УДК 512.554.3

Д. Р. Попович

Контракція між алгебрами Лі з обов'язково сингулярними компонентами матриці контракції

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Наведено приклад контракції між п'ятивимірними алгебрами Лі, яку можна реалізувати тільки матрицями з евклідовими нормами, що обов'язково прямують до нескінченності при граничному значенні параметра. Розмірність п'ять є найнижчою для алгебр Лі, між якими існують контракції такого типу.

Вивчення шляхів реалізації контракцій алгебр Лі відіграє важливу роль у теорії контракцій з моменту її виникнення. Аналіз результатів по контракціях дійсних і комплексних алгебр Лі розмірності не більшої чотирьох [1–3] показує, що всі ці контракції можна реалізувати матрицями, які мають добре визначену границю в граничному значенні параметра контракції. Природним є питання, чи це виконується і для вищих розмірностей. У роботі [4] зроблено першу спробу відповісти на нього, розглянувши контракції між двома дійсними п'ятивимірними алгебрами Лі, $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$, що задані відповідними ненульовими комутаційними співвідношеннями:

$$\mathfrak{a}\colon\quad [e_1,e_3]=e_3,\qquad [e_2,e_4]=e_4,\qquad [e_1,e_2]=e_5,$$
$$\mathfrak{a}_0\colon\quad [e_1,e_3]=e_3,\qquad [e_2,e_4]=e_4.$$

Згідно з класифікацією Мубаракзянова [5] п'ятивимірних алгебр Лі, наведені алгебри позначають $A_{5.38}$ та $A_{2.1}\oplus A_{2.1}\oplus A_1$. Очевидно, що контракцію $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}_0$ реалізує діагональна матриця $U=\operatorname{diag}(1,1,1,1,\varepsilon^{-1})$, що прямує до нескінченності при $\varepsilon\to\infty$. Це справджується і для контракції $\bar{\mathfrak{a}}\to\bar{\mathfrak{a}}_0$ між комплексифікаціями $\bar{\mathfrak{a}}$ та $\bar{\mathfrak{a}}_0$ дійсних алгебр $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$.

У роботі [4] показано, що для довільної реалізації контракції $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}_0$ як узагальненої контракції Іньоню–Вігнера потрібно використовувати від'ємний степінь параметра контракції, а тому деякі елементи відповідної матриці прямують до нескінченності. Метою роботи є доведення сильнішого твердження.

Теорема 1. *Евклідова норма будь-якої матриці, що реалізує контракцію алгебри $\mathfrak{a}$ до алгебри $\mathfrak{a}_0$, прямує до нескінченності. Це справедливо також для відповідних комплексних алгебр.*

Як буде видно з доведення, з точністю до автоморфізму алгебр $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$, саме елемент за номером $(5,5)$ будь-якої матриці у вибраних базисах алгебр $\mathfrak{a}$ та $\mathfrak{a}_0$ прямує до нескінченності, що вірно і для комплексифікацій цих алгебр.

Нехай V — скінченновимірний векторний простір над полем $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ або $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Множину всіх можливих дужок Лі на V позначимо через $\mathcal{L}_n=\mathcal{L}_n(\mathbb{F})$, де $n=\dim V<\infty$. Кожному елементу μ множини $\mathcal{L}_n$ відповідає алгебра Лі на просторі V: $\mathfrak{g}=(V,\mu)$. Вибір базису $\{e_1,\dots,e_n\}$ простору V задає бієкцію між множинами $\mathcal{L}_n$ та

$$\mathcal{C}_n=\{(c_{ij}^k)\in\mathbb{F}^{n^3}\mid c_{ij}^k+c_{ji}^k=0,\ c_{ij}^{i'}c_{i'k}^{k'}+c_{ki}^{i'}c_{i'j}^{k'}+c_{jk}^{i'}c_{i'i}^{k'}=0\}.$$

