

В. В. Чехов

**О МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛ  
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: v\_chekhov@ukr.net*

**Abstract.** The analytical expressions are obtained for the components of Jacobi matrix of the tensor-matrix system equations of the finite elements method, which describes the large deformations of incompressible elastic body. To derive the expressions, the apparatus of differentiation over the tensor argument is used. The findings are valid for the general three-dimensional case including the case of plane strain. Basing on the modified numerical method, which uses the Jacobi matrix, the stress-strain state is calculated for the turned inside out cylinder of quadratic cross-section.

**Key words:** finite elements method, tensor-matrix system equations, large deformations, Finger strain measure, incompressible elastic body, derivative matrix, Jacobi matrix, turned inside out cylinder.

**Введение.**

Задачи, связанные с определением напряжённо-деформированного состояния нагруженных упругих тел при учёте больших деформаций исследованы в [10 – 14, 17 – 24]. При численном решении таких задач в большинстве применяемых методов используют матрицу производных (называемую также матрицей Якоби [4]) – непосредственно при решении системы нелинейных алгебраических уравнений или при контроле равновесия промежуточных состояний (в случае использования инкрементальных методов). В [12] получена и протестирована система нелинейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (МКЭ), позволяющая решать задачи статического нагружения тел из несжимаемых материалов с учётом больших деформаций. В системе не использованы линеаризация и инкрементальные теории, что позволяет избежать характерных для них проблем, таких, как, например, вырождение касательной матрицы жёсткости при прохождении сингулярных точек [2], либо появление «ложных» точек бифуркации [1]. Настоящая работа посвящена построению для этой системы матрицы Якоби и представлению результатов числового примера.

**§1. Постановка задачи.**

Система уравнений, описанная в [12], имеет вид

$$\begin{aligned} \{\bar{A}(\{\bar{R}\}, \{p\})\} &= \{\bar{K}(\{\bar{R}\}, \{p\})\} + 2([L] + {}^{[4]}[M]\{\bar{R}\}) \cdot \{\bar{R}\} \{\bar{R}\} - \{\bar{f}\} = \{\bar{0}\}; \\ \{B(\{\bar{R}\})\} &= \{0\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\{\bar{f}\}$  – столбец узловых нагрузок;  $\{\bar{R}\}$  и  $\{p\}$  – неизвестные (соответственно, столбец узловых радиус-векторов деформированной конфигурации и столбец величин среднего давления в конечных элементах (КЭ), соответствующего условию

несжимаемости); столбец  $\{B\}$  отображает изменение объёма элементов при деформировании и имеет такие компоненты:

$$B_{[\alpha]} = \iiint_{\mathcal{V}_{[\alpha]}} (III((\overset{0}{\nabla}\vec{r})_{[\alpha]}) - 1) d\mathcal{V},$$

где  $\alpha$  – номер КЭ;  $III$  – кубический инвариант;  $(\overset{0}{\nabla}\vec{r})_{[\alpha]} = \sum_i \overset{0}{\nabla}N_{[\alpha i]}\vec{R}_{[i]}$  – конечноэлемент-

ная аппроксимация градиента места  $\overset{0}{\nabla}\vec{r}$  внутри  $\alpha$ -го КЭ ( $N_{[\alpha i]}$  – функция формы, относящаяся к  $\alpha$ -му КЭ и  $i$ -му узлу); остальные матричные объекты получают в результате операции сборки по всем КЭ ( $\{\vec{K}\} = \sum_{\alpha} \{\vec{K}_{[\alpha]}\}$ ;  $[L] = \sum_{\alpha} [L_{[\alpha]}]$ ;  ${}^{[4]}[M] = \sum_{\alpha} {}^{[4]}[M_{[\alpha]}]$ ) и имеют следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \vec{K}_{[\alpha i]} &= -P_{[\alpha]} \iiint_{\mathcal{V}_{[\alpha]}} (\overset{0}{\nabla}\vec{r})_{[\alpha]}^{-1} \cdot \overset{0}{\nabla}N_{[\alpha i]} d\mathcal{V}; \quad L_{[\alpha ij]} = \iiint_{\mathcal{V}_{[\alpha]}} {}_1\Psi_{[\alpha]} \overset{0}{\nabla}N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla}N_{[\alpha j]} d\mathcal{V}; \\ M_{[\alpha ijkl]} &= \iiint_{\mathcal{V}_{[\alpha]}} {}_2\Psi_{[\alpha]} \left( \overset{0}{\nabla}N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla}N_{[\alpha j]} \right) \left( \overset{0}{\nabla}N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla}N_{[\alpha l]} \right) d\mathcal{V}, \end{aligned}$$

где  $i, j, k$  – номера узлов сетки;  ${}_1\Psi_{[\alpha]}$  и  ${}_2\Psi_{[\alpha]}$  – функции от инвариантов меры деформации из уравнения состояния материала  $\alpha$ -го КЭ в форме Фингера [7].

