С.В.Бабенко

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ СТРУКТУРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: center@inmech.kiev.ua*

Abstract. An analysis of Lyapunov stability of linear systems of dynamical equations with periodic coefficients and structural perturbations on the time scale is carried out. Basing on the matrix-value concept of the Lyapunov direct method, the sufficient conditions of asymptotic stability for equations under consideration are obtained for all the values of the structural matrix from the structural set. As an example of application of theoretical results, the system of two dynamical equations on the time scale is considered.

Key words: asymptotic stability; structural perturbations; time scale; dynamic equations; Lyapunov direct method.

Введение.

Динамические уравнения на временных шкалах наиболее адекватно моделируют непрерывно-дискретные во времени процессы, унифицируя подход к исследованию непрерывных систем и дискретных во времени систем. Определенный интерес представляет задача об устойчивости крупномасштабных механических систем со структурными возмущениями на временной шкале.

Теория устойчивости непрерывных крупномасштабных механических систем со структурными возмущениями изложена в монографиях [1, 2]. В работе [3] положено начало исчислению на временных шкалах. В работах [4 – 6] разработан прямой метод Ляпунова исследования устойчивости решений динамических уравнений на временных шкалах.

Целью данной статьи является получение достаточных условий асимптотической устойчивости линейных динамических уравнений с периодическими коэффициентами и структурными возмущениями на временной шкале.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим линейную систему динамических уравнений n-го порядка

$$x^{\Delta} = A(t)x, \tag{1}$$

заданную на ω-периодической ($\omega > 0$) временной шкале T, т.е. функция зернистости которой $\mu(t) = \sigma(t) - t$ удовлетворяет равенству $\mu(t+\omega) = \mu(t)$ при всех $t \in T$, и $A(t) \in \Im = \{A^1(t), A^2(t), \dots, A^N(t)\}$, где функции $A^k \in C_{rd}\Re\,(T, \mathbb{R}^{n\times n})$ (принадлежат множеству rd-непрерывных регрессивных на T функций [9]) ($k = 1, 2, \dots, N$) предполагаем периодическими с периодом $\tau = p\omega/q$, где p и q – некоторые натуральные числа.

Примем также, что система (1) допускает декомпозицию на две подсистемы размерностей n_1 и n_2 ($n_1 + n_2 = n$) следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^\Delta = A_{11}x_1 + A_{12}(t)x_2, \\ x_2^\Delta = A_{21}(t)x_1 + A_{22}x_2, \end{cases} \tag{2}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ $(x = (x_1^T, x_2^T)^T)$, A_{ii} – $n_i \times n_i$ -постоянные матрицы, а

$$A_{12}(t) \in \Im_1 = \{A_{12}^1(t), A_{12}^2(t), \dots, A_{12}^N(t)\};$$

$$A_{21}(t) \in \Im_2 = \{A_{21}^1(t), A_{21}^2(t), \dots, A_{21}^N(t)\}.$$

При этом число N в определении семейств вариации показателя $k(t)$ на множестве $N_1 = \{1, 2, \dots, N\}$, $k(t) \in N_1$, $\forall t \in T$, описывает структурные изменения систем (1) и (2).

Следуя работе [2], для более точного описания структурных изменений системы (1) введем следующие обозначения.

Структурный параметр $s_{ij} : T \to \{0, 1\}$ – (i, j)-й элемент структурной матрицы $S_i : T \to \mathbb{R}^{n_i \times N n_i}$ i-й подсистемы $S_i = (s_{i1}I_{n_i}, s_{i2}I_{n_i}, \dots, s_{iN}I_{n_i})$, $i = 1, 2$, который является таким, что из соотношения $s_{ij} = 1$ следует, что $s_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Функции h_1 и h_2, определяемые равенствами

$$h_1(t) = ((A_{12}^1)^T(t), (A_{12}^2)^T(t), \dots, (A_{12}^N)^T(t))^T;$$

$$h_2(t) = ((A_{21}^1)^T(t), (A_{21}^2)^T(t), \dots, (A_{21}^N)^T(t))^T,$$

входят в правую часть системы динамических уравнений

$$\begin{cases} x_1^\Delta = A_{11}x_1 + S_1(t)h_1(t)x_2; \\ x_2^\Delta = S_2(t)h_2(t)x_1 + A_{22}x_2. \end{cases} \tag{3}$$

Матрица $S(t)$, которая определяется выражением

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & O_{12} \\ O_{21} & S_2 \end{pmatrix}, \; O_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j},$$

называется структурной матрицей системы (1), а множество $\mathbb{S}$ всех возможных матриц $S(t)$ – структурным множеством системы (1). Если принять

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & O_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; \; O_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}; \; h = (h_1^T, h_2^T)^T,$$

то исходную систему можно описать так:

$$x^\Delta = A_0 x + S(t)h(t)x; \; S(t) \in \mathbb{S} \;\; \forall t \in T. \tag{4}$$

Для системы (4) установим условия устойчивости решения $x = 0$ при каждом $S \in \mathbb{S}$.

2. Методика исследования.

