

Н. П. Плахтиенко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
С УПРАВЛЯЕМЫМ ПО УСКОРЕНИЮ ФРИКЦИОННЫМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ДЕМПФЕРОМ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: model@inmech.kiev.ua*

Abstract. The operating capacity of a controlled by acceleration frictional electromagnetic damper is validated. A mathematical model of oscillator with controlled damper is resulting in the three ordinary differential equations of the first order with discontinuous second members. For the case of energy dissipation depending on the acceleration modulus, the simplified model is considered in the form of one equation of the second order with discontinuous coefficients. The exact solution of this equation is found. An approximate law of vibration attenuation is established. It is shown that information on the attenuation parameter is placed in the exponential function basis. A phenomenon of double non-stationary phase-frequency resonance is studied.

Key words: controlled by acceleration frictional electromagnetic damper, oscillator, discontinuous coefficients, vibration attenuation, phase-frequency resonance.

Введение.

Со второй половины 20 столетия для защиты сооружений от землетрясений стали использоваться механизмы сейсмоизоляции (МС) [1, 2, 9, 11, 16 – 18]. Назначение таких механизмов состоит в уменьшении жесткости связи сооружений с грунтом и внесения специальных элементов диссипации энергии сейсмических возмущений. В настоящее время развиваются подходы для сейсмозащиты сооружений, основанные на использовании в МС управляемых демпферов полуактивного типа [8, 11, 17]. Полуактивные системы управления колебательными объектами являются классом систем, у которых управляющее воздействие используется для изменения физико-механических свойств демпфирующих устройств. Такого рода устройства могут содержать электро-и магнитореологические материалы [8, 10]. В предлагаемой работе исследованы динамические свойства осциллятора с электромагнитным демпфером, управляемым по ускорению посредством обратной связи, не содержащим реологических материалов и не связанным с каким-либо МС. Использование управления с обратной связью является эффективным приемом получения необходимых динамических свойств механических систем [12, 13].

§1. Математическая модель колебательной системы с управляемым по ускорению демпфером в форме дифференциального уравнения с разрывной левой частью.

На рис. 1 показано твердое тело массой m_0 , установленное на цилиндрические катки и с помощью пружин связанное с неподвижным основанием. Тело снабжено электромагнитом с якорем из магнито-жесткого материала и свободно контактирую-

щего с ферромагнитной горизонтальной поверхностью качения катков. При наличии тока i в катушке электромагнита (ЭМ) он прижимается к неподвижной горизонтальной поверхности качения катков с силой $N = N(i)$, способ расчета которой приведен в [3]. Указанный прижим обуславливает силу трения скольжения F , направленную против вектора скорости \dot{x} твердого тела. ЭМ снабжен компенсаторной пружиной Π , уравновешивающей вес якоря и силу прижима, обусловленную остаточной намагниченностью его якоря при $i = 0$, всегда имеющей место для магнито-жестких материалов. В этом случае при отсутствии тока в катушке ЭМ положение равновесия центра масс тела $x = 0$ является единственным. С помощью системы управления, содержащей акселерометр и усилитель, в катушке ЭМ поддерживается знакопостоянный ток, величина которого зависит от сигнала, доставляемого акселерометром. Это обуславливает зависимость силы прижима от ускорения. Таким образом, при наличии трения скольжения на поверхностях контакта якоря ЭМ и качения твердого тела возникает эффект акселеративного демпфирования.

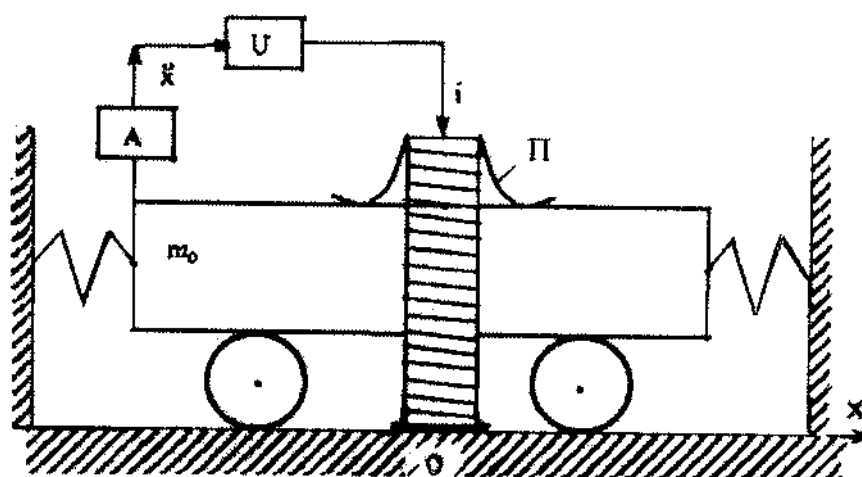


Рис. 1

В частном случае использование якоря из магнито-жесткого материала при знакопостоянном токе и действии компенсаторной пружины зависимость силы прижима ЭМ к поверхности его скольжения представима в виде

$$N = N(i) = \sum_{k=1}^{\ell} n_k i^k, \quad (1.1)$$

где коэффициенты n_k имеют физическую размерность n/a^k (n – ньютон, a – ампер).

