

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикун

**СВЯЗАННЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ДОЛГОВРЕМЕННОЙ
ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ
СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: stochac@inmech..kiev.ua*

Abstract. For the laminated materials the theory of long damageability in the case of physically nonlinear components is proposed. The process of damageability of components is modeled by appearance in them of the stochastically located micropores. The criterion of destruction of individual microvolume is characterized by its long-term durability determined by dependence of time of brittle destruction on a degree of closeness of an equivalent stress to its limiting value. This value describes the short-term durability by the Huber – Mises criterion, which is assumed the stochastic function of coordinates. For the of time, the equation of damageability (porosity) balance of physically nonlinear components is formulated. The algorithms of calculation of dependences of their microdamageability on time, macrostresses on time and also corresponding curves are constructed. An influence of binder nonlinearity on macrodeformations curve and damageability is investigated.

Key words: laminated material, physical nonlinearity, stochastic structure, long-term damageability, effective characteristics, balance equation of porosity.

Введение.

При длительном воздействии нагрузок, меньших предельных, возможно внезапное разрушение элементов конструкций. Оно обусловлено появлением и развитием во времени рассеянных микроповреждений, приводящих, как правило, к образованию магистральных трещин. Физически поврежденность материала можно рассматривать как наличие рассеянных дефектов в виде микротрещин, микропустот или разрушенных микрообъемов, которые ведут к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам.

Согласно экспериментальным данным и реальному поведению элементов конструкций и сооружений повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте поврежденности во времени после приложения нагрузки. В [8] предложена структурная теория кратковременной микроповреждаемости однородных и композитных материалов, в основу которой положены уравнения механики микронеоднородных тел стохастической структуры и моделирование рассеянных микроповреждений системой квазисферических микропор [5]. Длительная повреждаемость представляет собой процесс накопления во времени рассеянных микроповреждений в виде микропор и микротрещин. На микроуровне прочность материала является неоднородной, т.е. предел мгновенной прочности и кривые длительной прочности микрообъема материала являются случайными функциями координат, описываемыми определенными плотностями или функциями распределения. При действии на макрообразец постоянных напряжений часть микрообъемов, предел

прочности которых ниже эквивалентного напряжения, разрушится, т.е. на их месте образуются микротрещины или микрополости. На тех микроучастках, где напряжения меньше пределов прочности, но близки к ним, разрушение происходит через некоторый промежуток времени, который зависит от степени близости напряжения к пределу микропрочности. В [9] на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред построена теория длительной повреждаемости однородного, зернистого и слоистого материалов.

В условиях достаточно высокого уровня нагружения у многих материалов зависимости между деформациями и напряжениями становятся нелинейными вследствие нелинейности их деформирования. Такой вид нелинейности характерен для металлов, а также полимерных материалов при высоких температурах. Поэтому обобщение теории длительной повреждаемости слоистых материалов [10, 11], построенной на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред, на случай физически нелинейных слоистых материалов является актуальным. Процесс повреждаемости компонентов (слоев) слоистого материала моделируется разрушением в них рассеянных микрообъемов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема компонента характеризуется его длительной прочностью, описываемой дробно-степенной или экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера – Мизеса. Предел кратковременной прочности компонента принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенной функцией распределения на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные свойства и напряженно-деформированное состояние слоистого материала с системой стохастически расположенных микроповреждений в компонентах определяются на основе стохастических уравнений упругости слоистых сред с пористыми компонентами. Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковременной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулированы для заданных макродеформаций и произвольного момента времени уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов слоистого материала. Зависимости макронапряжения – макродеформации для слоистого материала с пористыми компонентами и уравнения баланса пористости компонентов описывают совместные процессы деформирования и длительной повреждаемости слоистого материала с учетом их взаимодействия. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповрежденности компонентов слоистого материала от времени, макронапряжений от времени, а также получены соответствующие кривые. Исследовано влияние нелинейности на деформирование и микроповреждаемость слоистого материала.

