

Г. В. Галатенко

**МОДЕЛЬ ТРЕЩИНЫ ТИПА ДАГДЕЙЛА ПРИ СМЕШАННОЙ МОДЕ  
НАГРУЖЕНИЯ (ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ)**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A model of crack with a plasticity strip on its projection is proposed for the mixed loading by modes I and II. The unknown three stress components in the strip are determined from the plasticity condition, finiteness of stresses, and the established link among the normal stress components through the basic stress state. An analysis is carried out for the crack parameters under von Mises yield condition.

**Key words:** crack, mixed mode loading, stresses in the plastic strip, yield condition

**Введение.**

Модель трещины с тонкой пластической зоной (модель Дагдейла) на ее продолжении была сформулирована [1, 11] для трещины нормального отрыва (мода I) при плоском напряженном состоянии и условии пластичности Треска. Позже автор обобщил эту модель на случай произвольного условия пластичности как для плоского напряженного состояния [2, 3], так и плоской деформации [4] и сравнил параметры модели для условий пластичности Мизеса и Треска. В обобщенном виде эти результаты изложены в [14]. Учет трехосности напряженного состояния в пластической зоне круговой и эллиптической трещин рассмотрен в [5, 6, 13] для различных схем многоосного нагружения на бесконечности. В работе [8] предложен приближенный подход для оценки двумерной пластической зоны у вершины трещины.

Развитие модели трещины Дагдейла на смешанную моду нагружения I+II происходило по двум направлениям. Первый подход предложен в [9], согласно которому пластическая зона расположена на продолжении трещины. При этом принято, что на пластической линии действуют две компоненты напряжений: нормальные напряжения  $\sigma_0$  и касательные  $\tau_0$ . Для их определения использованы два определяющих уравнения: условие пластичности Мизеса и условие ограниченности напряжений. Однако, условие пластичности содержит три неизвестные компоненты напряжений ( $\sigma_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\sigma_x$ ), а условие ограниченности напряжений – две ( $\sigma_0$ ,  $\tau_0$ ). В результате авторы приняли напряжения на пластической линии  $\sigma_x$  равными напряжениям  $\sigma_x^\infty$  на бесконечности, что не совсем корректно. Аналогичный прием использован в работе [18] при анализе раскрытия трещины при смешанной моде нагружения. Второй подход [17] предусматривает расположение пластической зоны под некоторым углом к линии трещины и действие на ней только нормального напряжения  $\sigma_0$ . Сравнительный анализ этих подходов проведен в работе [10].

В настоящей работе предложено развитие модели трещины в первом направлении, но отмеченное выше противоречие устранено за счет дополнительной связи между нормальными напряжениями  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  на пластической линии через основное напряженное состояние. Как следствие, получена система трех уравнений для определения напряжений на пластической полосе для произвольного условия пластичности материала, которая проанализирована для условия пластичности Мизеса.

### §1. Исходные предпосылки.

Для установления отмеченной связи воспользуемся частным случаем решения одной граничной задачи теории упругости для плоскости с прямолинейным разрезом, полученного Н.И. Мусхелишвили [7].

Пусть плоскость  $xOy$  содержит разрез на оси  $Ox$  длиной  $2l$ . На берегах разреза заданы напряжения  $\sigma_y^+, \tau_{xy}^+, \sigma_y^-, \tau_{xy}^-$ , где значки (+) и (-) соответствуют значениям на верхнем и нижнем берегах разреза. Кроме того, на бесконечности действуют главные напряжения  $N_1, N_2$ , причем направление  $N_1$  составляет угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ .

Введя в рассмотрение функцию  $\Omega(z) = \bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z)$ , компоненты напряжений и смещений можно выразить через комплексные потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$ . В частности, имеем равенства

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}); & \sigma_x + i\tau_{xy} &= \Phi(z) + 2\bar{\Phi}(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}); \\ 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(\bar{z}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  – для плоского напряженного состояния;  $\kappa = 3 - 4\nu$  – для плоской деформации;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для сформулированной задачи комплексные потенциалы имеют вид [7]

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{P_1(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^{\nu}; \quad \Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{P_1(z)}{X(z)} + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^{\nu}, \quad (1.2)$$

где приняты такие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)p(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)}{t-z} dt; \\ \Omega_0(z) &= \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)p(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)}{t-z} dt; \\ X(z) &= \sqrt{z^2 - l^2}; \quad P_1(z) = C_0 z + C_1; \quad \bar{\Gamma}^{\nu} = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{2i\alpha}; \\ C_0 &= \Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^{\nu} = \frac{1}{4}[N_1 + N_2 - (N_1 - N_2)e^{2i\alpha}]; \quad C_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_L q(t) dt - \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)}; \\ p(t) &= \frac{1}{2}(\sigma_y^+ + \sigma_y^-) - \frac{i}{2}(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-); \quad q(t) = \frac{1}{2}(\sigma_y^+ - \sigma_y^-) - \frac{i}{2}(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) \end{aligned}$$

$(X, Y)$  – главный вектор нагрузок, приложенных к разрезу.

Рассмотрим частный случай задачи. Пусть на бесконечности напряжения исчезают, а на берегах разреза имеют место равенства  $\sigma_y^+ = \sigma_y^-$ ,  $\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-$ . Тогда потенциалы (1.2) принимают вид  $\Phi(z) = \Phi_0(z)$ ,  $\Omega(z) = \Omega_0(z)$ , причем, в силу  $q(t) = 0$  имеем

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)p(t)}{t-z} dt.$$

Рассмотрим распределение напряжений на продолжении разреза, т.е. на оси  $Ox$ . Из выражений (1.1) следует

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 2\Phi(x); \quad \sigma_x + i\tau_{xy} = 2\overline{\Phi(x)}.$$

Таким образом, на продолжении разреза выполняется равенство  $\sigma_y = \sigma_x$ . Отмеченное свойство будет в дальнейшем использовано для построения соотношений между напряжениями на пластическом отрезке при смешанной моде нагружения.

## §2. Постановка задачи.

Пусть плоскость с центральной трещиной-разрезом  $2l$  подвержена на бесконечности растягивающим напряжениям  $N_1 = p$ , образующим угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ .  $\alpha$  Материал предполагается идеально упругопластическим с условием пластичности общего вида

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0. \quad (2.1)$$

Под действием нагрузки вблизи вершин трещины образуется пластическая область, которая моделируется линией на ее продолжении. Поскольку в этой окрестности реализуется сложное напряженное состояние, то на пластической линии действуют напряжения  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ , удовлетворяющие условию пластичности (2.1) (рис. 1, а). Если эти напряжения известны, то пластические линии заменяются разрезами, к берегам которых прикладываются нормальные и касательные напряжения  $\sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  (рис. 1, б).

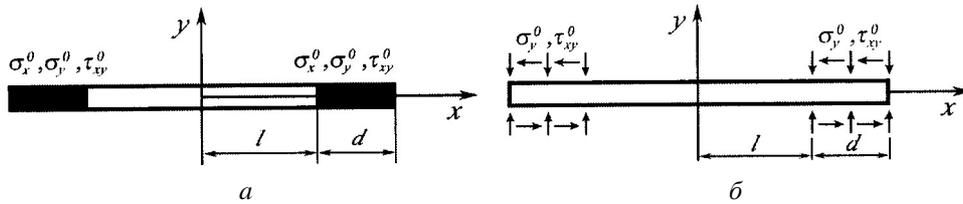


Рис. 1

Таким образом, исходная задача приводится к граничной задаче теории упругости для удлиненной трещины  $2L = 2(l + d)$  при заданных на ее берегах нормальных и касательных напряжениях и при условии ограниченности напряжений в точках  $x = \pm L$ .

В данной постановке напряжения на пластической линии неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи в целом. Особенностью всех трех компонент напряжений является их одновременное удовлетворение условию пластичности (2.1) и уравнениям теории упругости. Кроме того, в силу ограниченности напряжений, в точках  $x = \pm L$  выполняется также их непрерывность. Отмеченные обстоятельства позволяют установить дополнительную связь между напряжениями на пластических линиях.