При этих условиях система дифференциальных уравнений, описывающая динамику рассматриваемой системы, имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + fN(i) \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} + cx = e(t); \quad (1.2)$$

$$T \frac{di}{dt} + i = k \left| \frac{d^2 x}{dt^2} \right|; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad i(0) = i_0,$$

где m – приведенная масса системы; f – коэффициент трения скольжения; c – суммарная жесткость пружин; T, k – постоянная времени и коэффициент усиления контура управления током электромагнита; $e(t)$ – заданная возмущающая сила.

Система уравнений (1.2) представима в форме Коши заменой переменной $dx/dt = y$ и исключением второй производной из правой части уравнения (1.2), т.е.

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{m}[-fN(i)\text{sign } y - cx + e(t)]; \quad (1.3)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{T} \left(-i + \frac{k}{m} |fN(i)\text{sign } y + cx - e(t)| \right).$$

Система (1.3) является существенно нелинейной и не допускает аналитического решения. Численное интегрирование этой системы также затруднено из-за разрывности ее правой части. В случае, когда $1/T$ – малый параметр, система (1.3) может быть проинтегрирована методом усреднения для уравнений с разрывными правыми частями [4, 7]. При малых значениях постоянной времени T рассматриваемая система является сингулярно возмущенной [6], при этом переменная $i(t)$ изменяется весьма быстро, что требует весьма короткошаговых процедур численного интегрирования. При этом необходимо сравнение результатов численного интегрирования с точным решением задачи при частных значениях ее параметров.

Целью этого исследования является получение точных решений системы (1.2) с принятием двух упрощающих предположений: 1) о пренебрежимой малости постоянной времени T в сравнении с величиной периода незатухающих колебаний системы: $T \ll 2\pi\sqrt{m/c}$; 2) о достаточности одночленного представления функции $N(i)$. При этих условиях система уравнений (1.2) при $T = 0$, $n_k = 0$ ($k = 2, \ell$) приводится к виду

$$\ddot{x} + \lambda_a \dot{x} \text{sign}(\dot{x}) + \omega^2 x = \bar{e}(t), \quad (1.4)$$

где $\omega^2 = c/m$, $\bar{e}(t) = e(t)/m$; $\lambda_a = fn_1 k/m$, при этом параметр λ_a имеет нулевую физическую размерность.

Нелинейное уравнение (1.4) неразрешимо относительно старшей производной и имеет разрывную левую часть. Общая теория решения подобных уравнений не разработана. Однако частный случай таких уравнений в форме (1.4) допускает точное решение. Сначала построим искомое решение для автономного случая: $\bar{e}(t) = 0$, и для начальных условий вида

$$x(t_0) = x_0; \quad \dot{x}(t_0) > 0. \quad (1.5)$$

Воспользуемся способом стыковки решений, исходя из анализа отображения интегральных кривых системы (1.4) на плоскости переменных \dot{x}, \ddot{x} . Плоскость, отображающую первую и вторую производную процесса $x(t)$, назовем диффазной плоскостью. Пространство переменных $x, y = \dot{x}, z = \ddot{x}$ назовем AVD (Acceleration, Velocity, Displacement) пространством; поверхности, определяемые уравнением

$$z + \lambda_a z \text{sign}(yz) + \omega^2 x - \bar{e}(t) = U(x, y, z) - \bar{e}(t) = 0, \quad (1.6)$$

назовем AVD поверхностями.

Отсутствие непрерывных частных производных по переменным y, z от функции $U(x, y, z)$ лишает единственности и непрерывности поверхности, определяемой уравнением (1.6). На рис. 2 показаны две поверхности, порождаемые уравнением (1.6) при

$\bar{e}(t) = 0$, $\omega = 1$, $\lambda_a = 0,8$. Поверхность (на рис. 2, а) – разрывная по координате x , механического содержания не имеет, а на рис. 2, б – разрывная по z , согласуется с механическим содержанием задачи (механические системы могут быть разрывными только по скорости или ускорению).