Для решения поставленной задачи воспользуемся прямым методом Ляпунова для динамических уравнений, следуя которому построим для системы (4) матричнозначную функцию Ляпунова $U(t, x) = [v_{ij}(t, x)]_{i,j=1}^2$, компоненты которой определяются следующим образом:

$$v_{ij}(t,\,x) = x_i^T P_{ij} x_j,$$

где квадратные матрицы P_{ii} порядка n_i являются постоянными, матрица P_{12} размерности $n_1 \times n_2$ – Δ-дифференцируемая функция от t, а $P_{21} = P_{12}^T$. На основании матричнозначной функции $U(t,x)$ построим скалярную функцию Ляпунова в виде

$$v(t,x,\theta) = \theta^T U(t,x)\theta,\ \ \theta \in \mathbb{R}_+^2 \tag{5}$$

или покомпонентно имеем

$$v(t,\,x,\,\theta) = \theta_1^2 v_{11}(t,\,x) + \theta_1\theta_2(v_{12}(t,\,x) + v_{21}(t,\,x)) + \theta_2^2 v_{22}(t,\,x) =$$
$$= \theta_1^2 x_1^T P_{11} x_1 + 2\theta_1\theta_2 x_1^T P_{12} x_2 + \theta_2^2 x_2^T P_{22} x_2.$$

Функция (5) дает возможность получить достаточные условия устойчивости решения $x = 0$ системы (4) (такой результат содержится в теореме 1 данной статьи). Следующие леммы являются вспомогательными для получения этих условий.

Рассмотрим линейное однородное матричное динамическое уравнение

$$(I_{n_1} + \mu(t)A_1^T)X^{\Delta}(t)(I_{n_2} + \mu(t)A_2) + A_1^T X(t) + X(t)A_2 + +\mu(t)A_1^T X(t)A_2 = 0,$$

где $X: T \to \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, а I_{n_1} и I_{n_2} – единичные матрицы порядка n_1 и n_2, соответственно.

Лемма 1. Если матрицы A_1 и A_2 в уравнении (7) являются регрессивными, то его решение $X(t)$ с начальным условием $X(t_0) = X_0$ представляется в виде

$$X(t) = \Phi(t,\,t_0)X_0,$$

где оператор $\Phi(t,\,t_0)$ определен при всех $t_0, t \in T$ в пространстве $n_1 \times n_2$-матриц и действующий по правилу

$$\Phi(t,\,t_0)X = (e_{A_1}^{-1}(t,\,t_0))^T X e_{A_2}^{-1}(t,\,t_0),$$

где $e_{A_i}(t,\,t_0)$ ($i = 1,\,2$) обозначает экспоненциальную функцию [9] системы линейных динамических уравнений n_i-го порядка: $x^{\Delta} = A_i x$.

Обозначим $\kappa(u) = -\dfrac{u}{1 + \mu(t)u}$ и, следуя работе [9], через $\alpha \oplus \beta$ обозначим регрессивную сумму функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, равную $\alpha(t) + \beta(t) + \mu(t)\alpha(t)\beta(t)$. Следующая лемма характеризует спектр оператора $\Phi(t,\,t_0)$.

Лемма 2. $\sigma(\Phi(t,\,t_0)) = \{e_{\kappa(\alpha_j \oplus \beta_k)}(t,\,t_0) \mid \alpha_j \in \sigma(A_1),\ \beta_k \in \sigma(A_2)\}$ при всех $t \ge t_0$ из шкалы.

Следующая лемма дает условия существования периодического решения $X(t)$ уравнения

$$(I_{n_1} + \mu(t)A_1^T)X^{\Delta}(t)(I_{n_2} + \mu(t)A_2) + A_1^T X(t) + X(t)A_2 + +\mu(t)A_1^T X(t)A_2 = F(t), \tag{6}$$

где $F \in C_{rd}\Re(T, \mathbb{R}^{n \times n})$ – τ-периодическая функция; A_1, A_2 – регрессивные матрицы размерностей n_1 и n_2, соответственно. Обозначим $\chi = \tau q = p\omega$.

Лемма 3. Если при некотором $t_0 \in T$ выполняется неравенство $e_{\kappa(\alpha_j \oplus \beta_k)}(t_0 + \chi, t_0) \neq 1$ при любых $\alpha_j \in \sigma(A_1)$, $\beta_k \in \sigma(A_2)$, то уравнение (6) имеет единственное χ-периодическое решение, которое начинается с t_0 и определяется по формуле

$$X(t) = \Phi(t, t_0)(E - \Phi(t_0 + \chi, t_0))^{-1} \int_{t_0}^{t_0 + \chi} \Phi(t_0 + \chi, \sigma(s))F(s)\Delta s + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \sigma(s))F(s)\Delta s.$$

Перед тем, как сформулировать и доказать основную теорему, введем некоторые обозначения

$$B_1(t, S(t)) = \theta_1^2(A_{11}^T P_{11} + P_{11}A_{11} + \mu(t)A_{11}^T P_{11}A_{11}) + 2\theta_1\theta_2(I + \mu(t)A_{11}^T)P_{12}^{\sigma}(t)S_2(t)h_2(t) +$$
$$+\theta_2^2\mu(t)h_2^T(t)S_2^T(t)P_{22}S_2(t)h_2(t);$$

$$B_2(t, S(t)) = \theta_1^2\mu(t)h_1^T(t)S_1^T(t)P_{11}S_1(t)h_1(t) + 2\theta_1\theta_2 h_1^T(t)S_1^T(t)P_{12}^{\sigma}(t)(I + \mu(t)A_{22}) +$$
$$+\theta_2^2(A_{22}^T P_{22} + P_{22}A_{22} + \mu(t)A_{22}^T P_{22}A_{22});$$

$$C(t, S(t)) = \theta_1^2(I + \mu(t)A_{11}^T)(P_{11} + P_{11}^T)S_1(t)h_1(t) + 2\theta_1\theta_2((I + \mu(t)A_{11}^T)P_{12}^{\Delta}(t)(I + \mu(t)A_{22}) +$$
$$+A_{11}^T P_{12}(t) + P_{12}(t)A_{22} + \mu(t)A_{11}^T P_{12}(t)A_{22}) + \theta_2^2 h_2^T(t)S_2^T(t)(P_{22} + P_{22}^T)(I + \mu(t)A_{22});$$

$$F(t, S(t)) = -\frac{\theta_1}{2\theta_2}(I + \mu(t)A_{11}^T)(P_{11} + P_{11}^T)S_1(t)h_1(t) - \frac{\theta_2}{2\theta_1}h_2^T(t)S_2^T(t)(P_{22} + P_{22}^T)(I + \mu(t)A_{22});$$

$$D(t, S(t)) = 2\theta_1\theta_2\mu(t)h_2^T(t)S_2^T(t)(P_{12}^{\sigma})^T S_1(t)h_1(t);$$

$$K(t, S(t)) = \begin{pmatrix} \|B_1(t, S(t)) - B_1(t, S_0)\| & \frac{1}{2}\|C(t, S(t)) + D(t, S(t))\| \\ \frac{1}{2}\|C(t, S(t)) + D(t, S(t))\| & \|B_2(t, S(t)) - B_2(t, S_0)\| \end{pmatrix}.$$