Задача построения для системы (1.1) матрицы Якоби  $[\partial(\vec{A}, B)/\partial(\vec{R}, p)]$  значительно облегчается, если учитывать структурированность системы (1.1): компонентами составляющих её матриц могут быть не только числа, но и, в общем случае, тензорные объекты различных рангов. Это приводит к использованию аппарата для дифференцирования по тензорному аргументу.

## §2. Дифференцирование по тензорному аргументу.

Порядок такого дифференцирования описан в [7] на примере случая, когда аргумент имеет 2-ой ранг. Производная по тензору определяется как множитель при слагаемом в вариации функции, линейном относительно вариации независимого переменного. Нетрудно распространить этот подход на дифференцирование по тензору 1-го ранга. Например, для скалярной функции  $a(\vec{r})$  получаем

$$\delta a = \frac{\partial a}{\partial r^s} \delta r^s = \frac{\partial a}{\partial r^s} \delta r^t \delta_i^s = \frac{\partial a}{\partial r^s} \delta r^t \vec{e}^s \cdot \vec{e}_i = \left( \frac{\partial a}{\partial r^s} \vec{e}^s \right) \cdot (\delta r^t \vec{e}_i) = \frac{da}{d\vec{r}} \cdot \delta \vec{r}.$$

Таким образом, производные от скаляра и, аналогично, от тензоров 1-го и 2-го рангов будут тензорами, соответственно, 1-го, 2-го и 3-го рангов

$$\frac{da}{d\vec{r}} = \frac{\partial a}{\partial r^s} \vec{e}^s; \quad \frac{d\vec{f}}{d\vec{r}} = \frac{\partial f^s}{\partial r^t} \vec{e}_s \vec{e}^t; \quad \frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}} = \frac{\partial q^{st}}{\partial r^p} \vec{e}_s \vec{e}_t \vec{e}^p.$$

В частности,  $d\vec{r}/d\vec{r} = \mathbf{1}$ , где  $\mathbf{1} = \vec{e}_s \vec{e}^s$  – метрический тензор.

Из вариации скалярного произведения

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) &= (\delta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{q} = \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} \right) \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} = \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}} \cdot \mathbf{1} \cdot \delta \vec{r} \right) \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}} \cdot \delta \vec{r} = \\ &= \left( \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}} \cdot \vec{e}^s \right) \cdot \mathbf{q} \vec{e}_s + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}} \right) \cdot \delta \vec{r} \end{aligned}$$

следует такое равенство:

$$\frac{d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{d\bar{r}} = \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}} \cdot \bar{e}^s \right) \cdot \mathbf{q} \bar{e}_s + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\bar{r}}.$$

Можно получить также и другие необходимые соотношения для дифференцирования сложных функций;

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{d\bar{r}} &= \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}} \cdot \bar{e}^s \right) \cdot \mathbf{q} \bar{e}_s + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{d\bar{r}}; & \frac{d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})}{d\bar{r}} &= \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}} \cdot \bar{e}^s \right) \cdot \mathbf{p} \bar{e}_s + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}}; \\ \frac{d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{p})}{d\bar{r}} &= \left( \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}} \cdot \bar{e}^s \right) \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}} \cdot \bar{e}^s \right) \right) \cdot \mathbf{p} \bar{e}_s + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}}; \\ \frac{d(\mathbf{p}^{-1})}{d\bar{r}} &= -\mathbf{p}^{-1} \cdot \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}} \cdot \bar{e}^s \right) \cdot \mathbf{p}^{-1} \bar{e}_s; & \frac{d(a\mathbf{p})}{d\bar{r}} &= \mathbf{p} \frac{da}{d\bar{r}} + a \frac{d\mathbf{p}}{d\bar{r}}; & \frac{d(a\bar{f})}{d\bar{r}} &= \bar{f} \frac{da}{d\bar{r}} + a \frac{d\bar{f}}{d\bar{r}}; \\ \frac{d(\bar{f}\bar{g})}{d\bar{r}} &= \frac{d\bar{f}}{d\bar{r}} \cdot \bar{e}^s \bar{g} \bar{e}_s + \bar{f} \frac{d\bar{g}}{d\bar{r}}; & \frac{d(ab)}{d\bar{r}} &= b \frac{da}{d\bar{r}} + a \frac{db}{d\bar{r}}; & \frac{d(a^3)}{d\bar{r}} &= 3a^2 \frac{da}{d\bar{r}}. \end{aligned}$$