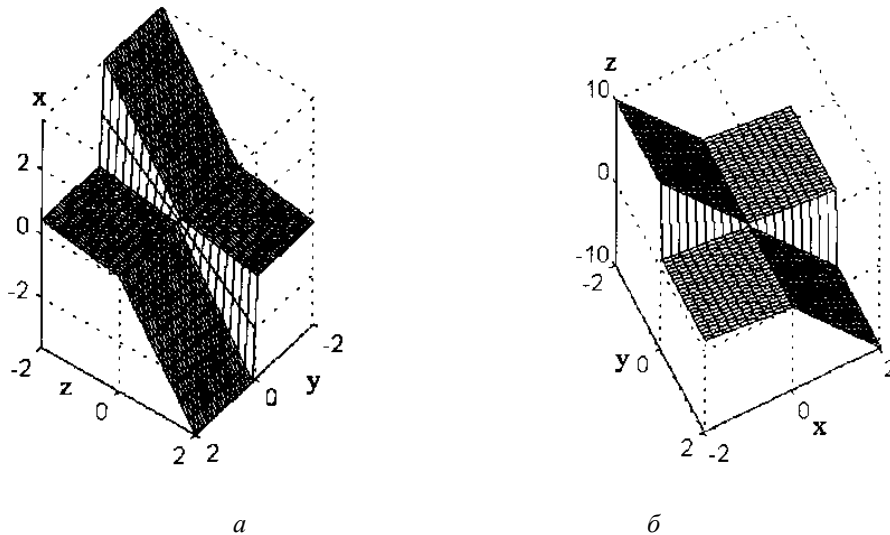


Рис. 2

§2. Колебания системы с линейной характеристикой пружины и акселеративным демпфером.

Исследуем затухающие колебания осциллятора с управляемым акселеративным демпфером, который описывается уравнением (1.6) при $e(t) = 0$

$$\ddot{x} + \lambda_a \dot{x} \text{sign}(\dot{x}) + \omega^2 x = 0; \quad x(0) = -a, \quad \dot{x}(0) = \varepsilon > 0. \quad (2.1)$$

Здесь диссипативные свойства системы определяются единственным параметром λ_a . Ясно, что такой демпфер не в состоянии погасить равномерное движение. Но колебательные движения системы возле положения равновесия, которые происходят с изменением скорости по модулю, могут быть погашены акселеративным демпфером. AVD поверхности колебательной системы (1.3) имеет пластинчатую структуру (рис.2), поэтому уравнение (2.1) допускает точное решение.

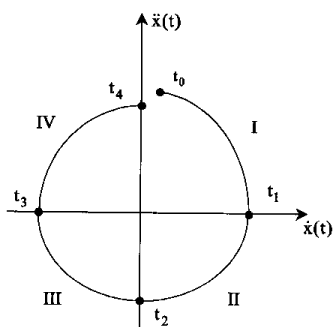


Рис. 3

Для построения его аналитического решения рассмотрим положение интегральных кривых на диффазовой плоскости. Индексом i обозначим интегральные кривые, которые принадлежат i -му квадранту диффазовой плоскости.

Пусть $\dot{x} > 0$, $\ddot{x} > 0$, что имеет место, когда $x(0) = -a$, т. е. изображающая точка на диффазовой кривой находится в первом квадранте (рис. 3). Уравнение движения массы вправо от начального положения имеет вид

$$\ddot{x}_1 (1 + \lambda_a) + \omega^2 x_1 = 0; \quad x_1(0) = -a; \quad \dot{x}_1(0) = \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \ll 1). \quad (2.2)$$

Следовательно, для первого квадранта имеем такое решение:

$$x_1(t) = -a \cos \omega t; \quad (2.3)$$

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{\omega^2}{1 + \lambda_a} a \cos(\omega t); \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \lambda_a}} \quad (0 \leq t \leq t_1). \quad (2.4)$$

Согласно изложенному выше, момент времени t_1 определяем из условия $\dot{x}_1(t_1) = 0$. Это дает

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \pi \frac{\sqrt{1 + \lambda_a}}{2\omega}. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.2) и его решение (2.3) справедливы на интервале $[0, t_1]$.

Для второго квадранта диффазной плоскости имеем $\ddot{x}_2(t) < 0$, $\dot{x}_2(t) > 0$, при этом уравнение движения, начальные условия и решение принимают вид

$$\ddot{x}_2(1 - \lambda_a) + \omega^2 x_2 = 0; \quad (2.6)$$

$$t \in [t_1, t_2]; \quad x_2(t_1) = x_1(t_1) = 0; \quad \dot{x}_2(t_1) = a\omega_1;$$

$$x_2(t) = a \sqrt{\frac{1 - \lambda_a}{1 + \lambda_a}} \sin \omega_2(t - t_1); \quad \omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \lambda_a}}. \quad (2.7)$$

Здесь следует принять $\lambda_a \neq 1$. При $\lambda_a > 1$ решение уравнения (2.6) выражается через гиперболические функции

$$x_2(t) = A \operatorname{sh}[\omega_2(t - t_1)], \quad (2.8)$$

не является колебательным и неустойчиво. Это означает, что уравнение (1.4) при $\lambda_a > 1$ не является адекватным системе уравнений (1.2) – (1.3), как полученное с учетом существования в этой системе колебательных решений.

