2 v_r)^{1/2}$ .

Если  $\alpha_1^2 \leq 12\alpha_2 v_r$ , то индекс  $q$  становится чисто мнимой величиной, как и при движении шара вниз.

Проведен расчёт  $v(t)$  при  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $k_1 = 5 \cdot 10^{-2}$  кг/м<sup>2</sup>/с;  $k_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  кг/м<sup>3</sup>;  $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$  м/с;  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>;  $v_r = 1$  м/с и различных значениях  $v_0$  для ускоряющей реактивной силы. Рассмотрены случаи вертикального падения (рис. 3) и подъёма шара (рис. 4).

На рис. 3 представлены зависимости скорости от времени для значений  $v_0$ : 1 – 15 м/с; 2 – 20 м/с; 3 – 25 м/с, а на рис. 4 – зависимости скорости от времени для значений  $v_0$ : 1 – 20 м/с; 2 – 25 м/с; 3 – 30 м/с.

На рисунках проявляются экстремальные свойства скорости: максимум при падении и минимум при подъёме шара, что согласуется с предыдущими численными результатами.

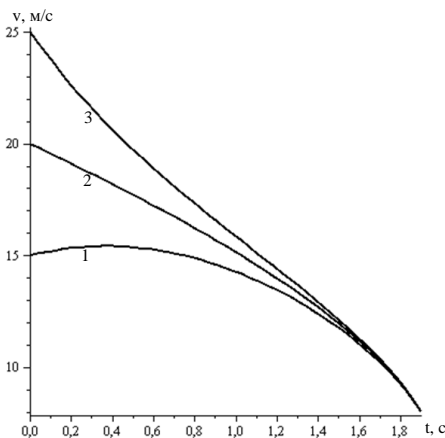


Рис. 3

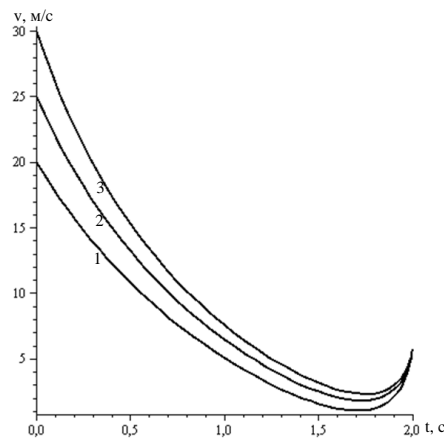


Рис. 4

**Выводы.** Введением новой переменной в дифференциальное уравнение движения шара, радиус которого убывает по линейному закону, его удалось свести к специальному уравнению Риккати, решение которого выражается в функциях Бесселя. Такое преобразование проводилось как при моделировании реактивной силы с применением гипотезы К. Э. Циолковского, так и без её использования. Скорость падающего шара убывающей массы при определённых условиях имеет максимум значения, а шара, движущегося вверх – минимум.

1. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы / *И. В. Мещерский*. – М. : ГИТТЛ, 1952. – 276 с.
2. *Sveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass / *L. Sveticanin*. – Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p.
3. *Белецкий В. В.* О вертикальном подъёме точки переменной массы в среде постоянной плотности / *В. В. Белецкий* // ПММ. – 1956. – Т. XX, Вып. 4. – С. 559 – 560.
4. *Тимошенко В. И.* Газовая динамика высокотемпературных технологических процессов / *В. И. Тимошенко*. – Днепропетровск : Институт технической механики НАН Украины и НКА Украины, 2003. – 460 с.
5. *Кучеренко С. І.* Балістика крапель, які випаровуються при польоті / *С. І. Кучеренко, В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тищенко*. – Харків : ХНТУСГ, 2007. – 304 с.
6. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / *А. Абрамовиц, И. Стиган*. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
7. *Ольшанский В. П.* О нелинейной модели падения испаряющейся капли / *В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский* // Коммунальное хозяйство городов. – Киев : Техника, 2006. – Вып. 67. – С. 351 – 357.
8. *Ольшанский В. П.* Нижняя оценка дальности полёта испаряющихся капель распыленных огнетушащих веществ / *В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский* // Науковий вісник будівництва. – Харків : ХДТУБА, 2006. – Вып. 35. – С. 188 – 193.
9. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*. – М. : Наука, 1974. – 295 с.

Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»,  
Харьков

Получено 12.02.09,  
в окончательном варианте 06.03.09