### §3. Построение матрицы Якоби.

При использовании этих соотношений для построения матрицы Якоби системы (1.1) операцию тензорного дифференцирования обозначим символом частной производной, поскольку сами тензоры выступают теперь в роли матричных компонент.

Матрица Якоби будет, очевидно, состоять из четырёх блоков

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\bar{A}, B)}{\partial(\bar{R}, p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{R}} \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial B}{\partial \bar{R}} \\ [0] \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Получим аналитические выражения для этих блоков. В блоке  $\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{R}} \end{bmatrix}$  обозначим

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{R}} \end{bmatrix} &= \sum_{\alpha} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{R}} \end{bmatrix}_{[\alpha]} + 2 \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial([L]\{\bar{R}\})}{\partial\{\bar{R}\}} \end{bmatrix}_{[\alpha]} + \begin{bmatrix} \frac{\partial(((^{[4]}[M]\{\bar{R}\}) \cdot \{\bar{R}\})\{\bar{R}\})}{\partial\{\bar{R}\}} \end{bmatrix}_{[\alpha]} \right) \right) = \\ &= \sum_{\alpha} \left( [\mathbf{DK}]_{[\alpha]} + 2([\mathbf{DL}]_{[\alpha]} + [\mathbf{DM}]_{[\alpha]}) \right). \end{aligned}$$

Применение аппарата тензорного дифференцирования и необходимых преобразований даёт для матриц  $[\mathbf{DK}]_{[\alpha]}$ ,  $[\mathbf{DL}]_{[\alpha]}$  и  $[\mathbf{DM}]_{[\alpha]}$  такие компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{DK}_{[\alpha in]} &= \frac{\partial \bar{K}_{[\alpha in]}}{\partial \bar{R}_{[n]}} = p_{[\alpha]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \left( \bar{\nabla}^{\bar{r}} \right)_{[\alpha]}^{-1} \cdot \bar{\nabla}^{\bar{r}} N_{[\alpha n]} \left( \bar{\nabla}^{\bar{r}} \right)_{[\alpha]}^{-1} \cdot \bar{\nabla}^{\bar{r}} N_{[\alpha in]} d\mathfrak{v}; \\ \mathbf{DL}_{[\alpha in]} &= \frac{\partial([L]_{[\alpha]} \{\bar{R}\})_{[i]}}{\partial \bar{R}_{[n]}} = \sum_j \bar{R}_{[j]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \bar{\nabla}^{\bar{r}} N_{[\alpha i]} \cdot \bar{\nabla}^{\bar{r}} N_{[\alpha j]} \frac{\partial {}_1\Psi_{[\alpha]}}{\partial \bar{R}_{[n]}} d\mathfrak{v} + \mathbf{1}L_{[\alpha in]}; \\ \mathbf{DM}_{[\alpha in]} &= \frac{\partial}{\partial \bar{R}_{[n]}} \left( \left( ({}^{[4]}[M]_{[\alpha]} \{\bar{R}\}) \cdot \{\bar{R}\} \right) \{\bar{R}\} \right)_{[i]} = \\ &= \sum_k \sum_j \left( \bar{R}_{[k]} \cdot \bar{R}_{[j]} \right) \left( \sum_l \bar{R}_{[l]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \left( \bar{\nabla}^{\bar{r}} N_{[\alpha i]} \cdot \bar{\nabla}^{\bar{r}} N_{[\alpha j]} \right) \left( \bar{\nabla}^{\bar{r}} N_{[\alpha k]} \cdot \bar{\nabla}^{\bar{r}} N_{[\alpha l]} \right) \frac{\partial {}_2\Psi_{[\alpha]}}{\partial \bar{R}_{[n]}} d\mathfrak{v} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{1} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} {}_2\Psi_{[\alpha]} \left( \begin{matrix} \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \\ \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \\ \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \end{matrix} \right) d\mathfrak{v} \Big) + \bar{R}_{[k]} \bar{R}_{[j]} \times$$

$$\times \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} {}_2\Psi_{[\alpha]} \left( \left( \begin{matrix} \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \\ \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \\ \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \end{matrix} \right) + \left( \begin{matrix} \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \\ \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \\ \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \end{matrix} \right) \right) d\mathfrak{v} \Big).$$