Момент времени t_2 перехода изображающей точки в третий квадрант диффазной плоскости вычисляем согласно формуле

$$x_2(t) = a\omega_2 \sqrt{\frac{1 - \lambda_a}{1 + \lambda_a}} \cos \omega_2(t_2 - t_1) = 0. \quad (2.9)$$

Отсюда имеем равенства

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2\omega_2}. \quad (2.10)$$

Подставим в (2.10) значение t_1 из (2.5). В результате получаем длину интервала первого полуколебания

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2\omega} (\sqrt{1 + \lambda_a} + \sqrt{1 - \lambda_a}). \quad (2.11)$$

Следовательно, при $t = t_2$ имеем

$$x_2(t_2) = a \sqrt{\frac{1 - \lambda_a}{1 + \lambda_a}}; \quad \dot{x}_2(t_2) = 0. \quad (2.12)$$

Перейдем к вычислению движения массы при $\dot{x}(t) < 0$, т. е. в III и IV квадрантах диффазной плоскости. В третьем квадранте имеем $\dot{x}(t) < 0$, $\ddot{x}(t) < 0$, уравнение дви-

жения в интервале $t_2 \leq t \leq t_3$ принимает вид (2.2), а начальные условия задаются формулами (2.12). Вычисления дают такой закон для $x_3(t)$:

$$x_3(t) = a \sqrt{\frac{1-\lambda_a}{1+\lambda_a}} \cos \omega_3(t-t_2), \quad \omega_3 = \omega_1. \quad (2.13)$$

Движение в третьем квадранте заканчивается при $t = t_3$, когда $\dot{x}_3(t_3) = 0$. Это дает соотношение

$$t_3 - t_2 = \frac{\pi}{2\omega} \sqrt{1+\lambda_a}. \quad (2.14)$$

Отсюда имеем следующее равенство:

$$t_3 = \frac{\pi}{\omega} \left(\sqrt{1+\lambda_a} + \frac{1}{2} \sqrt{1-\lambda_a} \right). \quad (2.15)$$

Скорость точки при переходе из третьего в четвертый квадрант диффазной плоскости определяется соотношением

$$\dot{x}_3(t_3) = -\frac{a\omega\sqrt{1-\lambda_a}}{1+\lambda_a}. \quad (2.16)$$

В четвертом квадранте $\dot{x}(t) < 0$ и движение описывается уравнением (2.6) при соответствующих начальных условиях

$$x_4(t_3) = 0; \quad \dot{x}_4(t_3) = \dot{x}_3(t_3). \quad (2.17)$$

Это дает следующий закон движения:

$$x_4(t) = -a \frac{1-\lambda_a}{1+\lambda_a} \sin \left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\lambda_a}} (t-t_3) \right). \quad (2.18)$$

Вычислим длительность четвертого этапа движения. Этот этап длится к моменту $t = t_4$, когда скорость движения материальной точки превращается в нуль: $\dot{x}_4(t_4) = 0$. Из выражения (2.18) получаем

$$t_4 - t_3 = \frac{\pi}{2\omega} \sqrt{1-\lambda_a}. \quad (2.19)$$

Принимая во внимание (2.10) и (2.15), определяем

$$t_4 = \frac{\pi}{\omega} \left(\sqrt{1+\lambda_a} + \sqrt{1-\lambda_a} \right) = 2t_2 = T. \quad (2.20)$$

При $t = t_4$ максимальное отклонение материальной точки влево имеет значение

$$x_4(t_4) = -\frac{1-\lambda_a}{1+\lambda_a} a. \quad (2.21)$$

Следовательно, за один квазипериод $T = t_4$ относительное уменьшение амплитуды колебаний вычисляем по формуле

$$\delta_4 = \frac{|x_I(0) - x_4(t_4)|}{|x_I(0)|} = \frac{a - \frac{1-\lambda_a}{1+\lambda_a} a}{a} = \frac{2\lambda_a}{1+\lambda_a}. \quad (2.22)$$

На основе формул (2.21), (2.22) можно вычислить модуль максимального отклонения материальной точки от положения равновесия по истечении n квазипериодов колебаний

$$|x_{4n}(t_{4n})| = q^n a, \quad q = (1 - \lambda_a) / (1 + \lambda_a). \quad (2.23)$$

Отсюда вытекает, что экстремальные отклонения материальной точки от положения равновесия при чисто акселеративном демпфировании и отсутствии внешних сил можно представить после истечения n циклов колебаний в виде

$$x_{4n}(t_{4n}) = aq^{E(t/T)}, \quad (2.24)$$

где $E(x)$ – целая часть числа x .

Приближенно закон колебательного движения точки, описываемой уравнением (2.1) при $\lambda_a \ll 1$, на большом интервале времени с применением эффективной частоты $\Omega_e = 2\pi/T$ можно представить в компактном виде

$$x_{ap}(t) = Aq^{t/T} \cos(\Omega_e t + \alpha_0) = x_{ap}(t);$$

$$A = -a\sqrt{\ln^2 q + 4\pi^2} / 2\pi; \quad \alpha_0 = -\text{arctg}(\sqrt{A^2 - a^2} / a), \quad (2.25)$$

где T определяется формулой (2.20).

