

Н. А. Шульга, Л. О. Григорьева, В. Ф. Корниенко

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТОЛЩИННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ
УПРУГИХ СЛОЕВ С ИСКРИВЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина, e-mail: electr@inmech.kiev.ua*

Abstract. The thickness vibrations of elastic inhomogeneous bodies of diverse geometry under a dynamical harmonic excitation are studied. The thorough analysis is carried out for a change of amplitude-frequency characteristics of mechanical state of homogeneous and inhomogeneous bodies in dependence of excitation frequency. The frequency spectra are determined for the plane, cylindrical, and spherical layers.

Key words: inhomogeneous body, curved layer, harmonic loading, Hamiltonian formalism, amplitude-frequency characteristics, frequency spectrum.

Введение.

Статические и динамические задачи Ламе для упругих однородных (и кусочно-однородных) цилиндров и шаров имеют точное аналитическое решение [1 и др.]. В то же время в инженерной практике приходится иметь дело с непрерывно неоднородными по своим упругим свойствам слоями (плоскими, цилиндрическими, сферическими и др.). Эти неоднородности обуславливаются различными конструктивными, технологическими, эксплуатационными, климатическими и иными причинами. В последнее время этот вопрос для цилиндрических тел обсуждался в статьях [4 – 6, 8 – 11]. Исследование влияния различного типа радиальных неоднородностей на частотные и амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) гармонических колебаний упругих слоев с искривленными границами требует не только выбора эффективного математического и вычислительного алгоритмов решения краевой задачи теории упругости, но и выбора определенной стратегии проведения физического анализа результатов этого решения.

В данной статье развит единый подход анализа гармонических колебаний пластины, цилиндра и шара с поперечным направлением анизотропии и неоднородности упругих свойств. На основе разработанного алгоритма проведен сравнительный анализ АЧХ и собственных частот колебаний для неоднородных тел разной геометрии.

§1. Постановка задачи.

Для исследования амплитудно-частотных характеристик толщинных колебаний неоднородных упругих слоев плоской, цилиндрической и сферической форм исходными являются уравнения колебаний

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho(r) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

и материальные зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} + N c_{13}(r) \frac{u_r}{r}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} + N \left[c_{11}(r) - \frac{1}{2} (N-1) (c_{11}(r) - c_{12}(r)) \right] \frac{u_r}{r}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

которые являются общими для прямоугольных, цилиндрических и сферических координат.

В цилиндрических ($N = 1$) и сферических ($N = 2$) координатах r изменяется в пределах $R - h \leq r \leq R + h$, где R – радиус срединной поверхности; $2h$ – толщина слоя; в плоском случае ($N = 0$) $-h \leq r - R = x_3 \leq h$ и уравнения (1.1), (1.2) соответствуют прямоугольным координатам.

Определив из первого уравнения системы (1.2)

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}(r)} - N \frac{c_{13}(r)}{c_{33}(r)} \frac{u_r}{r}, \quad (1.3)$$

для напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ находим следующее выражение:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{c_{13}(r)}{c_{33}(r)} \sigma_{rr} - \frac{1}{2} N \left[2c_{11^{**}}(r) - (N-1)(c_{11}(r) - c_{12}(r)) \right] \frac{u_r}{r} \quad (1.4)$$

$$(\text{постоянная } c_{11^{**}}(r) = c_{11}(r) - c_{13}^2(r)c_{33}^{-1}(r)).$$

Из соотношений (1.1) и (1.4) имеем равенство

$$\frac{\partial r^N \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{N}{r} \frac{c_{13}(r)}{c_{33}(r)} r^N \sigma_{rr} + r^N \left[\rho(r) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{N^2}{r^2} \left(c_{11^{**}}(r) - \frac{N-1}{2} (c_{11}(r) - c_{12}(r)) \right) u_r \right]. \quad (1.5)$$

Таким образом, получена система уравнений (1.3), (1.5) относительно функций $r^N \sigma_{rr}$ и u_r . После их определения напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ находим по формуле (1.4).