Пусть также в выражении для $\Phi(t, t_0)$: $A_1 = A_{11}$ и $A_2 = A_{22}$.

Теорема 1. Если существует значение S_0 структурной матрицы $S(t)$ из структурного множества $\mathbb{S}$ системы (1), положительно определенные матрицы $P_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ и действительные числа $\theta_1, \theta_2, \delta, \varepsilon > 0$ такие, что при всех $t_0 \in T$, $t \geq t_0$ и $S \in \mathbb{S}$ выполняются неравенства:

1) $e_{\kappa(\alpha_j \oplus \beta_k)}(t_0 + \chi, t_0) \neq 1$ при всех $\alpha_j \in \sigma(A_{11})$, $\beta_k \in \sigma(A_{22})$;

2) $2\|P_{12}(t)\|^2 + \delta \leq \lambda_m(P_{11})\lambda_m(P_{22})$; 3) $\lambda_{M1} := \lambda_M(B_1(t, S_0)) < 0$;

4) $\lambda_{M2} := \lambda_M(B_2(t, S_0)) < 0$; 5) $\lambda_M(K(t, S(t))) < \max\{-\lambda_{M1}, -\lambda_{M2}\} - \varepsilon$,

где $P_{12}(t)$ обозначает χ-периодическую функцию

$$P_{12}(t) = \Phi(t, t_0)(E - \Phi(t_0 + \chi, t_0))^{-1} \int_{t_0}^{t_0+\chi} \Phi(t_0 + \chi, \sigma(\tau))F(\tau, S_0)\Delta\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \sigma(\tau))F(\tau, S_0)\Delta\tau$$

(существование которой обеспечивается условием 1) теоремы 1 согласно лемме 3), то решение $x = 0$ системы (4) асимптотически устойчиво при каждом $S \in \mathbb{S}$.

Доказательство. Покажем, что функция $v(t, x, \theta)$, в которой матрицы P_{11}, P_{22} и $P_{12}(t)$ выбраны в соответствии с условиями теоремы, удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2 [7], обеспечивающим асимптотическую устойчивость решения $x = 0$ исследуемой системы.

Условие 2) теоремы 1 гарантирует положительную определенность функции $v(t, x, \theta)$ при произвольным образом выбранных $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}_+$. Действительно, справедлива оценка

$$v(t, x, \theta) = \theta_1^2 x_1^T P_{11} x_1 + 2\theta_1\theta_2 x_1^T P_{12}(t) x_2 + \theta_2^2 x_2^T P_{22} x_2 \geq \theta_1^2 \|x_1\|^2 \lambda_m(P_{11}) -$$

$$-2\theta_1\theta_2 \|x_1\| \|x_2\| \|P_{12}(t)\| + \theta_2^2 \|x_2\|^2 \lambda_m(P_{22}).$$

В силу условия 2) теоремы 1: $-\|P_{12}(t)\| \geq -\sqrt{\dfrac{\lambda_m(P_{11})\lambda_m(P_{22}) - \delta}{2}}$, поэтому

$$v(t, x, \theta) \geq \theta_1^2 \|x_1\|^2 \lambda_m(P_{11}) - \theta_1\theta_2 \|x_1\| \|x_2\| \sqrt{2(\lambda_m(P_{11})\lambda_m(P_{22}) - \delta)} + \theta_2^2 \|x_2\|^2 \lambda_m(P_{22}).$$

Главные миноры матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \theta_1^2 \lambda_m(P_{11}) & -\theta_1\theta_2 \sqrt{\dfrac{\lambda_m(P_{11})\lambda_m(P_{22}) - \delta}{2}} \\ -\theta_1\theta_2 \sqrt{\dfrac{\lambda_m(P_{11})\lambda_m(P_{22}) - \delta}{2}} & \theta_2^2 \lambda_m(P_{22}) \end{pmatrix}$$

квадратичной формы в правой части являются положительными вследствие положительной определенности матрицы P_{11}. Поэтому M – положительно-определенная матрица по критерию Сильвестра [3]. Таким образом, $v(t,x,\theta)$ допускает оценку снизу положи-тельно-определенной функцией, зависящей только от x и θ, т.е. является положи-тельно-определенной функцией.