© Д. Р. Попович, 2014

Тензор структурних сталих $(c_{ij}^k) \in \mathcal{C}_n$, асоційований з алгеброю Лі $\mu \in \mathcal{L}_n$, визначає формула $\mu(e_i, e_j) = c_{ij}^k e_k$. Тут і далі індекси i, j, k, i', j' та k' пробігають від 1 до n; за індексами, що повторюються, йде підсумовування. Загальноприйнятою у фізичній літературі є права дія групи $\mathrm{GL}(V)$ на $\mathcal{L}_n$ за правилом

$$(U \cdot \mu)(x, y) = U^{-1}(\mu(Ux, Uy)) \qquad \forall\, U \in \mathrm{GL}(V), \qquad \forall\, \mu \in \mathcal{L}_n, \qquad \forall\, x, y \in V.$$

Означення 1. Нехай $\mu \in \mathcal{L}_n$ — дужка Лі на V і $U\colon (0, 1] \to \mathrm{GL}(V)$ — неперервна матрична функція. Побудуємо параметризовану сім'ю дужок Лі $\mu_\varepsilon = U_\varepsilon \cdot \mu$, $\varepsilon \in (0, 1]$. Кожна алгебра Лі $\mathfrak{g}_\varepsilon = (V, \mu_\varepsilon)$ ізоморфна алгебрі $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. Якщо границя

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \mu_\varepsilon(x, y) = \lim_{\varepsilon \to +0} U_\varepsilon{}^{-1} \mu(U_\varepsilon x, U_\varepsilon y) =: \mu_0(x, y)$$

існує для будь-яких x, $y \in V$, то μ_0 є добре визначеною дужкою Лі. Алгебру Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, \mu_0)$ називають *однопараметричною неперервною контракцією* (чи просто *контракцією*) алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а сам процес граничного переходу $\mathfrak{g}$ у $\mathfrak{g}_0$ разом із відповідною матричною функцією — *реалізацією* контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$.

У фіксованому базисі $\{e_1, \ldots, e_n\}$ простору V оператор U_ε можна ототожнити з його матрицею $U_\varepsilon \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, яку позначимо таким самим символом, а означення 1 можна переформулювати в термінах структурних сталих. Нехай $C = (c_{ij}^k)$ — тензор структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}$ у вибраному базисі. Тоді тензор $C_\varepsilon = (c_{\varepsilon,ij}^k)$ структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}_\varepsilon$ у цьому ж базисі є результатом дії матриці U_ε на тензор C: $C_\varepsilon = C \circ U_\varepsilon$, або покомпонентно:

$$c_{\varepsilon,ij}^k = (U_\varepsilon)_i^{i'} (U_\varepsilon)_j^{j'} (U_\varepsilon{}^{-1})_{k'}^k c_{i'j'}^{k'}.$$

Тому означення 1 рівносильне існуванню границі

$$\lim_{\varepsilon \to +0} c_{\varepsilon,ij}^k =: c_{0,ij}^k$$

для всіх значень i, j та k, а $c_{0,ij}^k$ є компонентами добре визначеного тензора структурних сталих C_0 алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$. Параметр ε і матричну функцію U_ε називають *параметром контракції* та *матрицею контракції* відповідно.

Послідовні контракції визначають аналогічно до неперервних [4] із використанням послідовностей матриць $\{U_p, p \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{GL}(V)$ замість неперервних матричних функцій. Для кожної дужки Лі з послідовності $\{\mu_p = U_p \cdot \mu, p \in \mathbb{N}\}$ алгебра $\mathfrak{g}_p = (V, \mu_p)$ ізоморфна алгебрі $\mathfrak{g} = (V, \mu)$. Якщо границя

$$\lim_{p \to \infty} \mu_p(x, y) = \lim_{p \to \infty} U_p{}^{-1} \mu(U_p x, U_p y) =: \mu_0(x, y)$$

існує для будь-яких x, $y \in V$, то μ_0 є добре визначеною дужкою Лі на V. Відповідну алгебру Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, \mu_0)$ називають *послідовною контракцією* алгебри $\mathfrak{g}$. У базиснозалежному підході кожна алгебра $\mathfrak{g}_p$ відповідає тензору структурних сталих $C_p = C \circ U_p$ з компонентами

$$c_{p,ij}^k = (U_p)_i^{i'} (U_p)_j^{j'} (U_p{}^{-1})_{k'}^k c_{i'j'}^{k'}.$$

Існування наведеної вище границі послідовності $\{\mu_p\}$ рівносильне існуванню границі

$$\lim_{p \to +0} c_{p,ij}^k =: c_{0,ij}^k$$

для всіх значень i, j, k, де $c_{0,ij}^k$ — компоненти тензора структурних сталих C_0 алгебри $\mathfrak{g}_0$.