Система уравнений (1.3), (1.5), как и соотношения (1.1), (1.2), справедлива и в том случае, когда механические параметры $\rho(r)$, $c_{ij}(r)$ будут кусочно-непрерывными функциями координаты r с разрывами первого рода. В точках разрыва $r = r_*$ должны выполняться условия непрерывности функций σ_{rr} и u_r .

На внешних поверхностях $r = r_0$ и $r = r_1$ ($r_0 < r < r_1$) граничные условия задаются по одному из альтернативных пар

$$u_r(r_0, t) = u_r^0(t) \vee \sigma_{rr}(r_0, t) = \sigma_{rr}^0(t); \quad u_r(r_1, t) = u_r^1(t) \vee \sigma_{rr}(r_1, t) = \sigma_{rr}^1(t). \quad (1.6)$$

§2. Применение гамильтонового формализма.

В монографии [7] и последующих работах [12, 13 и др.] система уравнений упругих колебаний в декартовых прямоугольных координатах впервые была приведена к операторной системе гамильтонового типа по пространственной координате относительно соответствующим образом выбранных канонических переменных. Этот вопрос нашел последующее развитие в статье [4], в которой более сложными преобразованиями к операторной гамильтоновой системе по радиальной координате сведена система уравнений упругих колебаний в цилиндрических координатах. В статье [5] подобное представление получено в сферических координатах.

Для исследования колебаний слоев с искривленными граничными поверхностями представим уравнения (1.3), (1.5) в операторной системе гамильтонового типа по пространственной координате r относительно канонических переменных $r^N \sigma_{rr} = q_1$ и $u_r = p_1$. Получаем операторную гамильтонову систему [2] по пространственной координате r

$$\frac{\partial \hat{q}_1}{\partial r} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_1}; \quad \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial r} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{q}_1} \quad (2.1)$$

с операторной функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{q}_1, \hat{p}_1) = & -\frac{1}{2} \frac{1}{c_{33}(r)r^N} \hat{q}_1^2 + \frac{N}{r} \frac{c_{13}(r)}{c_{33}(r)} \hat{p}_1 \hat{q}_1 + \\ & + \frac{1}{2} r^N \left[\rho(r) \partial_t^2 + \frac{N^2}{r^2} \left(c_{11^{**}}(r) - \frac{N-1}{2} (c_{11}(r) - c_{12}(r)) \right) \right] \hat{p}_1^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При гармонических колебаниях $f(r, t) = \text{Re } f^a(r) \exp i\omega t$ система уравнений (1.3), (1.5) в безразмерных переменных преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a &= \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{c_{13}(x)}{c_{33}(x)} (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a + \\ &+ (1 + \varepsilon x)^N \left\{ \frac{N^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \left[c_{11^{**}}(x) - \frac{N-1}{2} (c_{11}(x) - c_{12}(x)) \right] - \rho(x) \omega^2 \right\} u_r^a; \quad (2.3) \\ \frac{du_r^a}{dx} &= \frac{1}{c_{33}(x) (1 + \varepsilon x)^N} (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a - \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{c_{13}(x)}{c_{33}(x)} u_r^a. \end{aligned}$$

Безразмерные величины вводятся следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{00}}; \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{c_{00}}; \quad \bar{u}_r = \frac{u_r}{h}; \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{00}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}; \quad \bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho_{00}}{c_{00}}}; \quad x = \frac{r-R}{h}. \quad (2.4)$$

Принятое обезразмеривание позволяет перейти от пространственной координаты r к безразмерной пространственной координате x ($-1 \leq x \leq 1$). Параметр кривизны $\varepsilon = h/R$ для плоского слоя $\varepsilon = 0$. Далее знаки безразмерности опускаются.