Вычислим Δ-производную функции $v(t,x,\theta)$ в силу системы (4). Воспользовавшись формулой, согласно которой для любых Δ-дифференцируемых функций f и g имеет место равенство $(fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$, на основании введенных перед формулировкой теоремы обозначений, получим следующее выражение:

$$v^\Delta(t, x, \theta)|_{(4)} = x_1^T B_1(t, S(t)) x_1 + x_2^T B_2(t, S(t)) x_2 + x_1^T (C(t, S(t)) + D(t, S(t))) x_2,$$

которое перепишем так:

$$v^\Delta(t, x, \theta)|_{(4)} = x_1^T B_1(t, S_0) x_1 + x_2^T B_2(t, S_0) x_2 + x_1^T C(t, S_0) x_2 + x_1^T (B_1(t, S(t)) - B_1(t, S_0)) x_1 +$$

$$+ x_2^T (B_2(t, S(t)) - B_2(t, S_0)) x_2 + x_1^T (C(t, S(t)) + D(t, S(t)) - C(t, S_0)) x_2.$$

Исходя из выражений для функций $C(t, S(t))$ и $F(t, S(t))$ и используя лемму 3, видим, что функция $P_{12}(t)$ является χ-периодическим решением динамического уравнения $C(t, S_0) = 0$, вследствие чего Δ-производная функции $v(t, x, \theta)$ в силу системы (4) примет вид

$$v^\Delta(t, x, \theta)|_{(4)} = x_1^T B_1(t, S_0) x_1 + x_2^T B_2(t, S_0) x_2 + x_1^T (B_1(t, S(t)) - B_1(t, S_0)) x_1 +$$

$$+ x_2^T (B_2(t, S(t)) - B_2(t, S_0)) x_2 + x_1^T (C(t, S(t)) + D(t, S(t))) x_2.$$

Учитывая условия 3) – 5) теоремы 1, оценим сверху выражение в правой части полученного выражения. Тогда имеем

$$v^{\Delta}(t, x, \theta)|_{(4)} \le x_1^T B_1(t, S_0)x_1 + x_2^T B_2(t, S_0)x_2 + | x_1^T (B_1(t, S(t)) - B_1(t, S_0))x_1 | +$$

$$+ | x_2^T (B_2(t, S(t)) - B_2(t, S_0))x_2 | + | x_1^T (C(t, S(t)) + D(t, S(t)))x_2 | \le \lambda_{M1} \|x_1\|^2 +$$

$$+ \lambda_{M2} \|x_2\|^2 + \|B_1(t, S(t)) - B_1(t, S_0)\| \|x_1\|^2 + \|B_2(t, S(t)) - B_2(t, S_0)\| \|x_2\|^2 +$$

$$+ \|C(t, S(t)) + D(t, S(t))\| \|x_1\| \|x_2\| \le \lambda_{M1} \|x_1\|^2 + \lambda_{M2} \|x_2\|^2 + \lambda_M (K(t, S(t))) \|x\|^2 <$$

$$< \lambda_{M1} \|x_1\|^2 + \lambda_{M2} \|x_2\|^2 + (\max\{-\lambda_{M1}, -\lambda_{M2}\} - \varepsilon)(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) =$$

$$= (\lambda_{M1} + \max\{-\lambda_{M1}, -\lambda_{M2}\}) \|x_1\|^2 + +(\lambda_{M2} + \max\{-\lambda_{M1}, -\lambda_{M2}\}) \|x_2\|^2 - \varepsilon \|x\|^2 \le -\varepsilon \|x\|^2 .$$

Таким образом, функция $v(t, x, \theta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2 [7] относительно асимптотической устойчивости для каждого $S \in \mathbb{S}$. Поэтому решение $x = 0$ системы (4) асимптотически устойчиво при всех $S \in \mathbb{S}$. Теорема доказана.

Положив в условии теоремы 1 $T = \mathbb{R}$ и $T = \mathbb{Z}$, легко получить достаточные условия устойчивости линейных систем дифференциальных и, соответственно, систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами при всех $S \in \mathbb{S}$. В первом случае функция зернистости $\mu(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, экспоненциальная функция $e_A(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, а оператор $\Phi(t, t_0)$ действует по правилу $\Phi(t, t_0)X = e^{-A_{11}^T (t-t_0)} X e^{-A_{22}(t-t_0)}$ и поэтому зависит только от разности $t - t_0$, т.е. $\Phi(t, t_0) = \ = \Phi_1(t - t_0)$. Во втором случае $\mu(t) = 1$ при всех $t \in \mathbb{Z}$, $e_A(t, t_0) = (I + A)^{t-t_0}$ и $\Phi(t, t_0)X = (I + A_{11}^T)^{t_0 - t} X (I + A_{22})^{t_0 - t} = \Phi_2(t - t_0)X$, причем запись $(I + A)^r$ при отрица-тельном показателе, являющемся целым, означает r-ую степень матрицы $(I + A)^{-1}$, обратной к $I + A$. Таким образом, имеют место такие следствия.

Следствие 1. Если существует значение S_0 структурной матрицы $S(t)$ из структурного множества $\mathbb{S}$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

а также положительно определенные матрицы $P_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ и действительные числа $\theta_1, \theta_2, \delta, \varepsilon > 0$ такие, что при всех $t_0 \in \mathbb{R}$, $t \ge t_0$ и $S \in \mathbb{S}$ выполняются неравенства:

1) $\alpha_j + \beta_k \ne \dfrac{2\pi l i}{\chi}$ при всех $l \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \in \sigma(A_{11})$, $\beta_k \in \sigma(A_{22})$;

2) $2\|P_{12}(t)\|^2 + \delta \le \lambda_m(P_{11}) \lambda_m(P_{22})$; 3) $\lambda_{M1} := \lambda_M (B_1(t, S_0)) < 0$;

4) $\lambda_{M2} := \lambda_M (B_2(t, S_0)) < 0$; 5) $\lambda_M (K(t, S(t))) < \max\{-\lambda_{M1}, -\lambda_{M2}\} - \varepsilon$,