Довільна неперервна контракція з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$ породжує нескінченну сім'ю матричних послідовностей і відповідних послідовних контракцій із $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$. Більш точно, якщо U_ε є матрицею неперервної контракції і послідовність $\{\varepsilon_p, p \in \mathbb{N}\}$ задовольняє умови $\varepsilon_p \in (0, 1]$, $\varepsilon_p \to +0$, $p \to \infty$, то послідовність матриць $\{U_{\varepsilon_p}, p \in \mathbb{N}\}$ породжує послідовну контракцію з $\mathfrak{g}$ до $\mathfrak{g}_0$.

Означення спеціальних типів контракцій, твердження щодо властивостей та їх доведення у випадку послідовних контракцій аналогічні таким для неперервних контракцій; достатньо замінити неперервну параметризацію дискретною.

Нижченаведене корисне твердження є очевидним.

Лема 1. *Якщо матрицю U_ε контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ можна подати у вигляді $U_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon \check{U}_\varepsilon$, де $\hat{U}$ і $\check{U}$ — неперервні функції з $(0, 1]$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ і функція $\check{U}$ має границю $\check{U}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ при $\varepsilon \to +0$, то $\hat{U}_\varepsilon \check{U}_0$ також є матрицею контракції $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$.*

Аналогічне твердження справедливе і для послідовних контракцій. У подальшому нам знадобиться лема, що стосується матричних LQ-декомпозицій.

Лема 2. *Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ контрактовна до алгебри Лі $\mathfrak{g}_0$ тільки тоді, коли у фіксованому базисі $\{e_1, \ldots, e_n\}$ основного простору V існує послідовність $\{L_p, p \in \mathbb{N}\}$ невироджених нижньотрикутних матриць розміру $n \times n$ і ортогональна (унітарна) $n \times n$ матриця Q у дійсному (комплексному) випадку така, що $C \circ L_p \to C_0 \circ Q$ при $p \to +\infty$.*

Доведення. Використовуючи послідовну реалізацію контракцій, розглянемо тільки дійсний випадок (у комплексному треба лише замінити ортогональні матриці унітарними). Нехай контракцію $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ реалізує послідовність матриць $\{U_p, p \in \mathbb{N}\}$, тобто $C \circ U_p \to C_0$, $p \to +\infty$. Для кожного p розкладемо матрицю U_p на трикутний та ортогональний множники $U_p = L_p Q_p$, де L_p є нижньотрикутною матрицею, а Q_p — ортогональною. Оскільки множина ортогональних $n \times n$ матриць є компактною в евклідовій топології, послідовність $\{Q_p, p \in \mathbb{N}\}$ містить збіжну підпослідовність. Кожна підпослідовність реалізує ту ж саму контракцію, що й уся послідовність матриць. Таким чином, без втрати загальності можна припустити, що послідовність $\{Q_p\}$ є збіжною. Її границя Q_0 також є ортогональною матрицею. Оскільки $C \circ U_p \to C_0$, $Q_p^{\mathrm{T}} \to Q_0^{\mathrm{T}}$ і всі матриці Q_p є ортогональними, то

$$C \circ L_p = C \circ L_p Q_p Q_p^{\mathrm{T}} = C \circ U_p Q_p^{\mathrm{T}} \to C_0 \circ Q_0^{\mathrm{T}}$$

при $p \to +\infty$. Перепозначення Q_0^{T} через Q завершує доведення леми.