Система (2.3) является гамильтоновой системой [2] по координате x

$$\frac{dq_1}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_1}; \quad \frac{dp_1}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \quad (2.5)$$

с каноническими переменными $q_1 = (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a$, $p_1 = u_r^a$. Функция Гамильтона принимает такой вид:

$$\begin{aligned} H(q_1, p_1) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{c_{33}(x) (1 + \varepsilon x)^N} q_1^2 + \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{c_{13}(x)}{c_{33}(x)} q_1 p_1 + \\ &+ \frac{1}{2} (1 + \varepsilon x)^N \left\{ \frac{N^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \left[c_{11^{**}}(x) - \frac{N-1}{2} (c_{11}(x) - c_{12}(x)) - \rho(x) \omega^2 \right] \right\} p_1^2. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Систему (2.3) можно получить из условия стационарности функционала

$$\begin{aligned} \Phi = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ u_r^a \frac{d}{dx} (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{c}_{33} (1 + \varepsilon x)^N} \left((1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a \right)^2 - \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{\bar{c}_{13}}{\bar{c}_{33}} r^N \sigma_{rr}^a u_r^a - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon x)^N \left[\frac{N^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \left(\bar{c}_{11^{**}} - \frac{N-1}{2} (\bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}) - \bar{\rho} \bar{\omega}^2 \right) \right] u_r^a u_r^a \right\} dx. \quad (2.7) \end{aligned}$$

при «изохронных» вариациях.

Для исследования установившихся резонансных гармонических колебаний можно воспользоваться концепцией комплексных модулей [3 и др.].

§3. Интегрирование системы уравнений. Решение полученной системы удобно искать в виде вектора

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = ((1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a, u_r^a). \quad (3.1)$$

Тогда система (2.3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} = \frac{\varepsilon N}{1 + \varepsilon x} \frac{c_{13}(x)}{c_{33}(x)} \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 (1 + \varepsilon x)^N \left[-\rho(x) \omega^2 + \frac{\varepsilon^2 N^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \left(c_{11^{**}}(x) - \frac{N-1}{2} (c_{11}(x) - c_{12}(x)) \right) \right];$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial x} = \frac{Y_1}{(1+\varepsilon x)^N c_{33}(x)} - N \frac{c_{13}(x)\varepsilon}{c_{33}(x)(1+\varepsilon x)} Y_2. \quad (3.2)$$

Пусть к внутренней поверхности тела приложена механическая нагрузка, которая изменяется по гармоническому закону с частотой ω , а внешняя поверхность – свободна от напряжений, т.е.

$$\sigma_{rr}^a(-1) = \sigma_0; \quad \sigma_{rr}^a(1) = 0. \quad (3.3)$$

Тогда для переменных (3.1) получаем следующие граничные условия:

$$Y_1(-1) = \sigma_0(1-\varepsilon)^N = \sigma_0^*; \quad Y_1(1) = 0. \quad (3.4)$$

Решение $Y = (Y_1, Y_2)$, которое удовлетворяет уравнениям (3.2) при краевых условиях (3.4), будем искать в виде линейной комбинации двух векторов

$$Y = A_1 Y^{(1)} + \sigma_0^* Y^{(2)}, \quad (3.5)$$

которые являются решениями задач Коши для системы (3.2) при таких начальных значениях:

$$Y^{(1)}(-1) = (0, 1); \quad Y^{(2)}(-1) = (1, 0). \quad (3.6)$$

Решения полученных задач Коши находим численно, например, методом Рунге – Кутты.

Подставляя (3.5) в (3.4) при $x = 1$, определяем коэффициент A_1 :

$$A_1 = -\sigma_0^* \frac{Y_1^{(2)}(1)}{Y_1^{(1)}(1)}. \quad (3.7)$$

Подставив найденное значение A_1 в (3.5), получим решение задачи.

§4. Результаты расчетов и их анализ.

При анализе деформирования твердых тел при неоднородных механических свойствах ограничиваются, как правило, конкретными значениями параметров, ориентируясь на инженерные запросы. Более общую информацию можно получить, исходя из определенной стратегии изменения свойств материала, базирующейся на наблюдаемых реальных ситуациях. В настоящей статье принято, что модуль Юнга изотропного материала является либо возрастающей, либо убывающей по линейному закону функцией радиальной координаты $E(x) = E^+ \left((1-\alpha)x + (1+\alpha) \right) / 2$, $\alpha = E^- / E^+$, E^- – модуль Юнга при $x = -1$ (нижняя (внутренняя) поверхность тела); E^+ – модуль Юнга при $x = +1$ (верхняя (внешняя) поверхность тела). При $\alpha < 1$ модуль Юнга возрастает от E^- до E^+ , а при $\alpha > 1$ – убывает от E^- до E^+ . Случай $\alpha = 1$ соответствует однородному материалу и рассматривается с целью сравнения результатов. Фигурирующие в §§1 – 3 материальные параметры равны:

$$c_{33} = c_{11} = E(x) \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad c_{13} = c_{12} = E(x) \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad (4.1)$$

$$\frac{E(x)}{E^+} = \frac{x}{2}(1-\alpha) + \frac{1}{2}(1+\alpha).$$

Коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$. Для цилиндрических ($N = 1$) и сферических ($N = 2$) слоев принято $\varepsilon = 1/3$ ($\varepsilon = h/R$; $2h$ – толщина стенки; R – срединный радиус); для пластины ($N = 0$) $\varepsilon = 0$. Нормирующие параметры равны: $\rho_{00} = \rho$, $c_{00} = E^+$, безразмерная частота $\Omega = \omega h \sqrt{\rho / E^+}$. Напряжения отнесены к заданному напряжению σ_0 на внутренней поверхности. Расчеты проводились для значений $\alpha = 2$, $\alpha = 1$, $\alpha = 0,5$.

На рис. 1 приведены зависимости безразмерных амплитуд перемещений u_r^a от безразмерной круговой частоты нагрузки Ω для плоского слоя при $\alpha = 2$ (модуль Юнга убывает; рис. 1, а) и $\alpha = 0,5$ (модуль Юнга возрастает; рис. 1, б), где значениям $x = 0; -1; 1$ соответствуют сплошная, пунктирная и штрих-пунктирная линии. Для сравнения приведены кривые перемещений на поверхности $x = -1$ в случае однородного материала $\alpha = 1$ (точечная линия; рис. 1, а, б). Все расчеты проведены для частотного интервала $0 < \Omega < 12$. Разрывы кривых соответствуют состоянию резонанса в теле.