Решение уравнения (2.2) в форме (2.25) будем называть приближенным.

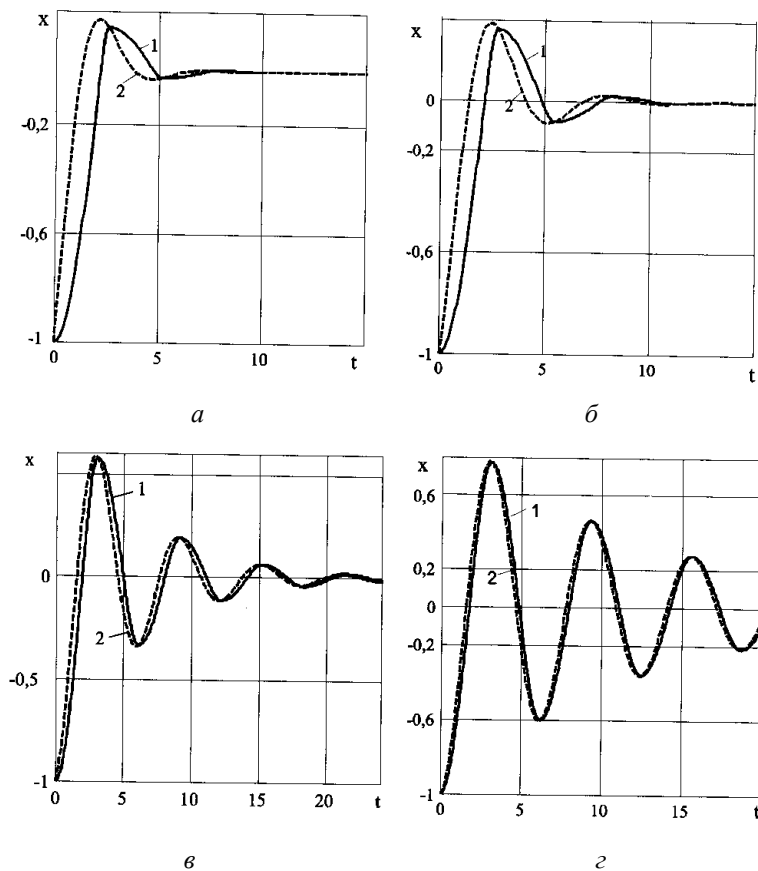


Рис. 4

На рис. 4, $a - z$ представлено точное (кривая 1) и приближенное (кривая 2) решения уравнения (2.1) для разных значений управляемого параметра $\lambda_a = [0,95; 0,85; 0,50; 0,25]$. Численное решение уравнения (2.1) построено с применением алгоритмов MATLAB численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Точное и численное решения оказались графически неразделимыми. Максимальные отклонения от положения равновесия аппроксимативного и точного решений почти совпадают для диапазона $\lambda_a \in [0,75, 0]$. Текущие значения точного и аппроксимативного решений имеют заметные отклонения. Согласно формуле (2.25) аппроксимативное решение является неограниченно дифференцируемо. При этом в силу уравнения (1.7) уже вторая производная процесса $x(t)$ является разрывной. В этом случае для аппроксимации процесса $x(t)$ можно применить нормированные ромбические гармоники $\text{corn}(4\sqrt{2}t/T)$; $\text{sinr}(4\sqrt{2}t/T)$, которые, как и точное решение, имеют разрывные вторые производные [5].

Численный анализ показал эффективность применения в формуле (2.25) ромбической гармоники $\text{corn}(4\sqrt{2}t/T + \alpha_0)$ вместо круговой. Для $0,85 < \lambda_a < 1$ ромбическая аппроксимация является значительно лучшей.

Сравним параметры переходного процесса осцилляторов с вязким и акселеративным демпферами, которые не зависят от начальных условий.

Математическая модель собственных колебаний осциллятора с вязким демпфером и линейной пружиной имеет вид

$$\ddot{x} + \lambda_v \dot{x} + \omega^2 x = 0; \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (2.26)$$

Здесь параметр λ_v имеет размерность c^{-1} .

При ненулевых начальных условиях процесс изменения величины $x(t)$ имеет форму затухающей гармоники

$$x = A e^{-\frac{\lambda_v}{2}t} \cos(\omega_v t + \alpha) \quad \lambda_v < 2\omega; \quad \omega_v = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}\lambda_v^2}. \quad (2.27)$$

Постоянные интегрирования A, α являются функциями начальных условий x_0, \dot{x}_0 .

Рассмотрим параметры частоты затухания процесса (2.27) и системы (2.1), пользуясь ее точным и аппроксимативным решениями.

Для процесса (2.25) системы (2.1) параметр частоты определяется формулой

$$\Omega_e = 2\omega / (\sqrt{1 + \lambda_a} + \sqrt{1 - \lambda_a}). \quad (2.28)$$

Для процессов (2.25), (2.27) область существования колебательного решения зависит от параметров затухания: в первом случае $\lambda_v < 2\omega$, во втором – $\lambda_a < 1$.