где введем обозначения

$$P_{12}(t) = \Phi_1(t - t_0)(E - \Phi_1(\chi))^{-1} \int_0^{\chi} e^{-A_{11}^T (\chi - \tau)} F(\tau + t_0, S_0) e^{-A_{22}(\chi - \tau)} d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{-A_{11}^T (t-\tau)} F(\tau, S_0) e^{-A_{22}(t-\tau)} d\tau;$$

$$B_1(t,S(t)) = \theta_1^2(A_{11}^T P_{11} + P_{11}A_{11}) + 2\theta_1\theta_2 P_{12}(t)S_2(t)h_2(t);$$

$$B_2(t,S(t)) = 2\theta_1\theta_2 h_1^T(t)S_1^T(t)P_{12}(t) + \theta_2^2(A_{22}^T P_{22} + P_{22}A_{22});$$

$$C(t,S(t)) = \theta_1^2(P_{11} + P_{11}^T)(S_1(t) - S_{10})h_1(t) + \theta_2^2 h_2^T(t)(S_2(t) - S_{20})^T(P_{22} + P_{22}^T);$$

$$F(t,S(t)) = -\frac{\theta_1}{2\theta_2}(P_{11} + P_{11}^T)S_1(t)h_1(t) - \frac{\theta_2}{2\theta_1}h_2^T(t)S_2^T(t)(P_{22} + P_{22}^T);$$

$$K(t,S(t)) = \begin{pmatrix} 2\theta_1\theta_2\left\|P_{12}(t)(S_2(t) - S_{20})h_2(t)\right\| & \frac{1}{2}\left\|C(t,S(t))\right\| \\ \frac{1}{2}\left\|C(t,S(t))\right\| & 2\theta_1\theta_2\left\|h_1^T(t)(S_1(t) - S_{10})^T P_{12}(t)\right\| \end{pmatrix}.$$

Тогда решение $x = 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x + S(t)h(t)x,\ S(t) \in \mathbb{S},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

асимптотически устойчиво при всех $S \in \mathbb{S}$.

Следствие 2. Если существует значение S_0 структурной матрицы $S(t)$ из структурного множества $\mathbb{S}$ системы разностных уравнений

$$\Delta x(t) = A(t)x,$$

а также положительно определенные матрицы $P_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ и действительные числа $\theta_1, \theta_2, \delta, \varepsilon > 0$ такие, что при всех $t_0 \in \mathbb{Z}$, $t \geq t_0$ и $S \in \mathbb{S}$ выполняются неравенства:

1) $\left(\dfrac{1+\alpha_j\beta_k}{1+\alpha_j+\beta_k+\alpha_j\beta_k}\right)^{\chi} \neq 1$, при всех $\alpha_j \in \sigma(A_{11})$, $\beta_k \in \sigma(A_{22})$;

2) $2\left\|P_{12}(t)\right\|^2 + \delta \leq \lambda_m(P_{11})\lambda_m(P_{22})$; 3) $\lambda_{M1} := \lambda_M(B_1(t,S_0)) < 0$;

4) $\lambda_{M2} := \lambda_M(B_2(t,S_0)) < 0$; 5) $\lambda_M(K(t,S(t))) < \max\{-\lambda_{M1}, -\lambda_{M2}\} - \varepsilon$,

где принято

$$P_{12}(t) = \Phi_2(t - t_0)(E - \Phi_2(\chi))^{-1}\sum_{\tau=0}^{\chi-1}(I + A_{11}^T)^{\tau-\chi}F(\tau + t_0, S_0)(I + A_{22})^{\tau-\chi} +$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}(I + A_{11}^T)^{\tau-t}F(\tau, S_0)(I + A_{22})^{\tau-t};$$

$$B_1(t,S(t)) = \theta_1^2(A_{11}^T P_{11} + P_{11}A_{11} + A_{11}^T P_{11}A_{11}) + 2\theta_1\theta_2(I + A_{11}^T)P_{12}(t+1)S_2(t)h_2(t) +$$
$$+\theta_2^2 h_2^T(t)S_2^T(t)P_{22}S_2(t)h_2(t);$$

$$B_2(t,S(t)) = \theta_1^2 h_1^T(t)S_1^T(t)P_{11}S_1(t)h_1(t) + 2\theta_1\theta_2 h_1^T(t)S_1^T(t)P_{12}(t+1)(I + A_{22}) +$$

$$+\theta_2^2(A_{22}^T P_{22}+P_{22}A_{22}+A_{22}^T P_{22}A_{22});$$

$$C(t,\,S(t))=\theta_1^2(I+A_{11}^T)(P_{11}+P_{11}^T)(S_1(t)-S_{10})h_1(t)+\theta_2^2 h_2^T(t)(S_2(t)-S_{20})^T(P_{22}+P_{22}^T)(I+A_{22});$$

$$F(t,\,S(t))=-\frac{\theta_1}{2\theta_2}(I+A_{11}^T)(P_{11}+P_{11}^T)S_1(t)h_1(t)-\frac{\theta_2}{2\theta_1}h_2^T(t)S_2^T(t)(P_{22}+P_{22}^T)(I+A_{22});$$

$$D(t,\,S(t))=2\theta_1\theta_2 h_2^T(t)S_2^T(t)P_{12}^T(t+1)S_1(t)h_1(t);$$

$$K(t,\,S(t))=\begin{pmatrix}\|B_1(t,S(t))-B_1(t,S_0)\| & \frac{1}{2}\|C(t,S(t))+D(t,S(t))\|\\ \frac{1}{2}\|C(t,S(t))+D(t,S(t))\| & \|B_2(t,S(t))-B_2(t,S_0)\|\end{pmatrix}.$$

Тогда решение $x=0$ системы

$$\Delta x(t)=A_0x+S(t)h(t)x;\ \ S(t)\in\mathbb{S};\ \ \forall t\in T$$

асимптотически устойчиво при всех $S\in\mathbb{S}$.

3. Пример.