Блок  $\left[ \frac{\partial \bar{A}}{\partial p} \right]$  с учётом того, что  $\left[ \frac{\partial \bar{A}}{\partial p} \right] = \left[ \frac{\partial \bar{K}}{\partial p} \right] = \frac{\partial}{\partial \{p\}} \Sigma \alpha \{ \bar{K} \}_{[\alpha]} = \frac{\partial}{\partial \{p\}} \Sigma \beta \{ \bar{K} \}_{[\beta]}$ , имеет

следующие компоненты:  $\left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial p} \right)_{[\alpha]} = \frac{\partial \sum_{\beta} \bar{K}_{[\beta i]}}{\partial p_{[\alpha]}} = \frac{\partial \bar{K}_{[\alpha i]}}{\partial p_{[\alpha]}} = - \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} (\overset{0}{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]}^{-1} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} d\mathfrak{v}$ .

Наконец, блок  $\left[ \frac{\partial \bar{B}}{\partial R} \right]$  определим для двух вариантов расчёта.

**1. Общий трёхмерный случай.** Детерминант градиента места имеет вид

$$III((\overset{0}{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]}) = S_1^1 S_2^2 S_3^3 + S_1^2 S_2^3 S_3^1 + S_1^3 S_2^1 S_3^2 - S_1^1 S_2^3 S_3^2 - S_2^2 S_3^1 S_1^3 - S_3^3 S_1^2 S_2^1, \text{ где введено обозначение } S_p^q = \sum_i \overset{0}{\nabla}_p N_{[\alpha i]} R_{[i]}^q.$$

Применение тензорного дифференцирования  $\frac{\partial S_p^q}{\partial \bar{R}_{[n]}} = \nabla_p N_{[\alpha n]} \bar{e}^q$  и необходимых аналитических преобразований даёт

$$\left( \frac{\partial B}{\partial \bar{R}} \right)_{[\alpha n]} = \frac{\partial B_{[\alpha]}}{\partial \bar{R}_{[n]}} = \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \frac{\partial III((\overset{0}{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]})}{\partial \bar{R}_{[n]}} d\mathfrak{v} = \sum_i \sum_j \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \left( \overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha n]} (\overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha i]} \overset{0}{\nabla}_3 N_{[\alpha j]} - \overset{0}{\nabla}_3 N_{[\alpha i]} \overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha j]}) + \overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha n]} (\overset{0}{\nabla}_3 N_{[\alpha i]} \overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha j]} - \overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha i]} \overset{0}{\nabla}_3 N_{[\alpha j]}) + \overset{0}{\nabla}_3 N_{[\alpha n]} (\overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha i]} \overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha j]} - \overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha i]} \overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha j]}) \right) d\mathfrak{v} \left( \bar{R}_{[i]}^2 \bar{R}_{[j]}^3 \bar{e}^1 + \bar{R}_{[i]}^3 \bar{R}_{[j]}^1 \bar{e}^2 + \bar{R}_{[i]}^1 \bar{R}_{[j]}^2 \bar{e}^3 \right).$$

**2. Случай плоской деформации.** Градиент места в этом случае имеет вид  $(\overset{0}{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]} = S_{\bar{p}}^q \bar{e}^{\bar{p}} \bar{e}_q^0 + \bar{e}^3 \bar{e}_3^0$  (по индексам с чертой суммировать до 2). Поэтому для детерминанта градиента места имеем

$$III((\overset{0}{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]}) = S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1;$$

$$\left( \frac{\partial B}{\partial \bar{R}} \right)_{[\alpha n]} = \sum_i \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \left( \overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha n]} \overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha i]} - \overset{0}{\nabla}_2 N_{[\alpha n]} \overset{0}{\nabla}_1 N_{[\alpha i]} \right) d\mathfrak{v} \left( \bar{R}_{[i]}^2 \bar{e}^1 - \bar{R}_{[i]}^1 \bar{e}^2 \right) =$$

$$= \sum_i \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \left( \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \times \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \right)^3 d\mathfrak{v} \left( \bar{e}^{\bar{s}} \bar{e}_s^0 \times \bar{R}_{[i]} \right) \cdot \bar{e}_3^0.$$