На этих линиях имеем такие условия:

$$y = 0; \quad l \leq |x| \leq L: \quad \sigma_y = \sigma_y^0; \quad \sigma_x = \sigma_x^0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0$$

или через комплексные потенциалы (1.1) –

$$\Phi(x) + \Omega(x) = \sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0; \quad \Phi(x) + 2\overline{\Phi(x)} - \Omega(x) = \sigma_x^0 + i\tau_{xy}^0. \quad (2.2)$$

Представим неизвестные потенциалы в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z); \quad \Omega(z) = \Omega_1(z) + \Omega_2(z),$$

где  $\Phi_1(z), \Omega_1(z)$  характеризуют основное напряженное состояние (напряженное состояние плоскости без трещины);  $\Phi_2(z), \Omega_2(z)$  – неизвестные функции, исчезающие на бесконечности и ограниченные в вершинах  $x = \pm L$ . Тогда равенства (2.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Phi_2(x) + \Omega_2(x) &= \sigma_y^0 - \sigma_y^\infty - i(\tau_{xy}^0 - \tau_{xy}^\infty); \\ \Phi_2(x) + 2\overline{\Phi_2(x)} - \Omega_2(x) &= \sigma_x^0 - \sigma_x^\infty + i(\tau_{xy}^0 - \tau_{xy}^\infty); \end{aligned} \quad y=0; \quad l \leq |x| \leq L. \quad (2.3)$$

Здесь  $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$  – значения компонент напряжений для плоскости без трещины, связанные с главным напряжением  $N_1 = p$  соотношениями

$$\sigma_x^\infty = p \cos^2 \alpha; \quad \sigma_y^\infty = p \sin^2 \alpha; \quad \tau_{xy}^\infty = \frac{p}{2} \sin 2\alpha.$$

Кроме того, для основного напряженного состояния имеем

$$\Phi_1(x) + \Omega_1(x) = \sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty; \quad \Phi_1(x) + 2\overline{\Phi_1(x)} - \Omega_1(x) = \sigma_x^\infty + i\tau_{xy}^\infty.$$

Как было показано в §1, для задачи (2.3) при  $y=0$ ,  $|x| > L$  имеет место  $\Phi_2(x) = \Omega_2(x)$  и, значит, следует равенство  $\sigma_x = \sigma_y$ . Но при  $x = \pm L$  напряжения ограничены и непрерывны. Следовательно, на пластической линии следует принять

$$\sigma_x^0 - \sigma_x^\infty = \sigma_y^0 - \sigma_y^\infty. \quad (2.4)$$

Полученное выражение (2.4) можно записать и в таком виде;

$$\sigma_x^0 - \sigma_y^0 = p \cos 2\alpha. \quad (2.5)$$

Условия пластичности (2.1) и соотношения (2.4) или (2.5) недостаточно для определения напряжений на пластической линии. Недостающее третье уравнение получим из условия ограниченности напряжений.

### §3. Решение граничной задачи.

Исходя из вышеизложенного, примем, что напряжения на пластической линии известны. Тогда для решения граничной задачи (рис. 1, б) можно воспользоваться формулами (1.2) при  $N_2 = 0$ ;  $q(t) = 0$ ;  $p(t) = \sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0$ . Выполнив необходимое интегрирование, получим равенства

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0)z}{\pi\sqrt{z^2 - L^2}} \arccos \frac{l}{L} - \frac{\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0}{2\pi i} \ln \frac{\left[ L^2 + zl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - z^2)} \right] (l - z)}{\left[ L^2 - zl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - z^2)} \right] (l + z)} + \\ &\quad + \frac{p(1 - e^{2i\alpha})z}{4\sqrt{z^2 - L^2}} + \frac{p}{4} e^{2i\alpha}; \\ \Omega(z) &= -\frac{(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0)z}{\pi\sqrt{z^2 - L^2}} \arccos \frac{l}{L} - \frac{\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0}{2\pi i} \ln \frac{\left[ L^2 + zl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - z^2)} \right] (l - z)}{\left[ L^2 - zl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - z^2)} \right] (l + z)} + \\ &\quad + \frac{p(1 - e^{2i\alpha})z}{4\sqrt{z^2 - L^2}} - \frac{p}{4} e^{2i\alpha}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Условие ограниченности напряжений при  $z = \pm L$  имеет такой вид:

$$\frac{\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0}{\pi} \arccos \frac{l}{L} = \frac{p(1 - e^{2i\alpha})}{4}$$