§1. Физически нелинейное деформирование слоистого N -компонентного материала с изотропными компонентами описывается зависимостью объемного модуля K_ν и модуля сдвига μ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$) компонентов от деформаций. Предположим, что в процессе нагружения в компонентах материала происходят микроповреждения. Повреждаемость компонента будем моделировать образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности компонента. Для элементарного макрообъема слоистого материала имеют место зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij};$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (1.1)$$

где $\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \lambda_{13}^*, \lambda_{33}^*, \lambda_{44}^*$ – эффективные модули упругости, являющиеся функциями макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ вследствие физической нелинейности и микроповреждаемости.

Обозначим объемный модуль и модуль сдвига материала каркаса ν -компонента K_ν, μ_ν , его пористость p_ν , а объемное содержание пористого ν -компонента c_ν ($\nu = 1, \dots, N$). Тогда определение эффективных модулей упругости физически нелинейного слоистого материала с пористыми компонентами сводится к следующему алгоритму. Эффективные модули упругости композита $\lambda_{11}^*, \lambda_{12}^*, \lambda_{13}^*, \lambda_{33}^*, \lambda_{44}^*$ определяются [2, 7] через соответствующие модули компонентов $\lambda_{\nu p}, \mu_{\nu p}$ ($\nu = 1, 2, \dots, N$) формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu_p (\lambda_p + \mu_p)}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda_p \mu_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \quad \lambda_{44}^* = \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1}; \\ \lambda_{13}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где принято обозначение

$$\langle f_p \rangle = \sum_{\nu=1}^N c_\nu f_{\nu p}. \quad (1.3)$$

Эффективные модули пористого ν -компонента $K_{\nu p}, \lambda_{\nu p}, \mu_{\nu p}$ согласно [2, 6] определяются формулами

$$\begin{aligned} K_{\nu p} &= K_{\nu p} (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) = \frac{4K_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) \mu_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) (1-p_\nu)^2}{3K_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) p_\nu + 4\mu_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) (1-p_\nu)}; \quad \lambda_{\nu p} = K_{\nu p} - \frac{2}{3} \mu_{\nu p}; \\ \mu_{\nu p} &= \mu_{\nu p} (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) = \frac{[9K_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) + 8\mu_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle)] \mu_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) (1-p_\nu)^2}{3K_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) (3-p_\nu) + 4\mu_\nu (\langle \varepsilon_{lm}^{1\nu} \rangle) (2+p_\nu)} \\ & \quad (\nu = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^{1\nu} \rangle$ – средние деформации по неповрежденной части ν -компонента. Поскольку они выражаются через упругие модули компонентов K_ν, μ_ν , которые в свою очередь являются функциями средних по неповрежденной части ν -компонента деформаций, для их определения используется следующий итерационный алгоритм. В $(n+1)$ -ом приближении они связаны с соответствующими величинами в n -ом приближении зависимостями

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{kg}^{1v} \rangle^{(n+1)} &= \frac{1}{(1-p_v)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\mu_{vp} \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}}{\mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}} \langle \varepsilon_{kg}^v \rangle + \frac{1}{3} \left[\frac{K_{vp} \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}}{K_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}} - \frac{\mu_{vp} \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}}{\mu_v \langle \varepsilon_{lm}^{1v} \rangle^{(n)}} \right] \langle \varepsilon_{rr}^v \rangle + \delta_{kg} \right\} \\ &(v=1, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Средние по компонентам деформации $\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle &= \dots = \langle \varepsilon_{ij}^N \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle; & \langle \varepsilon_{i3}^v \rangle &= \frac{1}{\mu_{vp}} \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{33}^v \rangle &= \frac{1}{\lambda_{vp} + 2\mu_{vp}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left[\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle - \lambda_{vp} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \\ &(i, j=1, 2; v=1, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Нулевое приближение соответствует случаю физически линейных компонентов.