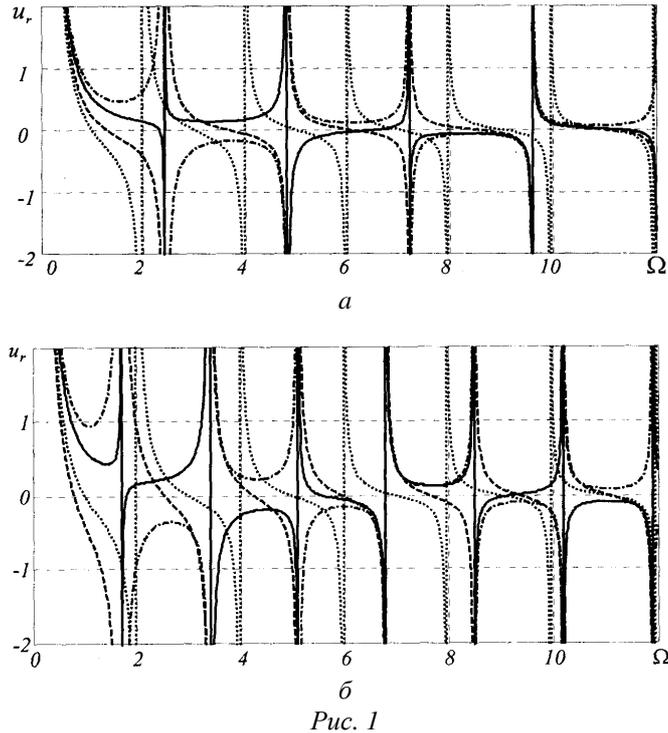


Рис. 1

В табл. 1. приведены собственные частоты толщинных колебаний неоднородных пластин. Для сравнения приведены также собственные частоты однородной пластины, которые определяются из простого аналитического решения задачи. Это решение для собственных частот и соответствующих собственных форм колебаний дает следующее значение (в статье [6] в формулах для собственных форм в аргументах тригонометрических функций вместо x следует положить $x+h$): для условий жесткая граница – жесткая граница имеем $\omega_n h \sqrt{\rho/c_{33}} = n\pi/2$, $u_n(x) = \sin n\pi(x+h)/2h$; для условий жесткая граница – свободная граница – $\omega_n h \sqrt{\rho/c_{33}} = (2n-1)\pi/4$, $u_n(x) = \sin(2n-1)\pi(x+h)/4h$; для условий свободная граница – свободная граница имеем $\omega_n h \sqrt{\rho/c_{33}} = (n-1)\pi/2$, $u_n(x) = \cos(n-1)\pi(x+h)/2h$. Приведенные в табл. 1 частоты $\Omega_{\alpha=1}^{N=0} = \omega h \sqrt{\rho/E_3^+}$ совпадают с указанными выше $\omega_n h \sqrt{\rho/c_{33}} = (n-1)\pi/2$, $n = 1, 2, \dots$. Отметим, что как однородная, так и неоднородная пластина имеет нулевое собственное число. Анализ приведенных в табл. 1 частот показывает, что при возрастании модуля Юнга ($\alpha = 0,5$) собственные частоты уменьшаются, примерно, на 15%, а при его убывании ($\alpha = 2$) собственные частоты увеличиваются ($\approx 20\%$) по сравнению с собственными частотами однородной пластины.

Таблица 1

$\Omega_{\alpha=0,5}^{N=0}$	0	1,72	3,41	5,11	6,81	8,51	10,20	11,90
$\Omega_{\alpha=1}^{N=0}$	0	1,99	3,98	5,97	7,96	9,95	11,94	–
$\Omega_{\alpha=2}^{N=0}$	0	2,42	4,81	7,22	9,62	12,00	–	–

Рис. 2 иллюстрирует зависимости безразмерных амплитуд перемещений u_r^a от частоты Ω для цилиндра ($N = 1$) при $\alpha = 2$ (а), $\alpha = 0,5$ (б) и $\alpha = 1$ (а, б). Здесь обозначения кривых соответствуют принятым на рис. 1.

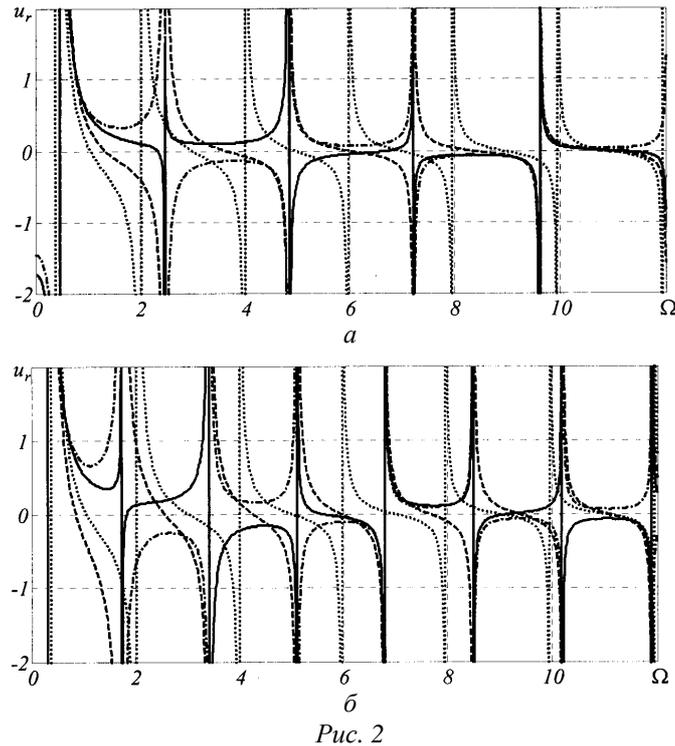


Рис. 2

В табл. 2 приведены собственные частоты толщинных колебаний неоднородного цилиндра (для сравнения приведены также собственные частоты однородного цилиндра). Неоднородность материала приводит к уменьшению собственных частот примерно на 15% при возрастании модуля E ($\alpha = 0,5$), тогда как при его убывании ($\alpha = 2$) собственные частоты увеличиваются на $\approx 21\%$ (первая частота) – 17% (пятая частота). Если для однородного цилиндра в частотном интервале $0 < \Omega < 12$ имеется семь собственных частот, то при возрастании модуля E ($\alpha = 0,5$) их будет восемь, а при убывании модуля E ($\alpha = 2$) – только пять.