или, разделив действительные и мнимые части, получим

$$\frac{\sigma_y^0}{\pi} \arccos \frac{l}{L} = \frac{p}{2} \sin^2 \alpha; \quad \frac{\tau_{xy}^0}{\pi} \arccos \frac{l}{L} = \frac{p}{2} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.7)$$

Из соотношений (2.7) следует недостающая связь между напряжениями  $\sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ :

$$\tau_{xy}^0 = \sigma_y^0 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Таким образом, для определения напряжений на пластической линии имеем замкнутую систему уравнений

$$F(\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0) = 0; \quad \sigma_x^0 - \sigma_y^0 = p \cos 2\alpha; \quad \tau_{xy}^0 = \sigma_y^0 \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2.8)$$

При условиях (2.7) комплексные потенциалы (2.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0}{2\pi i} \ln \frac{\left[ L^2 + zl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - z^2)} \right] (l-z)}{\left[ L^2 - zl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - z^2)} \right] (l+z)} + \frac{p}{4} e^{2i\alpha}; \\ \Omega(z) &= -\frac{\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0}{2\pi i} \ln \frac{\left[ L^2 + zl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - z^2)} \right] (l-z)}{\left[ L^2 - zl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - z^2)} \right] (l+z)} - \frac{p}{4} e^{2i\alpha}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь корень  $\sqrt{L^2 - z^2}$  является положительным на верхнем берегу разреза  $(-L, L)$  вдоль оси  $x$ ; кроме того,  $\ln f = \ln|f| + i \arg f$ ,  $-\pi < \arg f < \pi$ .

Для определения смещений на пластической линии запишем третью формулу (1.1) в виде

$$2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = (\kappa + 1)\Phi(z) - \left( \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) \right) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}. \quad (2.10)$$

Учитывая, что на пластической линии, согласно первой формулы (1.1), имеет место  $\Phi^+(x) + \Omega^-(x) = \sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0$ , то равенство (10) принимает вид

$$2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = (\kappa + 1)\Phi^+(x) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0), \quad l \leq |x| \leq L.$$

Аналогично получим на берегах трещины:

$$2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = (\kappa + 1)\Phi^+(x), \quad |x| < l.$$

Разделив действительные и мнимые части, приходим к формулам:

$$1) \quad y = 0, \quad l \leq |x| \leq L$$

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = (\kappa + 1) \left[ \frac{\tau_{xy}^0}{2\pi} \ln \frac{\left[ L^2 + xl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - x^2)} \right] (l-x)}{\left[ L^2 - xl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - x^2)} \right] (l+x)} + \frac{\sigma_y^0}{2} + \frac{p}{4} \cos 2\alpha \right] - \sigma_y^0;$$

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial x} = (\kappa + 1) \left[ \frac{\sigma_y^0}{2\pi} \ln \frac{\left[ L^2 + xl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - x^2)} \right] (l-x)}{\left[ L^2 - xl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - x^2)} \right] (l+x)} - \frac{\tau_{xy}^0}{2} + \frac{p}{4} \sin 2\alpha \right] + \tau_{xy}^0;$$

$$2) \quad y = 0, \quad |x| < l$$

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = (\kappa+1) \left[ \frac{\tau_{xy}^0}{2\pi} \ln \left| \frac{\left[ L^2 + xl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - x^2)} \right] (l-x)}{\left[ L^2 - xl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - x^2)} \right] (l+x)} \right| + \frac{p}{4} \cos 2\alpha \right];$$

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial x} = (\kappa+1) \left[ \frac{\sigma_y^0}{2\pi} \ln \left| \frac{\left[ L^2 + xl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - x^2)} \right] (l-x)}{\left[ L^2 - xl + \sqrt{(L^2 - l^2)(L^2 - x^2)} \right] (l+x)} \right| + \frac{p}{4} \sin 2\alpha \right].$$