#### §4. Дифференцирование инвариантов тензора меры деформации.

В полученных выражениях для компонент подматрицы  $\left[ \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{R}} \right]$  имеют место производные функций  ${}_1\Psi$  и  ${}_2\Psi$  от инвариантов меры деформации  $I(\mathbf{b})$  и  $II(\mathbf{b})$ . Для определения этих производных необходимо продифференцировать  $I(\mathbf{b})$  и  $II(\mathbf{b})$ . Дифференцирование меры деформации Фингера после упрощений приводит к равенству

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{[\alpha]}}{\partial \bar{R}_{[n]}} = \frac{\partial}{\partial \bar{R}_{[n]}} \left( (\bar{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]}^T \cdot (\bar{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]} \right) = \sum_i \left( \bar{\nabla} N_{[\alpha n]} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha i]} \right) \left( \bar{e}^s \bar{R}_{[i]}^0 \bar{e}_s + \bar{R}_{[i]}^0 \mathbf{1} \right).$$

Отсюда производная линейного инварианта меры Фингера –

$$\frac{\partial}{\partial \bar{R}_{[n]}} I(\mathbf{b}_{[\alpha]}) = \frac{\partial}{\partial \bar{R}_{[n]}} (\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}_{[\alpha]}) = 2 \bar{\nabla} N_{[\alpha n]} \cdot (\bar{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]},$$

а производная квадратичного инварианта имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{R}_{[n]}} II(\mathbf{b}_{[\alpha]}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{R}_{[n]}} (I(\mathbf{b}_{[\alpha]})^2 - I(\mathbf{b}_{[\alpha]}^2)) = 2 \sum_i \sum_j \sum_k \left( \bar{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \times \\ &\times \left( \bar{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha n]} \right) - \left( \bar{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha n]} \right) \left( \bar{\nabla} N_{[\alpha j]} \cdot \bar{\nabla} N_{[\alpha k]} \right) \left( \bar{R}_{[i]} \cdot \bar{R}_{[j]} \right) \bar{R}_{[k]}. \end{aligned}$$

Для определения и дифференцирования самих функций  ${}_1\Psi$  и  ${}_2\Psi$ , следует задать используемую модель материала. Дифференцирование функций модели материала выполним на примере материала Муни [3, 8]

$${}_1\Psi = {}_1C + I(\mathbf{b}) {}_2C; \quad {}_2\Psi = - {}_2C.$$

С использованием приведенных выше выражений для производных от инвариантов  $\mathbf{b}$  получаем равенство

$$\frac{\partial {}_1\Psi_{[\alpha]}}{\partial \bar{R}_{[n]}} = 2 {}_2C_{[\alpha]} \bar{\nabla} N_{[\alpha n]} \cdot (\bar{\nabla} \bar{r})_{[\alpha]}; \quad \frac{\partial {}_2\Psi_{[\alpha]}}{\partial \bar{R}_{[n]}} = 0.$$

#### §5. Об эффективности решения трехмерных задач.

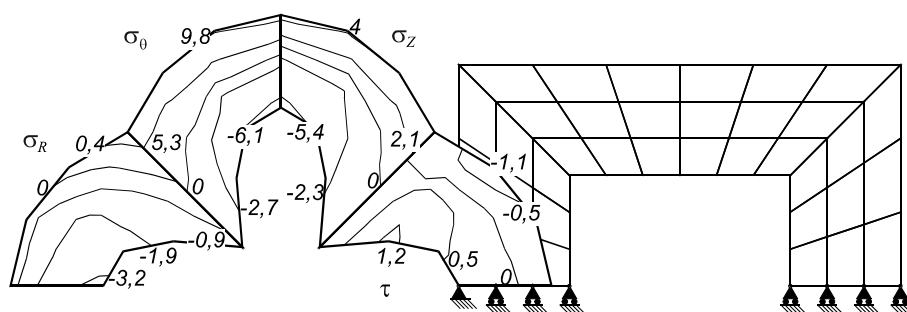
Таким образом, при помощи аппарата дифференцирования по тензорному аргументу получены аналитические выражения для компонент матрицы Якоби системы (1.1). Использование этих соотношений позволяет существенно увеличить качество либо скорость расчётов, так как при их отсутствии необходимо либо применять методы, не использующие матрицу Якоби, либо аппроксимировать эту матрицу через конечные разности, что существенно снижает скорость вычислений. Например, при решении задачи о выворачивании цилиндра [12] аналитическое вычисление матрицы Якоби в сравнении с конечноразностным ускорило расчёт примерно в 60 раз (с одного часа до одной минуты; все расчёты проведены без учёта разреженности и симметрии матриц).