При $\lambda_v > 2\omega$ решение линейного уравнения второго порядка является аperiodически устойчивым, тогда как решение уравнения (2.2) согласно с формулой (2.8) при $\lambda_a > 1$ является неустойчивым. При $\lambda_v \rightarrow 2\omega$ частота осцилляций процесса (2.27) стремится к нулю, тогда как частота точного решения при $\lambda_a \rightarrow 1$ согласно с его аппроксимацией (2.28) увеличивается к значению $\sqrt{2}\omega$.

При малых значениях параметров затухания λ_v, λ_a имеем $\omega_v = \omega + O(\lambda_v^2)$; $\Omega_e = \omega + O(\lambda_a^2)$, где $O(\varepsilon^2)$ – величины второго порядка малости.

Для линейного осциллятора длительность каждой четверти цикла колебания является одинаковой, в то же время для осциллятора с акселеративным демпфером дли-

тельность первой $T_{1/4}$ и третьей $T_{3/4}$, второй $T_{2/4}$ и четвертой $T_{4/4}$ четвертей определяются разными формулами (2.5 – 2.10):

$$t_1 - t_0 = T_{1/4} = T_{3/4} = \frac{\pi}{2\omega} \sqrt{1 + \lambda_a}; \quad t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = T_{2/4} = T_{4/4} = \frac{\pi}{2\omega} \sqrt{1 - \lambda_a}.$$

Таким образом, с приближением λ_a до 1 процесс колебаний осциллятора (2.1) существенно отличается от такого, который может быть описан круговыми гармониками. Следовательно, при немалых значениях параметра λ_a осциллятор с акселеративным демпфером обнаруживает свои нелинейные свойства.

Проанализируем характеристики затухания обоих процессов (2.25), (2.27); они выражаются показательными функциями. В линейной системе информация о затухании содержится в показателе экспоненты $\lambda_v t / 2$. В системе (2.1) согласно приближенному решению от параметра λ_a зависят как основание $q = (1 - \lambda_a) / (1 + \lambda_a)$, так и показатель t/T .

При малых λ_a $T \approx 2\pi / \omega$ и единственным носителем информации о параметре затухания является основание показательной функции q .

Параметр затухания λ_v линейной системы определяется путем вычисления модуля логарифмического декремента

$$\ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T)} = D_v = \frac{\lambda_v}{2} T_v \Rightarrow \lambda_v = \frac{2D_v}{T_v}.$$

Отсюда видно, что логарифмический декремент D_v зависит от квазипериода колебаний.

Определим декремент колебаний системы с акселеративным демпфером на основе аппроксимативного решения (2.25) по формуле

$$\frac{x(t_1)}{x(t_1 + T)} = D_a = \frac{1 + \lambda_a}{1 - \lambda_a} = \frac{1}{q} > 1.$$

Отсюда имеем

$$\lambda_a = \frac{D_a - 1}{D_a + 1} < 1. \quad (2.29)$$

Как видим, декремент осциллятора с акселеративным демпфированием не зависит от квазипериода колебаний. Для сравнения диссипативных свойств осциллятора с вязким и акселеративным демпферами вычислим соотношение между коэффициентами демпфирования при условии одинаковости их декрементов: $\exp D_v = D_a = (1 + \lambda_a) / (1 - \lambda_a)$. Отсюда находим $\lambda_a = (\exp D_v - 1) / (\exp D_v + 1)$, где λ_a определяется формулой (2.29).

Точное решение уравнения (1.6) при $\bar{e}(t) \neq 0$, как имеющего кусочно-плоскостную AVD-поверхность, можно получить с использованием интеграла Дюамеля в каждом квадранте диффазной (AV) плоскости. Получение количественных оценок параметров движения на основании точного решения возможно только с использованием компьютера. Однако, гораздо проще для малых значений λ_a получить количественные оценки параметров движения методом непосредственного численного интегрирования дифференциального уравнения (1.4). С этой целью его необходимо разрешить относительно старшей производной и привести к нормальному виду (форме Коши).

Дополним уравнение (1.4) слагаемым, соответствующим действию кулонова трения в случае неточного подбора жесткости компенсаторной пружины, и запишем его в виде

$$\ddot{x}[1 + \lambda_a \text{sign}(\dot{x}\ddot{x})] = -\omega^2 x - n \text{sign} \dot{x} + e(t), \quad (2.30)$$

где $n > 0$ – сила трения скольжения, отнесенная к единице массы тела. Уравнение (2.30) имеет разрывные правую и левую части.