Таблица 2

$\Omega_{\alpha=0,5}^{N=1}$	0,32	1,74	3,43	5,12	6,81	8,51	10,21	11,91
$\Omega_{\alpha=1}^{N=1}$	0,38	2,04	4,01	5,99	7,98	9,97	11,96	–
$\Omega_{\alpha=2}^{N=1}$	0,48	2,47	4,84	7,23	9,63	–	–	–

На рис. 3 приведены зависимости безразмерных амплитуд перемещений u_r^a от частоты Ω для сферы ($N = 2$) при $\alpha = 2$ (а), $\alpha = 0,5$ (б) и $\alpha = 1$ (а, б); при этом обозначения кривых соответствуют принятым ранее (рис. 1, 2).

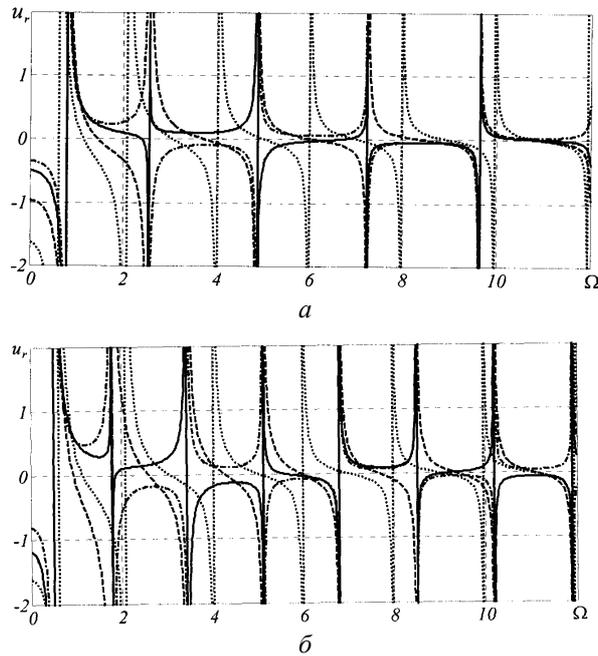


Рис. 3

В табл. 3 приведены собственные частоты толщинных колебаний неоднородного шара (для сравнения приведены также собственные частоты однородного шара). Неоднородность материала приводит к уменьшению собственных частот примерно на 16% при возрастании модуля E ($\alpha = 0,5$), тогда как при его убывании ($\alpha = 2$) собственные частоты увеличиваются, примерно, на 25% (первая частота) – 21% (пятая частота). Количество собственных частот на частотном интервале $0 < \Omega < 12$ изменяется так же, как и в случае цилиндра.

Таблица 3

$\Omega_{\alpha=0,5}^{N=2}$	0,53	1,79	3,45	5,13	6,83	8,52	10,22	11,92
$\Omega_{\alpha=1}^{N=2}$	0,63	2,10	4,04	6,01	7,99	9,98	11,97	–
$\Omega_{\alpha=2}^{N=2}$	0,79	2,55	4,88	7,26	9,65	–	–	–

Таблица 4

$\Omega_{\alpha=0,5}^{N=0}$	0	1,72	3,41	5,11	6,81	8,51	10,20	11,90
$\Omega_{\alpha=0,5}^{N=1}$	0,32	1,74	3,43	5,12	6,81	8,51	10,21	11,91
$\Omega_{\alpha=0,5}^{N=2}$	0,53	1,79	3,45	5,13	6,83	8,52	10,22	11,92
$\Omega_{\alpha=1}^{N=0}$	0	1,99	3,98	5,97	7,96	9,95	11,94	–
$\Omega_{\alpha=1}^{N=1}$	0,38	2,04	4,01	5,99	7,98	9,97	11,96	–
$\Omega_{\alpha=1}^{N=2}$	0,63	2,10	4,04	6,01	7,99	9,98	11,97	–
$\Omega_{\alpha=2}^{N=0}$	0	2,42	4,81	7,22	9,62	12,00	–	–
$\Omega_{\alpha=2}^{N=1}$	0,48	2,47	4,84	7,23	9,63	–	–	–
$\Omega_{\alpha=2}^{N=2}$	0,79	2,55	4,88	7,26	9,65	–	–	–