Упомянутый пример расчёта относится к применению обычного метода Ньютона. В этом случае возможны проблемы со сходимостью (в частности, их наличие отмечено в [12]). Однако, использованный при расчётах решатель [15] позволяет при наличии возможности аналитического вычисления матрицы Якоби применять и другие, более эффективные и лучше сходящиеся методы. Для проверки действия этих методов была рассмотрена более сложная задача.

Задачи определения состояния тел, вывернутых наизнанку [5 – 7] (среди которых встречаются и имеющие практическую ценность [9, 13, 16]), являются хорошим тестом для методов решения задач с учётом больших деформаций. Ниже представлен результат отыскания вывернутого наизнанку состояния полой квадратной призмы. Задача является достаточно сложной: попытки применить к ней обычный метод Ньютона привели к расходящемуся процессу (в литературе решение этой задачи не представлено). Толщина стенок призмы в сравнении со случаем полого кругового цилиндра [12] была уменьшена (внешний размер сечения 12 см, размер отверстия 6 см), иначе возникали самопересечения в деформированном состоянии (константы материала Муни:  ${}_1C = 0,15$  МПа;  ${}_2C = 0,094$  МПа).

В качестве начального приближения для поиска инвертированного состояния была задана форма кругового сечения. Задачу удалось решить при помощи глобально сходящейся модификации метода Ньютона [15]; процесс занял шесть итераций. Для других доступных методов (Ньютона, гибридный метод Пауэлла) сходимости не наблюдалось.

Использованную конечноэлементную модель и результаты расчёта демонстрирует рисунок.



В каждой из четвертей деформированной конфигурации тела показано распределение одной из компонент тензора напряжений Коши (в МПа). Индексами цилиндрических координат они обозначены условно (кроме  $z$ -компоненты), так как в роли координатных линий здесь выступают не окружности, а подобные циклоидам линии локальных направлений элементов (одно вдоль одной из локальных осей КЭ, другое ортогонально ему), что для данного тела, по-видимому, более информативно, поскольку эти линии повторяют форму тела.

В частности, можно видеть, что по «радиальной» компоненте имеет место сжатие почти везде, кроме зон вблизи вогнутых углов, а по «кольцевой» и осевой компонентам – растяжение на внешних слоях и сжатие на внутренних, причём максимумы достигаются на серединах сторон исходного квадрата, в местах их максимального изгиба. Отметим, что при использовании более экономной расчётной схемы, содержащей не половину, а четверть формы тела (по образцу [6]), инвертированное состояние получить не удалось: итерации «убегали» к исходному состоянию (по-видимому, из-за того, что оно, в отличие от рассмотренной выше схемы, находится довольно близко к недеформированному состоянию).

Таким образом, использование представленных выше аналитических выражений для компонент матрицы частных производных системы (1.1) позволяет повысить эффективность и скорость её решения, и получить достаточно интересные результаты.

### Заклучение.

Получены аналитические выражения для компонент матрицы производных тензорно-матричной системы уравнений метода конечных элементов (МКЭ) [12], описывающей большие деформации несжимаемого упругого тела. При их выведении использован аппарат дифференцирования по тензорному аргументу. Результаты получены для общего трёхмерного случая, а также для плоской деформации. При помощи численного метода, использующего эту матрицу, исследовано напряжённо-деформированное состояние вывернутой наизнанку полой квадратной призмы.

РЕЗЮМЕ. Отримано аналітичні вирази для компонент матриці похідних тензорно-матричної системи рівнянь МСЕ, що описує великі деформації нестисливого пружного тіла. При їх виведенні використано апарат диференціювання за тензорним аргументом. Результати отримано для загального тривимірного випадку, а також для плоскої деформації. За допомогою чисельного методу з використанням матриці Якобі визначено напружено-деформований стан вивернутої наворіт порожнистої квадратної призми.