Зауваження 1. Послідовність трикутних матриць $\{L_p, p \in \mathbb{N}\}$ і ортогональна матриця Q визначені в лемі 2 з точністю до перетворення

$$\widetilde{L}_p = M_p L_p D_p, \qquad \widetilde{Q} = K Q D_0,$$

де K — матриця ортогонального автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}_0$, D_0 — діагональна ортогональна (унітарна) матриця в дійсному (комплексному) випадку, M_p для кожного $p \in \mathbb{N}$ — матриця автоморфізму алгебри $\mathfrak{g}$, а послідовність трикутних матриць $\{D_p, p \in \mathbb{N}\}$ збігається до матриці D_0.

Доведення теореми 1. Наведемо доведення лише для дійсного випадку. У комплексному випадку ортогональні матриці потрібно замінити на унітарні, а всі інші відмінності у доведенні будуть пояснені окремо.

Розглянемо довільну послідовну реалізацію контракції $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$ послідовністю матриць $\{U_p, p \in \mathbb{N}\}$. Припустимо, що евклідова норма U_p не прямує до нескінченності. Тоді послідовність $\{U_p\}$ містить обмежену підпослідовність $\{U_{p_s}, s \in \mathbb{N}\}$. Аналогічно доведенню леми 2 розкладемо кожну матрицю U_{p_s} на добуток нижньотрикутної й ортогональної частин, виберемо підпослідовність елементів з $\{U_{p_s}\}$ зі збіжними ортогональними частинами і застосуємо теорему про алгебраїчні властивості границь. У результаті отримаємо обмежену послідовність нижньотрикутних матриць і ортогональну матрицю Q, що задовольняють лему 2 з $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$ і $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}_0$. Однак, як буде доведено далі, послідовність евклідових норм таких трикутних матриць завжди прямує до нескінченності. Отримана суперечність означає, що послідовність евклідових норм матриць U_p прямує до нескінченності.

Припустимо, що існує неперервна реалізація контракції $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$ з неперервною функцією $U\colon (0,1] \to \mathrm{GL}(V)$, евклідові норми значень U_ε якої не прямують до нескінченності при $\varepsilon \to 0$. Тоді можна вибрати послідовність $\{\varepsilon_p, p \in \mathbb{N}\} \subset (0,1]$ таку, що її границя дорівнює нулю, а послідовність матриць $\{U_{\varepsilon_p}, p \in \mathbb{N}\}$ обмежена. Оскільки остання послідовність реалізує послідовну контракцію $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$, приходимо до суперечності.

З огляду на зазначене вище достатньо довести, що для довільної послідовності нижньотрикутних матриць $\{L_p = (l^i_{p,j}), p \in \mathbb{N}\}$ (і ортогональної матриці $Q = (q^i_j)$), що задовольняють лему 2 з $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$ і $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}_0$, відповідна послідовність евклідових норм прямує до нескінченності.

Розглянемо обмеження на матрицю Q. Позначимо тензор структурних сталих алгебр $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}_0$ у вибраному базисі $\{e_1, \ldots, e_5\}$ основного векторного простору через $C = (c^k_{ij})$ і $C_0 = (c^k_{0,ij})$ відповідно. Тоді $C_p = C \circ L_p$ і $\widetilde{C}_0 = C_0 \circ Q$ є тензорами структурних сталих алгебр $\mathfrak{a}_p$ і $\widetilde{\mathfrak{a}}_0$, ізоморфних алгебрам $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}_0$ відносно операторів L_p і Q. За побудовою, $\lim\limits_{p\to\infty} c^k_{p,ij} = \widetilde{c}^k_{0,ij}$. Оскільки для всіх i, j, k виконується $c^k_{i5} = c^1_{ij} = c^2_{ij} = 0$, а $l^j_{p,i} = 0$ для всіх p при $i < j$, то $c^k_{p,i5} = c^1_{p,ij} = c^2_{p,ij} = 0$ виконується для всіх i, j, k та p. Тому аналогічні рівності вірні й для елементів границі $\widetilde{C}_0$, тобто $\widetilde{c}^k_{0,i5} = \widetilde{c}^1_{0,ij} = \widetilde{c}^2_{0,ij} = 0$. У той же час відповідні елементи C_0 також нульові за визначенням $\mathfrak{a}_0$. Геометрично це означає, що $Q\langle e_5\rangle = \langle e_5\rangle$ і $Q\langle e_3, e_4\rangle \subset \langle e_3, e_4, e_5\rangle$. Оскільки матриця Q ортогональна, вона є блочно-діагональною матрицею вигляду