Рассмотрим систему динамических уравнений

$$\begin{cases} x^{\Delta}=\rho_1 x+\alpha A(\omega,t)\,y;\\ y^{\Delta}=\beta A^T(\omega,t)x+\rho_2 y,\end{cases} \tag{7}$$

где $x,\,y\in\mathbb{R}^2$, $t\in T_\gamma=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[k,\,k+\gamma]$, $\gamma\in(0,1)$, $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$, $\omega\in[0,\,2\pi)$,

$$A(\omega,t)=\begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}.$$

В силу 1-периодичности шкалы T_γ и $\tau=2\pi/\omega$-периодичности функции $A(\omega,t)$ полагаем, что существуют $p,q\in\mathbb{N}$ ($(p,q)=1$) такие, что $\tau=2\pi/\omega=p/q$, т.е. $\chi=\tau q=p$.

Пример (7) в частном случае, когда шкала совпадает з множеством целых чисел, рассмотрен в работе [12].

Параметры α и β, отвечающие за структурные возмущения, принимают значения из множеств $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ и $\{\beta_1,\beta_2\}$, соответственно. Так как матрицы $\alpha_1A(\omega,t)$ и $\alpha_2A(\omega,t)$ отличаются только скалярным множителем, то вместо произведений $S_1(t)h_1(t)$ будем писать $S_1(t)h_1A(\omega,t)$, где $S_1(t)=(s_{11},s_{12})$, $h_1=(\alpha_1,\alpha_2)^T$. Аналогично, вместо $S_2(t)h_2(t)$ будем писать $S_2(t)h_2A^T(\omega,t)$, где $S_2(t)=(s_{21},s_{22})$, $h_1=(\beta_1,\beta_2)^T$. Структурный параметр $s_{ij}:T\to\{0,1\}$ – $(i,\,j)$-й элемент структурной матрицы $S(t)$ системы (7), который является таким, что из соотношения $s_{ij}=1$ следует, что $s_{ik}=0$ при всех $k\neq j$ и $s_{kj}=1$ при всех k.

При помощи теоремы 1 вычислим условия асимптотической устойчивости решения $x=0$, $y=0$ системы (7) при всех $S\in\mathbb{S}$. Для этого определим выражения для функций $P_{12}(t)$, $B_1(t,S(t))$, $B_2(t,S(t))$, $C(t,S(t))$, $F(t,S(t))$, $D(t,S(t))$, полагая, что

$\theta_1=\theta_2=1$, $P_{11}=I$, $P_{22}=I$ и $S_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Поскольку $A_{11}=\rho_1 I$ и $A_{22}=\rho_2 I$, то $e_{A_{11}}(t,t_0)=e_{\rho_1}(t,t_0)I$, $e_{A_{22}}(t,t_0)=e_{\rho_2}(t,t_0)I$ и тогда $\Phi(t,t_0)=e_{\kappa(\rho_1\oplus\rho_2)}(t,t_0)I$. Пусть $t_0=0$ и $t\neq k+\gamma$, тогда

$$e_{\kappa(\rho_1\oplus\rho_2)}(t,0)=e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}\lambda^{[t]},$$

где принято

$$\lambda=\frac{e^{-(\rho_1+\rho_2)\gamma}}{(1+(1-\gamma)\rho_1)(1+(1-\gamma)\rho_2)}. \tag{8}$$

Полученное выражение для $e_{\kappa(\rho_1\oplus\rho_2)}(t,0)$ верно и в случае $t=k+\gamma$, в чем легко убедиться непосредственно. Далее имеем

$$F(t,S(t))=(-S_1(t)h_1(1+\mu(t)\rho_1)-S_2(t)h_2(1+\mu(t)\rho_2))A(\omega,t). \tag{9}$$

Используя (8) и (9), находим

$$\int_0^t \Phi(t,\sigma(\tau))F(\tau,S_0)\Delta\tau=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)&\varphi_2(t)\\-\varphi_2(t)&\varphi_1(t)\end{pmatrix}=:\Omega(t),$$

где $\varphi_1(t)$ определяется по формуле

$$\varphi_1(t)=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{\sqrt{\omega^2+(\rho_1+\rho_2)^2}}(\cos(\omega t-\varphi)+e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}(g_1(\lambda,[t],\varphi)+\lambda^{[t]}f_1(\lambda))), \tag{10}$$

в которой

$$f_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2-2\lambda\cos\omega+1}(e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}(\lambda^2\cos(\omega\gamma-\varphi)-\lambda\cos((\gamma-1)\omega-\varphi))-$$
$$-(\lambda^2\cos\varphi-\lambda\cos(\omega+\varphi))+\delta(\gamma)e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}(\lambda^2\cos\omega\gamma-\lambda\cos(\gamma-1)\omega));$$

$$g_1(\lambda,[t],\varphi)=\frac{1}{\lambda^2-2\lambda\cos\omega+1}(-\cos(\omega[t]-\varphi)+\lambda e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}\cos(\omega([t]-1+\gamma)-\varphi)+$$
$$+\delta(\gamma)\lambda e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}\cos\omega([t]-1+\gamma)+\lambda(\cos(\omega([t]+1)-\varphi)-$$
$$-\lambda e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}\cos(\omega([t]+\gamma)-\varphi)-\delta(\gamma)\lambda e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}\cos\omega([t]+\gamma)));$$

$$\delta(\gamma)=\frac{(1-\gamma)(\alpha_1(1+(1-\gamma)\rho_1)+\beta_1(1+(1-\gamma)\rho_2)}{\alpha_1+\beta_1};$$

φ обозначает вспомогательный угол, для которого

$$\cos\varphi=\frac{\rho_1+\rho_2}{\sqrt{\omega^2+(\rho_1+\rho_2)^2}};\quad \sin\varphi==\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+(\rho_1+\rho_2)^2}}.$$

Аналогично $\varphi_2(t)$ находится по формуле

$$\varphi_2(t)=-\frac{\alpha_1+\beta_1}{\sqrt{\omega^2+(\rho_1+\rho_2)^2}}(\sin(\omega t-\varphi)+e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}(g_2(\lambda,[t],\varphi)+\lambda^{[t]}f_2(\lambda))), \tag{11}$$