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала компонентов примем критерий прочности Губера – Мизеса [3]

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{1v} = k_v \quad (v=1, 2, \dots, N), \quad (1.7)$$

где $I_{\langle \sigma \rangle}^{1v} = (\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle'$ по неповрежденной части материала v -компонента; k_v – предел микропрочности компонента, являющийся случайной функцией координат, причем средние по неповрежденной части материала v -компонента напряжения $\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle$ связаны со средними в компоненте напряжениями $\langle \sigma_{ij}^v \rangle$ зависимостями [6]

$$\langle \sigma_{ij}^{1v} \rangle = \frac{1}{1-p_v} \langle \sigma_{ij}^v \rangle. \quad (1.8)$$

Если инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{1v}$ для некоторого микрообъема v -компонента не достигает соответствующего предельного значения k_v , то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^v , длительность которого зависит от степени близости $I_{\langle \sigma \rangle}^{1v}$ к предельному значению k_v . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^v = \varphi_v(I_{\langle \sigma \rangle}^{1v}, k_v), \quad (1.9)$$

причем $\varphi_v(k_v, k_v) = 0$, $\varphi_v(0, k_v) = \infty$ согласно (1.9).

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F_\nu(k_\nu)$ предела микропрочности k_ν неповрежденной части материала компонента является степенной закон на некотором отрезке

$$F_\nu(k_\nu) = \begin{cases} 0, & k_\nu < k_{\nu 0}; \\ \left(\frac{k_\nu - k_{\nu 0}}{k_{\nu 1} - k_{\nu 0}} \right)^{n_\nu}, & k_{\nu 0} \leq k_\nu \leq k_{\nu 1}; \\ 1, & k_\nu > k_{\nu 1}, \end{cases} \quad (1.10)$$

а также распределение Вейбулла

$$F_\nu(k_\nu) = \begin{cases} 0, & k_\nu < k_{\nu 0}; \\ 1 - \exp[-m_\nu (k_\nu - k_{\nu 0})^{n_\nu}], & k_\nu \geq k_{\nu 0}, \end{cases} \quad (1.11)$$

где $k_{\nu 0}$ – минимальное значение предела микропрочности компонента; $k_{\nu 1}$, m_ν , n_ν – детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности компонента k_ν является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микровреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_ν и распределение микронапряжений в материале компонента при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_\nu(k_\nu)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части компонента, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_ν . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{1\nu} \rangle$ функция $F_\nu(I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu})$ согласно (1.7), (1.10), (1.11) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость компонента $p_{\nu 0}$, можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов компонента или его пористости [8]

$$p_\nu = p_{\nu 0} + (1 - p_{\nu 0})F_\nu(I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu}), \quad (1.12)$$

где согласно (1.8)

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu} = \frac{1}{1 - p_\nu} I_{\langle \sigma \rangle}^\nu \left(I_{\langle \sigma \rangle}^\nu = (\langle \sigma_{ij}^{\nu} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{\nu} \rangle')^{1/2} \right), \quad (1.13)$$

причем при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ средние в ν -компоненте напряжения $\langle \sigma_{ij}^\nu \rangle$ связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ зависимостями [2]

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}^\nu \rangle = & 2\mu_{\nu p} \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \frac{\lambda_{\nu p}}{\lambda_{\nu p} + 2\mu_{\nu p}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \times \\ & \times \left[\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle + 2\mu_{\nu p} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{ij}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33}^1 \rangle = \dots = \langle \sigma_{33}^N \rangle &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left(\left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right); \\ \langle \sigma_{i3}^1 \rangle = \dots = \langle \sigma_{i3}^N \rangle &= 2 \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2; \nu = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Если напряжения в ν -компоненте $\langle \sigma_{ij}^\nu \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то, согласно критерию длительной прочности (1.9), за это время в ν -компоненте разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_ν , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^\nu = \varphi_\nu(I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu}, k_\nu), \quad (1.15)$$

где инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu}$ определяется выражением (1.13).

Время τ_k^ν хрупкого разрушения ν -компонента для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu} > 0$. В этом случае функцию долговечности ν -компонента $\varphi_\nu(I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu}, k_\nu)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью

$$\varphi_\nu(I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu}, k_\nu) = \tau_{0\nu} \left(\frac{k_\nu - I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu}}{I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu} - \gamma_\nu k_\nu} \right)^{n_{1\nu}} \quad (\gamma_\nu k_\nu \leq I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu} \leq k_\nu, \gamma_\nu < 1), \quad (1.16)$$

где некоторое характерное время $\tau_{0\nu}$, показатель $n_{1\nu}$ и коэффициент γ_ν определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности ν -компонента.