1. Бережной Д.В., Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. Исследования качества уравнений геометрически нелинейной теории упругости при малых деформациях и произвольных перемещениях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 6. – С. 31 – 47.
2. Галишикова В.В. Метод расширения для вычисления продолжения решения в сингулярных точках // Вест. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. – 2011. – № 2. – С. 123 – 132.
3. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 272 с.
4. Дэнис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
5. Зеленина А.А., Зубов Л.М. Одномерные деформации нелинейно-упругих микрополярных тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 4. – С. 97 – 106.
6. Зубов Л.М., Моисеенко С.И. Устойчивость равновесия вывернутой наизнанку упругой сферы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1983. – № 5. – С. 148 – 155.
7. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
8. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 466 с.
9. Сухоруков В.П. Аэродинамическое сопротивление трубопровода, прокладываемого способом выворачивания наизнанку // Наук. вісник Нац. гірничого ун-ту. – 2009. – № 9. – С. 72 – 74.
10. Aernouts J., Couckuyt I., Crombecq K., Dirckx J.J.J. Elastic Characterization of Membranes with a Complex Shape using Point Indentation Measurements and Inverse Modelling // Int. J. Eng. Sci. – 2010. – 48, N 6. – P. 599 – 611.
11. Chamberland É., Fortin A., Fortin M. Comparison of the performance of some finite element discretizations for large deformation elasticity problems // Composites and Structures. – 2010. – 88, N 11 – 12. – P. 664 – 673.
12. Chekhov V.V. Matrix FEM equation describing the large-strain deformation of an incompressible material // Int. Appl. Mech. – 2011. – 46, N 10. – P. 1147 – 1153.
13. Conrad F., Ehrmann K., Choo J.D., Holden B.A. Finite element modeling of inverted (inside out) soft contact lenses // J. Medic. Dev. Trans. ASME. – 2010. – 4, N 2.
14. Gonçalves P.B., Pamplona D., Lopes S.R.X. Finite deformations of an initially stressed cylindrical shell under internal pressure // Int. J. Mech. Sci. – 2008. – 50, N 1. – P. 92 – 103.
15. GSL Reference Manual. <http://www.gnu.org/software/gsl/manual/gsl-ref.html>
16. Huang Y.-M. Finite element analysis of tube inversion process with radiused dies // Int. J. Adv. Manuf. Tech. – 2005. – 26, N 9 – 10. – P. 991 – 998.
17. Karami G., Grundman N., Abolfathi N., Naik A., Ziejewski M. A micromechanical hyperelastic modeling of brain white matter under large deformation // J. Mech. Behavior Biomed. Mater. – 2009. – 2. – P. 243 – 254.
18. Maksimyyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Using Mesh-Based Methods to Solve Nonlinear Problems of Statics for Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P. 32 – 56.
19. Promma N., Raka B., Grédiac M., Toussaint E., Le Cam J.-B., Balandraud X., Hild F. Application of the virtual fields method to mechanical characterization of elastomeric materials // Int. J. Solids Struct. – 2009. – 46, N 3 – 4. – P. 698 – 715.
20. Sasso M., Palmieri G., Chiappini G., Amodio D. Characterization of hyperelastic rubber-like materials by biaxial and uniaxial stretching tests based on optical methods // Polymer Testing. – 2008. – 27. – P. 995 – 1004.
21. Semenyuk N.P., Trach V. M., Ostapchuk V.V. Nonlinear Axisymmetric Deformation of Anisotropic Spherical Shells // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 10. – P. 1101 – 1111.
22. Silva C.A.C., Bittencourt M.L. Structural shape optimization of 3D nearly-incompressible hyperelasticity problems // Latin Amer. J. Solids and Struct. – 2008. – 5, N 2. – P. 129 – 156.
23. Zhu Y., Luo X.Y., Ogden R.W. Nonlinear axisymmetric deformations of an elastic tube under external pressure // Europ. J. Mech. – A/Solids. – 2010. – 29, N 2. – P. 216 – 229.
24. Zisis Th., Zafiropoulou V.I., Giannakopoulos A.E. The adhesive contact of a flat punch on a hyperelastic substrate subject to a pull-out force or a bending moment // Mech. Mater. – 2011. – 43, N 1. – P. 1 – 24.

Поступила 05.07.2011

Утверждена в печать 06.06.2013