в которой

$$f_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\omega + 1}(e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}(\lambda^2 \sin(\omega\gamma - \varphi) - \lambda\sin((\gamma-1)\omega - \varphi)) -$$

$$-(\lambda^2 \sin\varphi - \lambda\sin(\omega + \varphi)) + \delta(\gamma)e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}(\lambda^2 \sin\omega\gamma - \lambda\sin(\gamma-1)\omega));$$

$$g_2(\lambda, [t], \varphi) = \frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\omega + 1}(-\sin(\omega[t] - \varphi) + \lambda e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}\sin(\omega([t]-1+\gamma) - \varphi) +$$

$$+\delta(\gamma)\lambda e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}\sin\omega([t]-1+\gamma) + \lambda(\sin(\omega([t]+1) - \varphi) - \lambda e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}\sin(\omega([t]+\gamma) - \varphi) -$$

$$-\delta(\gamma)\lambda e^{(\rho_1+\rho_2)\gamma}\sin\omega([t]+\gamma))).$$

Из (8), (10) и (11) имеем

$$P_{12}(t) = \frac{e_{\kappa(\rho_1\oplus\rho_2)}(t, 0)}{1 - e_{\kappa(\rho_1\oplus\rho_2)}(p, 0)}\Omega(p) + \Omega(t) = \frac{e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}\lambda^{[t]}}{1-\lambda^p}\Omega(p) + \Omega(t) =: \begin{pmatrix} p_{12}^{(1)}(t) & p_{12}^{(2)}(t) \\ -p_{12}^{(2)}(t) & p_{12}^{(1)}(t) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} p_{12}^{(1)}(t) &= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\sqrt{\omega^2 + (\rho_1+\rho_2)^2}}(\cos(\omega t - \varphi) + e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}g_1(\lambda, [t], \varphi)); \\ p_{12}^{(2)}(t) &= -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\sqrt{\omega^2 + (\rho_1+\rho_2)^2}}(\sin(\omega t - \varphi) + e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}g_2(\lambda, [t], \varphi)). \end{aligned} \tag{12}$$

При помощи формул (12) вычислим элементы матриц $B_1(t, S(t))$, $B_2(t, S(t))$, $C(t, S(t))$, $D(t, S(t))$. Введем обозначения:

$$r_1 = -\frac{(\alpha_1 + \beta_1)}{\sqrt{\omega^2 + (\rho_1+\rho_2)^2}}(\cos\varphi + e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}g_1(\lambda, -\{t\}, \varphi));$$

$$r_2 = -\frac{(\alpha_1 + \beta_1)}{\sqrt{\omega^2 + (\rho_1+\rho_2)^2}}(-\sin\varphi + e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}g_2(\lambda, -\{t\}, \varphi)),$$

через которые указанные элементы определятся следующим образом:

$$b_{11}^{(1)} = b_{22}^{(1)} = 2\rho_1 + \mu(t)\rho_1^2 + \mu(t)\beta^2 - 2\mu(t)\beta_1\beta - \frac{2\alpha_1\beta\mu(t)(1+\mu(t)\rho_1)}{(1+\mu(t)\rho_2)} + \frac{2\beta r_1}{1+\mu(t)\rho_2};$$

$$b_{12}^{(1)} = -b_{21}^{(1)} = r_2;$$

$$b_{11}^{(2)} = b_{22}^{(2)} = 2\rho_2 + \mu(t)\rho_2^2 + \mu(t)\alpha^2 - 2\mu(t)\alpha_1\alpha - \frac{2\alpha\beta_1\mu(t)(1+\mu(t)\rho_2)}{(1+\mu(t)\rho_1)} + \frac{2\alpha r_1}{1+\mu(t)\rho_1};$$

$$b_{12}^{(2)} = -b_{21}^{(2)} = r_2;$$

$$c_{11} = c_{22} = 2((\alpha - \alpha_1)(1+\mu(t)\rho_1) + (\beta - \beta_1)(1+\mu(t)\rho_2))\cos\omega t;$$

$$c_{12} = -c_{21} = 2((\alpha - \alpha_1)(1+\mu(t)\rho_1) + (\beta - \beta_1)(1+\mu(t)\rho_2))\sin\omega t;$$

$$d_{11}=d_{22}=-\frac{2\mu(t)\alpha\beta(\alpha_1+\beta_1)}{(1+\mu(t)\rho_1)(1+\mu(t)\rho_2)\sqrt{\omega^2+(\rho_1+\rho_2)^2}}(\cos(3\omega t-\varphi)+$$

$$+e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}g_1(\lambda,[t]+2t,\varphi))+\left(\frac{-\alpha_1\mu(t)}{1+\mu(t)\rho_2}+\frac{-\beta_1\mu(t)}{1+\mu(t)\rho_1}\right)\cos 3\omega t;$$

$$d_{12}=-d_{21}=-\frac{2\mu(t)\alpha\beta(\alpha_1+\beta_1)}{(1+\mu(t)\rho_1)(1+\mu(t)\rho_2)\sqrt{\omega^2+(\rho_1+\rho_2)^2}}(\sin(3\omega t-\varphi)+$$

$$+e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}g_2\left(\lambda,[t]+2t,\varphi))+\frac{-\alpha_1\mu(t)}{1+\mu(t)\rho_2}+\frac{-\beta_1\mu(t)}{1+\mu(t)\rho_1}\right)\sin 3\omega t.$$

Далее определяем $\lambda_{\max}(K(t,S))$

$$\lambda_{\max}(K(t,S))=\frac{1}{2}(k_1+k_2+\sqrt{(k_1-k_2)^2+2((d_{11}+c_{11})^2+(d_{12}+c_{12})^2)}),$$