Подставляя (1.16) в (1.15), приходим к неравенству

$$k_\nu \leq I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu} \frac{1 + \bar{t}_\nu^{1/n_{1\nu}}}{1 + \gamma_\nu \bar{t}_\nu^{1/n_{1\nu}}} \quad \left(\bar{t}_\nu = \frac{t}{\tau_{0\nu}} \right). \quad (1.17)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_\nu(k_\nu)$, приходим к выводу, что функция $F_\nu[I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu} \psi_\nu(\bar{t}_\nu)]$, где

$$\psi_\nu(\bar{t}_\nu) = \frac{1 + \bar{t}_\nu^{1/n_{1\nu}}}{1 + \gamma_\nu \bar{t}_\nu^{1/n_{1\nu}}} \quad (1.18)$$

определяет в момент времени \bar{t}_ν относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала ν -компонента. Тогда с учетом (1.9) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для ν -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_\nu = p_{0\nu} + (1 - p_{0\nu}) F_\nu \left[\frac{I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu}}{1 - p_\nu} \psi_\nu(\bar{t}_\nu) \right], \quad (1.19)$$

где пористость ν -компонента p_ν является функцией безразмерного времени \bar{t}_ν , а инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{1\nu}$ определяется выражением (1.14).

Если время τ_k^V хрупкого разрушения ν -компонента имеет конечное значение для произвольных $I_{<\sigma>}^{1V}$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью

$$\varphi_\nu(I_{<\sigma>}^V, k_\nu) = \tau_{0\nu} \left\{ \exp m_{1\nu} \left[\left(\frac{k_\nu}{I_{<\sigma>}^V} \right)^{n_{1\nu}} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_{2\nu}}, \quad (1.20)$$

имеющей достаточное число постоянных $\tau_{0\nu}$, $m_{1\nu}$, $n_{1\nu}$, $n_{2\nu}$ для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (1.20) в (1.15), приходим к неравенству

$$k_\nu \leq I_{<\sigma>}^V \left[1 + \frac{1}{m_{1\nu}} \ln \left(1 + \bar{t}_\nu^{1/n_{2\nu}} \right) \right]^{1/n_{1\nu}} \left(\bar{t}_\nu = \frac{t}{\tau_{0\nu}} \right). \quad (1.21)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_\nu(k_\nu)$, приходим к выводу, что функция $F_\nu[I_{<\sigma>}^{1V} \psi_\nu(\bar{t}_\nu)]$, где

$$\psi_\nu(\bar{t}_\nu) = \left[1 + \frac{1}{m_{1\nu}} \ln \left(1 + \bar{t}_\nu^{1/n_{2\nu}} \right) \right]^{1/n_{1\nu}}, \quad (1.22)$$

определяет в момент времени \bar{t}_ν относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала ν -компонента. Тогда с учетом (1.1) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для ν -компонента при длительной повреждаемости можно представить в виде (1.19), где пористость ν -компонента p_ν является функцией безразмерного времени \bar{t}_ν , а инвариант $I_{<\sigma>}^V$ определяется выражением (1.14).

Уравнения баланса пористости (1.19) с учетом (1.14), (1.18), (или (1.22)) в начальный момент $\bar{t}_\nu = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала ν -компонента. С ростом времени уравнения (1.19), (1.14), (1.18), (или (1.22)) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

Уравнения (1.1), (1.2) – (1.6), (1.19), (1.14), (1.10) (или (1.11)), (1.18) (или (1.22)) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и длительной повреждаемости слоистого материала. Физическая нелинейность его компонентов влияет на образование пористости в них при деформировании, изменение пористости компонентов в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования слоистого материала обусловлена физической нелинейностью материала его компонентов и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в них при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и длительной повреждаемости слоистого материала при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости слоистого материала с пористыми компонентами, зависящих от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (1.2) – (1.6), и определению пористости из уравнений (1.14), (1.10) (или (1.11)), (1.18) (или (1.22)), что осуществляется также определенным итерационным методом. Представим уравнение (1.19) для n -го шага итерационного процесса (1.2) – (1.6) в виде

$$f_\nu^{(n)} = p_\nu - p_{\nu 0} - (1 - p_{\nu 0}) F_\nu \left[\frac{I_{<\sigma>}^{V(n)}}{1 - p_\nu} \psi_\nu(\bar{t}_\nu) \right]. \quad (1.23)$$