После интегрирования окончательно получим

$$u^\pm(x) = \pm \frac{(\kappa+1)\tau_{xy}^0}{4\pi\mu} \left\{ x \ln \left| \frac{l\sqrt{L^2 - x^2} - x\sqrt{L^2 - l^2}}{l\sqrt{L^2 - x^2} + x\sqrt{L^2 - l^2}} \right| - l \ln \left| \frac{\sqrt{L^2 - x^2} - \sqrt{L^2 - l^2}}{\sqrt{L^2 - x^2} + \sqrt{L^2 - l^2}} \right| \right\} +$$

$$+ \frac{(\kappa+1)p \cos 2\alpha}{8\mu} x + \frac{(\kappa-1)\sigma_y^0}{4\mu} \cdot \begin{cases} (x+l), & -L < x \leq l; \\ 0, & -l < x < l; \\ (x-l), & l \leq x < L; \end{cases} \quad (2.11)$$

$$v^\pm(x) = \pm \frac{(\kappa+1)\sigma_y^0}{4\pi\mu} \left\{ x \ln \left| \frac{l\sqrt{L^2 - x^2} - x\sqrt{L^2 - l^2}}{l\sqrt{L^2 - x^2} + x\sqrt{L^2 - l^2}} \right| - l \ln \left| \frac{\sqrt{L^2 - x^2} - \sqrt{L^2 - l^2}}{\sqrt{L^2 - x^2} + \sqrt{L^2 - l^2}} \right| \right\} +$$

$$+ \frac{(\kappa+1)p \sin 2\alpha}{8\mu} x - \frac{(\kappa-1)\tau_{xy}^0}{4\mu} \cdot \begin{cases} (x+l), & -L < x \leq l; \\ 0, & -l < x < l; \\ (x-l), & l \leq x < L. \end{cases}$$

Выражения (2.11) отличаются от результатов работы [9] только значениями напряжений  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$ , которые определяются из решения системы (2.8). Раскрытия в вершинах трещины имеют вид

$$\delta_I(l) = v^+(l) - v^-(l) = \frac{8\sigma_y^0}{\pi E} l \ln \sec \frac{\pi p \sin^2 \alpha}{2\sigma_y^0};$$

$$\delta_{II}(l) = u^+(l) - u^-(l) = \frac{8\tau_{xy}^0}{\pi E} l \ln \sec \frac{\pi p \sin 2\alpha}{4\tau_{xy}^0}. \quad (2.12)$$

В частности, при  $\alpha = 0$  имеем  $\delta_I(l) = \delta_{II}(l) = 0$ , а при  $\alpha = \pi/4$  раскрытия будут равными между собой. В случае нормального отрыва ( $\alpha = \pi/2$ ) получаем  $\delta_{II}(l) = 0$ .

#### §4. Численный анализ для условия пластичности Мизеса.

Пусть материал удовлетворяет условию пластичности Мизеса  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_T^2$ . Тогда решение системы (2.8) приводит к следующим выражениям для напряжений на пластической линии:

$$\sigma_y^0 = \frac{1}{1+3\text{ctg}^2 \alpha} \left( -\frac{p \cos 2\alpha}{2} + \sqrt{\sigma_T^2 - 0,75p^2 \cos^2 2\alpha - 3(p^2 \cos^2 2\alpha - \sigma_T^2) \text{ctg}^2 \alpha} \right);$$

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 + p \cos 2\alpha; \quad \tau_{xy}^0 = \sigma_y^0 \text{ctg} \alpha. \quad (2.13)$$

В частности, при нормальном отрыве ( $\alpha = \pi/2$ ) приходим к выражениям  $\sigma_y^0 = 0,5p + \sqrt{\sigma_T^2 - 0,75p^2}$ ,  $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 - p$ , полученным в работе [2].