В табл. 4 четко просматривается интересная особенность частотных спектров толщинных колебаний пластины, цилиндра и шара. Она заключается в следующем. Во-первых, все частоты, за исключением первой (если принять нулевое собственное число для пластины ее первой собственной частотой собственных колебаний) практически имеют одно и то же значение как в случае однородного материала, так и в случае неоднородного материала. Во-вторых, в частотном спектре цилиндра и шара по-

является низкая собственная частота, которая меньше первой ненулевой собственной частоты для пластины в пять раз (в случае цилиндра) и в три раза (в случае шара).

Важным вопросом исследования являются амплитудные значения напряжений при гармонической нагрузке с частотой возбуждения Ω . На рис. 4 приведены зависимости нормальных напряжений σ_{rr}^a от частоты Ω для неоднородных тел разной геометрии при $x=0$ (согласно граничным условиям, на границе $x=-1$ $\sigma_{rr}^a/\sigma_0=1$, $\sigma_{rr}^a(+1)=0$) при $\alpha=2$ (а), $\alpha=0,5$ (б).

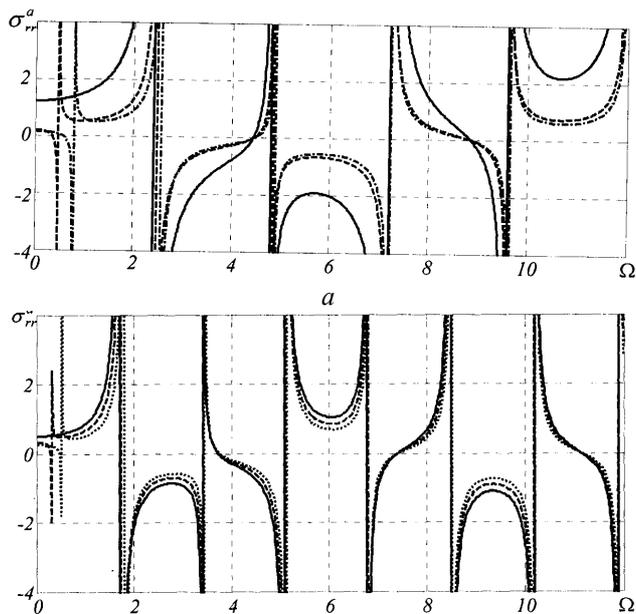


Рис. 4

Зависимость амплитудных значений напряжений $\sigma_{\theta\theta}^a$ от Ω ($x=0$) показана на рис. 5 при $\alpha=2$ (а), $\alpha=0,5$ (б).

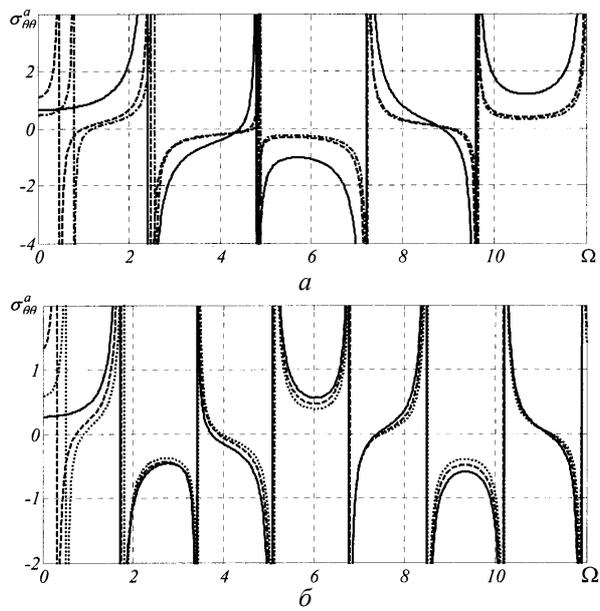


Рис. 5

Проведенные расчеты показали, что напряжения $\sigma_{\theta\theta}^a$ на внешних поверхностях при значениях частоты Ω в межрезонансных интервалах на внешних поверхностях меньше, чем внутри тела.