Тогда определение корня p_v уравнения (1.23) на m -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p_v^{(m,n)} = A_v f_v^{(n)}(p_v^{(m-1)}), \quad (1.24)$$

где A_v – определенный оператор, действующий на функцию $f_v^{(n)}(p_v)$. Искомый корень определяется как предельное значение

$$p_v = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} p_v^{(m,n)}. \quad (1.25)$$

§2. В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости двухкомпонентного слоистого материала с линейно-упругим жестким слоем и нелинейно деформирующимся связующим при микроповреждениях в связующем, причем объемные деформации связующего являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в его микрообъеме имеют место соотношения

$$\langle \sigma_{rr}^2 \rangle = K_2 \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle; \quad \langle \sigma_{ij}^2 \rangle' = 2\mu_2(S_2) \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'. \quad (2.1)$$

Здесь модуль объемного сжатия K_2 не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu_2(S_2)$ описывается функцией

$$\mu_2(S_2) = \begin{cases} \mu_{20}, & T_2 \leq T_{20}; \\ \mu_2' + \left(1 - \frac{\mu_2'}{\mu_{20}}\right) \frac{T_{20}}{2S_2}, & T_2 \geq T_{20}, \end{cases} \quad (2.2)$$

причем

$$S_2 = (\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle')^{1/2}; \quad T_2 = (\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' \langle \sigma_{ij}^2 \rangle')^{1/2}; \quad T_{20} = \sqrt{2/3} \sigma_{20}, \quad (2.3)$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$, $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$ – девиаторы, соответственно, тензоров деформаций и напряжений в связующем; σ_{20} – предел пропорциональности на растяжение для него, который принимаем независимым от координат; μ_{20} , μ_2' – постоянные материала связующего.

Алгоритм определения корня p_2 уравнения (1.23) будем строить на основе метода секущих [1]. Так как корень p_2 находится в интервале $[p_{20}, 1]$, что следует из неравенств

$$f_2^{(n)}(p_{20}) \leq 0; \quad f_2^{(n)}(1) \geq 0, \quad (2.4)$$

то, согласно методу секущих, нулевое приближение корня $p_2^{(0,n)}$ определяется формулой

$$p_2^{(0,n)} = \frac{a_2^{(0)} f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - b_2^{(0)} f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}, \quad (2.5)$$

где $a_2^{(0)} = p_{20}$, $b_2^{(0)} = 1$. Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p_2^{(m,n)} = A_2 f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) = \frac{a_2^{(m)} f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - b_2^{(m)} f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}; \quad (2.6)$$

$$a_2^{(m)} = a_2^{(m-1)}; \quad b_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)} \quad \text{при} \quad f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \leq 0;$$

$$a_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)}; \quad b_2^{(m)} = b_2^{(m-1)} \quad \text{при} \quad f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \geq 0$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$\left| f_2^{(n)}(p_2^{(m,n)}) \right| < \delta, \quad (2.7)$$

где δ – точность вычисления корня.

На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости слоистого материала для распределения Вейбулла (1.11) и для дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (1.22). В качестве жесткого слоя и связующего были приняты, соответственно, линейно – упругие слои с характеристиками [4] и объемным содержанием

$$K_1 = 38,89 \text{ ГПа}; \quad \mu_1 = 29,17 \text{ ГПа}; \quad c_1 = 0; \quad 0,25; \quad 0,5; \quad 0,75; \quad 1,0 \quad (2.8)$$

и связующее, которое имеет диаграмму линейного упрочнения (2.1), (2.2) с постоянными [2, 4]

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_{20} = 1,11 \text{ ГПа}; \quad \mu_2' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (2.9)$$

и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение

$$\sigma_{2p} = \sqrt{\frac{3}{2}} k_{20}$$

$$\sigma_{20} = 0,003 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа}, \quad (2.10)$$

а также

$$p_{02} = 0; \quad k_{02} / \mu_2 = 0,01; \quad m_2 = 1000; \quad \alpha_2 = 2; \quad \gamma_2 = 0,05; \quad n_{12} = 1. \quad (2.11)$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (2.12)$$

согласно (1.1) макронапряжение $\langle \sigma_{33} \rangle$ в композите связано с макродеформацией $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \left[(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2 \right] \langle \varepsilon_{33} \rangle. \quad (2.13)$$

При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде (1.19), (1.14), (1.11), (1.18), имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = -\frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad (2.14)$$

что эквивалентно условию (2.12).