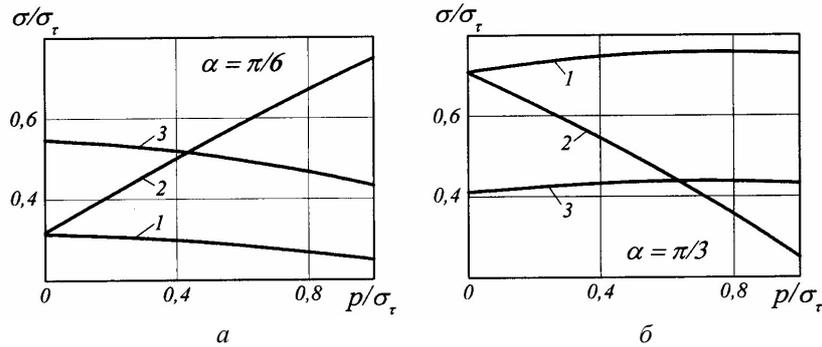


Рис. 2

При  $\alpha = \pi/4$  все три компоненты напряжений равны  $0,5\sigma_T$  и не зависят от уровня внешней нагрузки. На рис. 2, а, б показана зависимость безразмерных напряжений  $\sigma_y^0/\sigma_T$ ,  $\sigma_x^0/\sigma_T$ ,  $\tau_{xy}^0/\sigma_T$  (соответственно, кривые 1, 2, 3) от внешней нагрузки для углов  $\alpha = \pi/6, \pi/3$ . Когда  $\alpha = \pi/6$ , напряжения  $\sigma_y^0$  – меньше остальных, а при  $\alpha = \pi/3$  – больше. Для указанных углов на рис. 3 приведена зависимость размера пластической зоны от нагрузки. Здесь же для сравнения приведена кривая в случае трещины нормального отрыва ( $\alpha = \pi/2$ ).

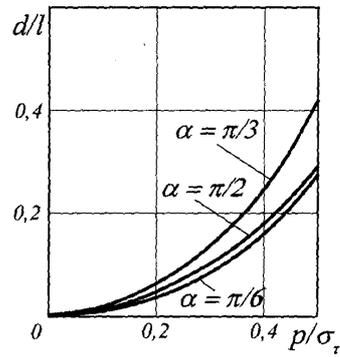


Рис. 3

Легко проверить, исходя из (2.12), (2.7), (2.11), что при  $p = \sigma_T$  имеет место вязкое состояние плоскости с трещиной, т.е.

$$\sigma_y^0 = \sigma_y^\infty = \sigma_T \sin^2 \alpha; \quad \sigma_x^0 = \sigma_x^\infty = \sigma_T \cos^2 \alpha; \quad \tau_{xy}^0 = \tau_{xy}^\infty = \frac{\sigma_T}{2} \sin 2\alpha;$$

$$L \rightarrow \infty; \quad \delta_I(l) \rightarrow \infty; \quad \delta_{II}(l) \rightarrow \infty.$$

Другой предельный случай, квазихрупкое состояние или маломасштабная текучесть, наблюдается при  $d \ll l$  или, согласно (2.7), при  $p \sin^2 \alpha \ll \sigma_y^0$ . В этом случае из выражений (2.7) и (2.11) следуют такие формулы для размера пластической зоны и раскрытий вершины трещины:

$$d = \frac{\pi K_I^2}{8\sigma_y^{02}} = \frac{\pi K_{II}^2}{8\tau_{xy}^{02}}; \quad \delta_I(l) = \frac{K_I^2}{\sigma_y^0 E}; \quad \delta_{II}(l) = \frac{K_{II}^2}{\tau_{xy}^0 E}. \quad (2.14)$$

Здесь  $K_I = p\sqrt{\pi l} \sin^2 \alpha$ ,  $K_{II} = p\sqrt{\pi l} \sin \alpha \cos \alpha$  – коэффициенты интенсивности напряжений, полученные из линейно-упругого решения задачи. Следует подчеркнуть, что в этом случае правая часть выражения (2.5) представляет собой  $T$ -напряжения, а система уравнений (2.8) для определения напряжений на пластической линии принимает

$$F(\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0) = 0; \quad \sigma_x^0 - \sigma_y^0 = T; \quad \frac{\tau_{xy}^0}{\sigma_y^0} = \frac{K_{II}}{K_I}. \quad (2.15)$$

Учет  $T$ -напряжений при рассмотрении квазихрупкого состояния, как видно из (2.15), является важным фактором, что было показано для трещины нормального отрыва в работах [12, 13].