$$Q = \begin{pmatrix} q^1_1 & q^1_2 \\ q^2_1 & q^2_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} q^3_3 & q^3_4 \\ q^4_3 & q^4_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} q^5_5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Існує ще три значення трійки (i, j, k), а саме $(1,4,3)$, $(2,4,3)$ і $(2,3,3)$, для яких структурні сталі c^k_{ij}, $c^k_{p,ij}$ (для всіх значень p), а отже, й $\widetilde{c}^k_{ij}$ дорівнюють нулю. Іншими словами, маємо систему

$$\begin{aligned}
&\widetilde{c}^3_{14} = q^1_1 q^3_3 q^3_4 + q^2_1 q^4_3 q^4_4 = 0 && (q^1_1 \bar{q}^3_3 q^3_4 + q^2_1 \bar{q}^4_3 q^4_4 = 0),\\
&\widetilde{c}^3_{24} = q^1_2 q^3_3 q^3_4 + q^2_2 q^4_3 q^4_4 = 0 && (q^1_2 \bar{q}^3_3 q^3_4 + q^2_2 \bar{q}^4_3 q^4_4 = 0),\\
&\widetilde{c}^3_{23} = q^1_2 (q^3_3)^2 + q^2_2 (q^4_3)^2 = 0 && (q^1_2 \bar{q}^3_3 q^3_3 + q^2_2 \bar{q}^4_3 q^4_3 = 0).
\end{aligned}$$

У дужках записані відповідні рівняння для комплексного випадку, а риска позначає комплексне спряження. Оскільки $q^1_1 q^2_2 - q^1_2 q^2_1 \neq 0$, то з перших двох рівнянь випливає $q^3_3 q^3_4 = 0$, $q^4_3 q^4_4 = 0$. Врахувавши ортогональність матриці Q та наведені рівняння, отримаємо дві можливості:

1) $q^3_3 = q^4_4 = 0$, тоді $q^3_4 q^4_3 \neq 0$, $q^1_1 = q^2_2 = 0$ і $q^1_2 q^2_1 \neq 0$;

2) $q^3_3 q^4_4 \neq 0$, тоді $q^3_4 = q^4_3 = 0$, $q^1_2 = q^2_1 = 0$ і $q^1_1 q^2_2 \neq 0$.

Відповідними формами матриці Q є

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_2^1 \\ q_1^2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & q_4^3 \\ q_3^4 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} q_5^5 \end{pmatrix} \qquad \text{та} \qquad Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & 0 \\ 0 & q_2^2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} q_3^3 & 0 \\ 0 & q_4^4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} q_5^5 \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що матрицю Q визначено з точністю до домноження на матрицю ортогонального автоморфізму алгебри $\mathfrak{a}_0$ зліва та на ортогональну діагональну матрицю справа (див. зауваження 1). Заміна базису $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3, \widetilde{e}_4, \widetilde{e}_5) = (e_2, e_1, e_4, e_3, e_5)$, що є ортогональним автоморфізмом алгебри $\mathfrak{a}_0$, зводить перший випадок до другого, де матриця Q діагональна. Таким чином, достатньо розглянути лише випадок, коли Q є одиничною матрицею, тобто $\widetilde{C}_0 = C_0$. Для ще не використаних значень (i,j,k) подамо умови $\lim\limits_{p\to\infty} c_{p,ij}^k = c_{0,ij}^k$ у вигляді

$$c_{p,ij}^k := l_{p,i}^{i'} l_{p,j}^{j'} \hat{l}_{p,k'}^k c_{ij}^k = c_{0,ij}^k + o_{p,ij}^k,$$