Таким образом, разработанный на основе гамильтонового формализма метод изучения вынужденных колебаний позволяет эффективно определять амплитудно-частотные характеристики анизотропных однородных и неоднородных тел разной геометрии.

Амплитудно-частотные характеристики для перемещений (рис. 1 – 3) и напряжений (рис. 4, 5) определены без учета рассеяния энергии и соответствуют действительности только при удалении от резонансных частот. Для определения АЧХ для всех частот, включая резонансные, необходимо учитывать энергетические потери. Получить количественные результаты теоретическим путем, приняв какую-то модель внутреннего трения, затруднительно не только из-за сложностей определения параметров модели. Это связано также и с тем обстоятельством, что рассеяние энергии в реальных условиях эксплуатации происходит как за счет внутреннего трения, так и за счет излучения во внешнюю среду, а также потерь на конструктивные неточности. Чтобы обойти все эти сложности, необходимо проводить экспериментальные исследования на натурных изделиях и вносить соответствующие уточнения в параллельные теоретические расчеты на основании подходящей модели. Это можно выполнить только в процессе изготовления изделия и его эксплуатации. Поэтому проводить какие-то абстрактные расчеты перемещений и напряжений на резонансных частотах вряд ли целесообразно.

Заключение.

В данной статье развит единый подход определения по пространственной теории амплитудно-частотных характеристик и собственных частот толщинных колебаний пластины, цилиндра и шара с поперечным направлением анизотропии и неоднородности упругих свойств материала. Краевая задача сформулирована с привлечением гамильтонового формализма по пространственной координате. На основе разработанного алгоритма проведен детальный сравнительный анализ изменения амплитудно-частотных характеристик деформированного состояния однородных и неоднородных тел в зависимости от частоты возбуждения, определены частотные спектры для шаров с плоскими, цилиндрическими и сферическими границами и выявлены их родственные и отличительные свойства.

РЕЗЮМЕ. Досліджено товщинні коливання пружних неоднорідних тіл різної геометрії при динамічному гармонічному збуренні. Проведено детальний аналіз зміни амплітудно-частотних характеристик механічного стану однорідних та неоднорідних тіл в залежності від частоти збурення, визначено частотні спектри для плоских, циліндричних і сферичних шарів.

1. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
3. Савін Г.М., Рущицький Я.Я. Элементы механики спадкових середовищ. – К.: Вища шк., 1976. – 252 с.
4. Шульга В.М. До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доп. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80 – 82.
5. Шульга М.О. До теорії товщинних коливань пружних шарів з викривленими граничними поверхнями // Доп. НАН України. – 2010. – № 5. – С. 72 – 75.
6. Шульга М.О., Григор'єва Л.О. Про коливання пружних шарів з викривленими границями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2009. – Вип. 84. – С. 120 – 126.
7. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
8. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. General Hoyle – Yougdahl and Love Solutions in the Linear Inhomogeneous Theory of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 1. – P. 1 – 17.
9. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. Love Solutions in the Linear Inhomogeneous Transversely Isotropic Theory of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 2. – P. 121 – 129.
10. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. General Love Solution in the Linear Isotropic Inhomogeneous Theory of Radius-Dependent Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 3. – P. 245 – 254.
11. Kashtalyan M., Rushchitsky J.J. General Love Solution in the Linear Inhomogeneous Transversely Isotropic Theory // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 4. – P. 367 – 376.
12. Shulga N.A. Theory of Dynamic Processes in Mechanical Systems and Materials of Regular Structure // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 12. – P. 1301 – 1330.
13. Shulga N.A. A Mixed System of Equations of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 3. – P. 264 – 268.

Поступила 03.11.2009

Утверждена в печать 07.12.2010