Учитывая, что $0 < \lambda_a < 1$, из равенства (2.30) получаем

$$\text{sign} \ddot{x} = -\text{sign}(\omega^2 x + n \text{sign} \dot{x} - e(t)). \quad (2.31)$$

Используя равенство $\text{sign}(ab) = \text{sign} a \text{sign} b$, уравнение (2.30) можно представить в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{y} = -\frac{\omega^2 x + n \text{sign} y - e(t)}{1 - \lambda_a \text{sign}[y(\omega^2 x + n \text{sign} y - e(t))]}, \\ \dot{x} = y \end{cases} \quad (2.32)$$

Здесь должно быть $|\omega^2 x - e(t)| > n$ при $y = 0$. Если же $|\omega^2 x - e(t)| < n$ и $\dot{x} = y = 0$ для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ колебательная система попадает в зону застоя, тогда на отрезке времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ вместо уравнений (2.32) будем иметь следующие: $\dot{y} = 0$, $\dot{x} = 0$ с начальными условиями $y(t_1) = 0$, $x(t_1) = \text{const}$.

§3. Двойной нестационарный фазочастотный резонанс колебательных систем с акселеративным демпфером.

В работе [15] описано явление аномально высокого коэффициента усиления переносного ускорения осциллятора, установленного на подвижной платформе. Оно исследовано применительно к линейному механическому осциллятору, возмущаемому параметрической или внешней силой, описываемой суммой двух затухающих гармоник. Применительно к внешнему возмущению суть его состоит в следующем. Пусть δ, ω – коэффициент затухания и частота квазипериодических собственных колебаний автономного осциллятора; $a_i, \lambda_i, \nu_i, \alpha_i$ ($i = 1, 2$) – амплитуды, коэффициенты затухания, частоты и начальные фазы внешнего экспоненциально затухающего возмущения, соответственно.

Тогда аномально высокий максимум динамического коэффициента усиления внешнего возмущения можно наблюдать при выполнении таких условий: $a_1 \approx a_2 = \text{const}$, $\nu_1 \approx \nu_2 = \text{const}$, $\omega = \text{var} \in (\nu_1, \nu_2)$, $|\alpha_1 - \alpha_2| = \pi$.

При $\alpha_1 = \alpha_2$ имеет место обычный резонансный максимум. Если в спектре многочастотного возбуждения имеются затухающие гармоники с близкими по величине частотами, амплитудами и с начальными фазами, отличающимися на полпериода, также имеет место описанная аномалия.

Исходя из уравнений осциллятора с акселеративным демпфером в форме Коши (2.32) и используя численное интегрирование, исследуем его реакцию на возбуждение вида

$$e(t) = -\ddot{\xi}(t); \quad \ddot{\xi}(t) = \sum_{k=1}^N a_k \exp(-\lambda_k t) \cos\left(\frac{2\pi}{T_k} t + \alpha_k\right).$$

Вычислим величину

$$\mu = \mu(T_c) = \frac{\max_t |\ddot{x}(t) + \ddot{\xi}(t)|}{\max_t |\ddot{\xi}(t)|}, \quad (3.1)$$

где $T_c = \frac{2\pi}{\omega}$; $\lambda_k = \frac{Dz}{T_k}$; $Dz = 0,2$; $\lambda_a = 0,02$; $n = 0$; $a_k = 1$; $\omega = \text{var}$.

На рис. 5, а показан график зависимости $\mu(T_c)$ при $N = 2$, $T_1 = 0,4$; $T_2 = 0,45$. Кривая 1 отвечает одинаковым начальным фазам $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, а кривая 2 – получена при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. На рис. 5, б для $N = 14$, амплитудный спектр представлен вектором

$$a_k = [0,5937 \quad 0,0366 \quad 0,4551 \quad 0,8942 \quad 0,5114 \quad 0,9065 \quad 0,0461 \\ 0,7458 \quad 0,9229 \quad 0,7143 \quad 0,5652 \quad 0,9860 \quad 0,5649 \quad 0,8992],$$

а периодный спектр – вектором

$$TK = [0,3603 \quad 0,3434 \quad 0,2343 \quad 0,2323 \quad 0,4062 \quad 0,3255 \quad 0,3640 \\ 0,3263 \quad 0,3316 \quad 0,2296 \quad 0,4258 \quad 0,3672 \quad 0,2694 \quad 0,2967].$$

Для кривых 1, 2, соответственно, имеем $\alpha_k = 0$ и $\alpha_k(1+(-1)^k)\pi/2$ ($k = 1,14$).

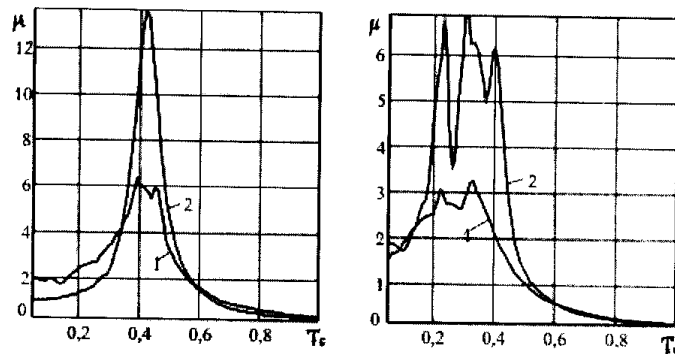


Рис. 5

Как видим, для случая одинаковых начальных фаз двухчастотного и многочастотного возмущений максимумы кривой $\mu(T_c)$ примерно в два раза ниже по сравнению со случаем, когда начальные фазы двух последующих затухающих гармоник отличаются на π . Следовательно, явление фазочастотного резонанса имеет место и для осциллятора с акселеративным демпфером. В связи с этим можно утверждать, что это явление инвариантно по отношению к типу затухания в колебательной системе.