где

$$k_1=\sqrt{2}\left|(\beta-\beta_1)\left(\frac{2r_1}{1+\mu(t)\rho_2}+\mu(t)(\beta-\beta_1)-\frac{2\alpha_1\mu(t)(1+\mu(t)\rho_1)}{1+\mu(t)\rho_2}\right)\right|;$$

$$k_2=\sqrt{2}\left|(\alpha-\alpha_1)\left(\frac{2r_1}{1+\mu(t)\rho_1}+\mu(t)(\alpha-\alpha_1)-\frac{2\beta_1\mu(t)(1+\mu(t)\rho_2)}{1+\mu(t)\rho_1}\right)\right|.$$

Таким образом, условиями асимптотической устойчивости решения $x=0$, $y=0$ системы (7) при всех $S\in\mathbb{S}$, является, согласно теореме 1, выполнение при всех $t\ge 0$, $\alpha\in\{\alpha_1,\alpha_2\}$ и $\beta\in\{\beta_1,\beta_2\}$ системы следующих неравенств:

$$\frac{e^{-(\rho_1+\rho_2)\gamma}}{(1+(1-\gamma)\rho_1)(1+(1-\gamma)\rho_2)}\ne 1;$$

$$\frac{4(\alpha_1+\beta_1)^2}{\omega^2+(\rho_1+\rho_2)^2}\left(1+2e^{-(\rho_1+\rho_2)\{t\}}g_1(\lambda,\{t\},0)+e^{-2(\rho_1+\rho_2)\{t\}}(g_1^2(\lambda,[t],\varphi)+g_2^2(\lambda,[t],\varphi))\right)\le 1-\delta;$$

$$b_{11}^{(1)}=2\rho_1+\mu(t)\rho_1^2+\mu(t)\beta^2-2\mu(t)\beta_1\beta-\frac{2\alpha_1\beta\mu(t)(1+\mu(t)\rho_1)}{(1+\mu(t)\rho_2)}+\frac{2\beta r_1}{1+\mu(t)\rho_2}<0;$$

$$b_{11}^{(2)}=2\rho_2+\mu(t)\rho_2^2+\mu(t)\alpha^2-2\mu(t)\alpha_1\alpha-\frac{2\alpha\beta_1\mu(t)(1+\mu(t)\rho_2)}{(1+\mu(t)\rho_1)}+\frac{2\alpha r_1}{1+\mu(t)\rho_1}<0;$$

$$\frac{1}{2}(k_1+k_2+\sqrt{(k_1-k_2)^2+2((d_{11}+c_{11})^2+(d_{12}+c_{12})^2)})<\max\{-b_{11}^{(1)},-b_{11}^{(2)}\}-\varepsilon,$$

где δ и ε – наперед заданные положительные числа, а $\mu(t)=0$ или $1-\gamma$.

Заключение.

Исследована система линейных динамических уравнений с периодическими коэффициентами и структурными возмущениями. Показано, как матричнозначная концепция обобщенного прямого метода Ляпунова может быть использована для получения условий устойчивости крупномасштабных систем линейных динамических уравнений при всех значениях структурной матрицы из структурного множества.

Р Е З Ю М Е . Проведено анализ стійкості за Ляпуновим лінійних систем динамічних рівнянь з періодичними коефіцієнтами і структурними збуреннями на часовій шкалі. На основі матричнозначної концепції прямого методу Ляпунова отримано достатні умови аисмптотичної стійкості динамічних рівнянь з періодичними коефіцієнтами та структурними збуреннями при всіх значеннях структурної матриці зі структурної множини. Як приклад застосування отриманих теоретичних результатів розглянуто систему двох лінійних динамічних рівнянь на часовій шкалі.

1. *Бабенко С.В., Слынько В.И.* Об устойчивости решений динамических уравнений на основе функций разрывного типа // Доп. НАН України. – 2009. – N 9. – С. 7 – 12.
2. *Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных возмущениях. – К.: Наук. думка, 1984. – 308 с.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
4. *Мартынюк А.А., Слынько В.И.* О построении матрично-значной функции Ляпунова для линейной периодической системы на временной шкале // Докл. РАН. – 2007. – **417**, N 1. – С. 18 – 22.
5. *Мартынюк-Черниенко Ю.А.* Об устойчивости динамических систем на временной шкале // Докл. РАН. – 2007. – **413**, № 1. – С. 1 – 5.
6. *Babenko S.V.* The Conditions of Stability of the One Class of Dynamic Equations, Describing Discrete-Uninterrupted Dynamics of Mechanical Systems (Young Scientists Conference on the Occasion of the 90th Anniversary of the National Academy of Sciences of Ukraine and the S.P. Timoshenko Institute of Mechanics. Abstracts of Papers) // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 3 – P. 314.
7. *Bohner M., Martynyuk A.A.* Elements of Lyapunov Stability Theory for Dynamic Equations on Time Scale // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 9 – P. 949 – 970.
8. *Bohner M., Peterson A*. Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. – Boston: Birkhaser, 2001. – 358 p.
9. *Hilger S.* Analysis on measure chains: a unified approach to continuous and discrete calculus // Res. in Mathematics. – 1990. – **18**. – P. 18 – 56.
10. *Luk'yanova T.A.* Stability and Boundedness Conditions for the Motions of Discrete-time Mechanical Systems // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 8 – P. 917 – 921.
11. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S.* On Parametric Asymptotic Stability of Large-Scale Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 5 – P. 565 – 574.
12. *Martynyuk A.A., Slyn'ko V.I.* Stability results for large-scale difference systems via matrix-valued Liapunov functions // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2007. – **7**, N 2 – P. 217 – 224.
13. *Siljak D.D.* Large-scale dynamic systems: stability and structure. – New York: Elseiver North-Holland, Inc., 1978. – 416 p.

Поступила 18.09.2009 Утверждена в печать 21.10.2010