де $\widehat{L}_p = (\hat{l}_{p,j}^i) = L_p^{-1}$ позначає матрицю, обернену до L_p, і $\lim\limits_{p\to\infty} o_{p,ij}^k = 0$. У результаті отримуємо систему рівнянь на величини $l_{p,j}^i$ і $o_{p,ij}^k$ (тут індекс p опускаємо для стислості викладення)

$$\begin{gathered} l_1^1 = 1 + o_{13}^3, \qquad l_2^2 = 1 + o_{24}^4, \qquad l_1^2 = o_{14}^4, \\ l_1^1 \frac{l_2^3}{l_3^3} = o_{12}^3, \qquad l_2^2 \frac{l_3^4}{l_4^4} = o_{23}^4, \qquad -l_2^2 \frac{l_4^5}{l_5^5} = o_{24}^5, \\ -l_2^2 \frac{l_1^4}{l_4^4} + l_1^2 \frac{l_2^4}{l_4^4} - l_1^1 \frac{l_2^3}{l_3^3} \frac{l_3^4}{l_4^4} = o_{12}^4, \qquad -l_1^1 \frac{l_3^5}{l_5^5} + (l_1^1 - l_1^2) \frac{l_3^4}{l_4^4} \frac{l_4^5}{l_5^5} = o_{13}^5, \\ -l_1^2 \frac{l_4^5}{l_5^5} = o_{14}^5, \qquad -l_2^2 \frac{l_3^4}{l_4^4} \frac{l_4^5}{l_5^5} = o_{23}^5, \qquad -(l_1^1 - l_1^2) \frac{l_3^4}{l_4^4} = o_{13}^4, \\ \frac{l_1^1 l_2^2}{l_5^5} - l_1^1 \frac{l_2^3}{l_3^3} \frac{l_3^5}{l_5^5} - \left(-l_2^2 \frac{l_1^4}{l_4^4} + l_1^2 \frac{l_2^4}{l_4^4} - l_1^1 \frac{l_2^3}{l_3^3} \frac{l_3^4}{l_4^4} \right) \frac{l_4^5}{l_5^5} = o_{12}^5. \end{gathered}$$

Розв'язавши рівняння в перших двох рядках відносно l_2^3, l_3^4, l_4^5, l_1^4 і l_3^5 та підставивши отриманий вираз у останнє рівняння, маємо

$$\frac{l_1^1 l_2^2}{l_5^5} = o_{12}^5 - \frac{o_{24}^5}{l_2^2} o_{12}^4 - \left(o_{13}^5 + \frac{l_1^1 - l_1^2}{(l_2^2)^2} o_{23}^4 o_{24}^5 \right) \frac{o_{12}^3}{l_1^1}.$$

З останньої рівності випливає, що $l_{p,1}^1 l_{p,2}^2 / l_{p,5}^5 \to 0$, тобто $|l_{p,5}^5| \to \infty$ при $p \to \infty$. Отже, послідовність евклідових норм матриць L_p, $p \in \mathbb{N}$, також прямує до нескінченності. Зазначимо, що рівняння в третьому рядку системи не накладають додаткових обмежень на елементи матриць L_p, а з шостого та восьмого рівнянь випливає, що

$$\frac{l_{p,4}^5}{l_{p,5}^5} \to 0 \qquad \text{і} \qquad \frac{l_{p,3}^5}{l_{p,5}^5} \to 0 \qquad \text{при} \qquad p \to \infty.$$

Тепер покажемо, що елемент за номером $(5,5)$ довільної матриці контракції у вибраному базисі алгебр $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}_0$ з точністю до автоморфізмів алгебр $\mathfrak{a}$ і $\mathfrak{a}_0$ прямує до нескінченності в граничній точці.

Нехай $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$ — послідовна контракція за послідовністю матриць $\{U_p, p \in \mathbb{N}\}$. Знову розкладемо кожну матрицю U_p на її нижньотрикутну та ортогональну частини L_p і Q_p: $U_p = L_p Q_p$. Оскільки границя кожної збіжної підпослідовності $\{Q_p, p \in \mathbb{N}\}$ має вигляд (1), отримуємо, що

$$q^i_{p,5} \to 0, \qquad i = 1, \ldots, 4, \qquad \text{і} \qquad |q^5_{p,5}| \to 1 \qquad \text{при} \qquad p \to \infty.$$