Заключение.

В данной работе обоснована работоспособность управляемого по ускорению фрикционного электромагнитного демпфера. Построена математическая модель осциллятора с управляемым демпфером в форме трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывной правой частью. Обоснована упрощенная модель осциллятора с диссипацией энергии, зависящая от модуля ускорения в виде одного уравнения второго порядка с разрывной левой частью, и найдено ее точное решение. Установлен аппроксимативный закон затухания колебаний осциллятора с акселеративным демпфером. Показано, что информация о параметре затухания осциллятора с акселеративным демпфированием содержится в основании показательной функции. Исследовано явление двойного нестационарного фазочастотного резонанса.

РЕЗЮМЕ. Обґрунтовано працездатність керованого за прискоренням фрикційного електромагнітного демпфера. Побудовано математичну модель осцилятора з керованим демпфером у формі трьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з розривною правою частиною. Розглянуто спрощену модель осцилятора з дисипацією енергії, залежною від модуля прискорення у вигляді одного рівняння другого порядку з розривною лівою частиною і знайдено його точний розв'язок. Встановлено наближений закон затухання коливань осцилятора. Показано, що інформація про параметр затухання з демпфером за прискоренням міститься в основі показникової функції. Досліджено явище подвійного нестационарного фазочастотного резонансу.

1. Козина Г.А., Клишник Л.Ш. Современные методы сейсмозащиты зданий и сооружений. – М.: ВНИИИС, 1987.– 66 с.
2. Назин В.В. Новые сейсмостойкие конструкции и железобетонные механизмы сейсмоизоляции зданий и сооружений. – М.: Стройиздат, 1993. – 133 с.
3. Нейман Л.Р., Калантаров П.Л. Теоретические основы электротехники. Ч. I. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 296 с.
4. Плахтиенко Н.П. К исследованию движения тел под действием разрывных сил методом усреднения // Прикл. механика. – 1985. – **21**, № 8. – С. 84 – 91.
5. Плахтиенко М.П. Ромбичні функції: початки теорії та прикладні задачі. – К., 2005. – 135 с.
6. Понтрягин Л.С., Родыгин Л.В. Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 2. – С. 255 – 258.
7. Самоиленко А.М. Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – С. 90 – 95.
8. Carlson J. D., Spencer B.F. Magnetorheological fluid dampers for semiactive seismic control // Proc., Third Int. Conf. on Motion and Vibration Control, III, 1996. – P. 35 – 40.
9. Eisenberg J.M., Smirnov V.J., Dashevsky M.A. Seismic Isolation of Buildings. New Applications and Design Rules in Russia. Proc. Int. Post-Smart Conf. Seminar on Seismic Isolation. Santiago, Chile. – 1995. – P. 457 – 463.
10. Gavin H.P., Hanson R.D., Filisko F.E. Electrorheological Dampers, part I: Analysis and Design; Part II: Testing and Modeling Trans // ASME, J. Appl. Mech. – 1996. – **63**. – P. 669 – 682.
11. Karnopp D. Active and semi-active vibration isolation // Trans. ASME, Special 50-th Anniversary Design Issue. – 1995. – **117**. – P. 177 – 185.
12. Larin V.B. On Static Output- Feedback Stabilization of a Periodic System // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 3. – P. 357 – 363.
13. Larin V.B., Tunik A.A. Dynamic Output Feedback Compensation of External Disturbances // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 5. – P. 606 – 616.
14. Plakhtienko N.P. Nonlinear One-Dimensional Seismodynamic Model of a Solid with Shock Absorbing Support // Int. Appl. Mech. – 2003. – **41**, N 3. – P. 336 – 345.
15. Plakhtienko N.P. Double Transient Phase-Frequency Resonance in Vibratory Systems // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 113 – 120.
16. Plakhtienko N.P. Dynamics of a Chain System of Rigid Bodies with Gravity-Friction Seismic Dampers: Fixed Supports // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 7. – P. 786 – 796.
17. Plakhtienko N.P., Mikhailova M.I., Zabuga A.T. Vibrations of a Rigid Body with a Controlled Frictional Electromagnetic Seismic Damper: Nonlinear Model // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 1. – P. 94 – 102.
18. Plakhtienko N.P. Translation of a Rigid Body with Gravity-Friction Seismic Dampers // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 4. – P. 461 – 466.

Поступила 19.10.2009

Утверждена в печать 7.12.2010