На рис. 1 для различных значений объемного содержания жесткого компонента c_1 при макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,005$ сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости связующего p_2 от времени \bar{t}_2 для слоистого материала с линейно упрочняющимся связующим. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p_2 от \bar{t}_2 для слоистого материала с линейным связующим (такие же обозначения приняты и на рис. 2). Как видим, физическая нелинейность деформирования связующего оказывает существенное влияние на микроразрушение слоистого материала. Графики показывают, что для материала с линейно упрочняющимся связующим микроразрушения начинаются при больших значениях времени \bar{t}_2 , а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е. при достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 пористость композитного материала с линейно упрочняющимся связующим выше, чем с линейным.

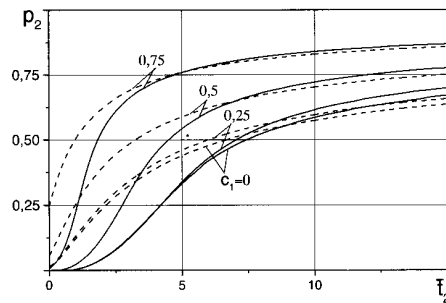


Рис. 1

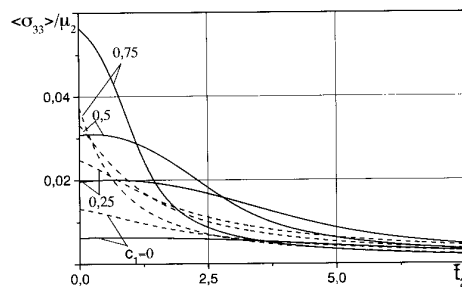


Рис. 2

На рис. 2 для различных значений объемного содержания жесткого компонента c_1 при макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,005$ показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 для слоистого материала с линейно упрочняющимся и линейным связующими. Графики показывают, что для малых значений времени \bar{t}_2 физическая нелинейность деформирования связующего оказывает существенное влияние также и на напряженное состояние слоистого материала. При достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 влияние нелинейности связующего на напряженное состояние материала несущественно.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано теорію довготривалої пошкоджуваності для шаруватих матеріалів з фізично нелінійними компонентами. Процес пошкоджуваності компонентів моделюється утворенням стохастично розташованих мікропор. Критерій руйнування одиничного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короточасну міцність за критерієм Губера – Мізеса, яке приймається випадковою функцією координат. Для довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пошкодженості (пористості) фізично нелінійних компонентів матеріалу. Побудовано алгоритми обчислення залежностей мікропошкоджуваності від часу, макронапружень від часу, а також відповідні криві. Досліджено вплив нелінійності зв'язуючого на криві макродеформування і пошкоджуваності матеріалу.

1. *Березикович Я.С.* Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
2. *Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др.* Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
3. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
4. *Крегерс А.Ф.* Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
5. *Тамуж В.П., Куксенко В.С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
6. *Хорошун Л.П.* К теории насыщенных пористых сред // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 12. – С. 35 – 41.
7. *Хорошун Л.П.* Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 10. – С.100 – 108.
8. *Khoroshun L.P.* Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 10. – P. 1035 – 1041.
9. *Khoroshun L.P.* Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 2. – P. 127 – 135.
10. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation and Long-Term Damageability of Layered Materials under Exponential-Power Function of Long-Term Microstrength // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 8. – P. 873 – 881.
11. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Coupled Processes of Deformation and Long-Term Damageability of Layered Materials under Fractional-Power Function of Long-Term Microstrength // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 9. – P. 991 – 999.

Поступила 25.05.2010

Утверждена в печать 06.06.2013