Для відповідних підпослідовностей послідовності $\{L_p, p \in \mathbb{N}\}$ виконуються граничні співвідношення

$$|l^5_{p,5}| \to \infty, \qquad \frac{l^5_{p,4}}{l^5_{p,5}} \to 0 \qquad \text{і} \qquad \frac{l^5_{p,3}}{l^5_{p,5}} \to 0 \qquad \text{при} \qquad p \to \infty.$$

Отже, ці граничні співвідношення виконуються і для самої послідовності $\{L_p, p \in \mathbb{N}\}$ (інакше приходимо до суперечності). Використовуючи зауваження 1, для кожного p домножимо матрицю L_p зліва на матрицю

$$M_p = E - \frac{1}{l^1_{p,1}}\left(l^5_{p,1} - \frac{l^2_{p,1}}{l^2_{p,2}} l^5_{p,2}\right) E^5_1 - \frac{l^5_{p,2}}{l^2_{p,2}} E^5_2,$$

що відповідає автоморфізму алгебри $\mathfrak{a}$. Тут E позначає одиничну матрицю розміру $n \times n$, а E^i_j — матрицю $n \times n$ з одиницею на перетині i-го рядка та j-го стовпчика й нулями на інших місцях. Елементи $\widetilde{l}^5_{p,1}$ і $\widetilde{l}^5_{p,2}$ матриці $\widetilde{L}_p = M_p L_p$ дорівнють нулю. Тому елемент за номером $(5,5)$ матриці $\widetilde{U}_p = \widetilde{L}_p Q_p = M_p U_p$ має вигляд

$$(\widetilde{U}_p)^5_5 = \left(\frac{\widetilde{l}^5_{p,3}}{\widetilde{l}^5_{p,5}} q^3_{p,5} + \frac{\widetilde{l}^5_{p,4}}{\widetilde{l}^5_{p,5}} q^4_{p,5} + q^5_{p,5}\right) \widetilde{l}^5_{p,5},$$

а отже, його модуль прямує до нескінченності.

Доведення у випадку неперервної контракції аналогічне. Єдина відмінність полягає в неперервності за параметром контракції ε. Процес ортогоналізації Грама–Шмідта, застосований до матриці контракції U_ε, приводить до розкладу, в якому і нижньотрикутна частина L_ε, і ортогональна частина Q_ε є неперервними матричними функціями від ε. Тоді відповідний автоморфізм M_ε алгебри $\mathfrak{a}$, що зануляє елементи з номерами $(5,1)$ і $(5,2)$ матриці L_ε, є неперервним за ε, з чого випливає неперервність матриці $\widetilde{U}_\varepsilon = M_\varepsilon U_\varepsilon$.

1. *Campoamor-Stursberg R.* Some comments on contractions of Lie algebras // Adv. Studies Theor. Phys. – 2008. – **2**. – P. 865–870.
2. *Nesterenko M. O., Popovych R. O.* Contractions of low-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. – 2006. – **47**. – 123515, 45 p.; arXiv:math-ph/0608018.
3. *Popovych D. R., Popovych R. O.* Lowest dimensional example on non-universality of generalized Inönü–Wigner contractions // J. Algebra. – 2010. – **324**. – P. 2742–2756.
4. *Weimar-Woods E.* Contractions, generalized Inönü–Wigner contractions and deformations of finite-dimensional Lie algebras // Rev. Math. Phys. – 2000. – **12**. – P. 1505–1529.
5. *Мубаракзянов Г. М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. вузов. Матем. – 1963. – № 3(34). – С. 99–106.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 26.12.2013

Д. Р. Попович

Контракции между алгебрами Ли с обязательно сингулярными компонентами матрицы контракции

Приведен пример контракции между пятимерными алгебрами Ли, которая реализуется только матрицами с эвклидовыми нормами, с необходимостью стремящимися к бесконечности в граничном значении параметра. Размерность пять является наименьшей для алгебр Ли, между которыми существуют контракции такого типа.

D. R. Popovych

A contraction between Lie algebras with necessarily singular components of the contraction matrix

We present an example of a contraction between five-dimensional Lie algebras that is realized only with matrices, whose Euclidean norms necessarily approach infinity at the limit value of the contraction parameter. Dimension five is the lowest dimension of Lie algebras, between which contractions of the above kind exist.