### **Выводы.**

Предложенное обобщение модели трещины Дагдейла на смешанное нагружение по моде I и II учитывает условие пластичности материала, связь трех компонент напряжений на пластической линии через основное напряженное состояние и условие ограниченности напряжений. Численный анализ параметров модели трещины при условии пластичности Мизеса свидетельствует о получении корректных результатов как при вязком состоянии, так и при маломасштабной текучести вблизи вершины трещины.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано модель тріщини із смугою пластичності на її продовженні за змішаного навантаження по модах I і II . Невідомі три компоненти напружень на цій смугі визначаються із умов пластичності, обмеженості напружень, а також встановленого зв'язку між нормальними компонентами напружень через основний напружений стан. Проведено аналіз параметрів тріщини за умови пластичності Мізеса.

1. *Витвицький П.М., Леонов М.Я.* Про руйнування пластинки з щілиною // Прикл. механіка. – 1961. – 7, № 5. – С. 516 – 520.
2. *Галатенко Г.В.* Об одном обобщении модели трещины Дагдейла // Прикл. механіка. – 1989. – 25, № 3. – С. 53 – 58.
3. *Галатенко Г.В.* Развитие модели трещины Дагдейла на основе классических поверхностей текучести // Прикл. механіка. – 1989. – 25, № 6. – С. 36 – 42.
4. *Галатенко Г.В.* К упругопластической модели трещины в условиях плоской деформации // Прикл. механіка. – 1992. – 28, № 9. – С. 35 – 41.
5. *Галатенко Г.В.* Круговая дискообразная трещина в условиях трехосного нагружения. Об одном эффекте Бриджмена // Прикл. механіка. – 1992. – 28, № 8. – С. 29 – 37.
6. *Галатенко Г.В.* О кольцевой пластической зоне возле эллиптической трещины при трехосном осесимметричном нагружении // Прикл. механіка. – 2004. – 40, № 2. – С. 120 – 127.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
8. *Хорошун Л.П.* Об одной модели нелинейной механики трещин // Прикл. механіка. – 1994. – 30, № 11. – С. 3 – 9.
9. *Becker W., Gross D.* About the Dugdale crack under mixed mode loading // Int. J. of Fracture. – 1988. – 37(2). – P. 163 – 170.
10. *Chernyakov Y.A., Grychanyuk V., Tsukrov I.* Stress-strain relations in elastoplastic solids with Dugdale-type cracks // Eng. Fract. Mech. – 2003. – 70. – P. 2163 – 2174.
11. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – N 8. – P. 100 – 108.
12. *Galatenko G.V.* Stress State in the Plastic Zone on the Continuation of an Elliptic Mode I Crack under Bi- and Tri-Axial Loading // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 11. – P. 1202 – 1207.
13. *Kaminsky A.A., Galatenko G.V.* Two-Parameter Model of Mode I Crack in an Elasto-Plastic Body under Plane-Strain Conditions // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 6. – P. 621 – 630.
14. *Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Kolmakova V.A.* On the Model of Process Zone in an Elastic Body at the Crack Tip Locating on the Non-Smooth Interface // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N10. – P.1084 – 1092.
15. *Kaminsky A.A., Bogdanova O.S.* On Certain Model of Mesomechanics of Fracture of an Orthotropic Material with Distinguishing Ultimate Strength in Tension and Compression // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N3. – P. 290 – 296.
16. *Kurchakov E.E., Gavrilov G.V.* Features of Forming the Plasticity Zone in an Anisotropic Body with a Crack // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N9. – P.982 – 997.
17. *Panasjuk V.V., Savruk M.P.* Plastic Strip Model in Elastic-Plastic Problems of Fracture Mechanics // Adv. Mechanics. – 1992. – 15. – P. 123 – 147.
18. *Sha J.B., Zhu P., Deng Z.J., Zhou H.J.* Strip model plasticity analysis of mixed mode crack opening displacement in aluminum alloy LY12 // Theoret. and Appl. Fract. Mechanics. – 1997. – 26. – P. 13 – 21.

Поступила 31.07.2008

Утверждена в печать 07.12.2010