

С. О. Папков¹, В. Н. Чехов²

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЛИМИТАНТЫ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ
ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ**

¹Севастопольский национальный технический университет,
Стрелецкая балка, Студгородок, 95053, Севастополь, Украина;
e-mail: stanislav.papkov@gmail.com;

²Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
пр-т Вернадского, 4, 95007, Симферополь, Украина; e-mail: chekhov40@mail.ru

Abstract. An algorithm is considered of solving the quasi-regular infinite system of linear algebraic equations, which corresponds to the boundary value problem of stationary forced vibrations of isotropic rectangular prism in the statement of plane deformed state of linear theory of elasticity. The algorithm is based on using the Koyalovich's limitants, what permits to evaluate the upper and lower estimates for all the infinite sequence of unknowns as well as the natural frequencies of prism. Additionally, the sums of all the functional series from the solution representation are found in the area of rectangular.

Key words: stationary forced vibrations, quasi-regular infinite system of linear algebraic equations, natural frequencies of prism.

Введение.

Для построения решений задач динамики для конечной прямоугольной призмы применяют два основных аналитических подхода: метод однородных решений [21 – 23] и метод суперпозиции [1 – 3, 6]. В том и в другом используют оценки решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Для многосвязных областей к бесконечным системам алгебраических уравнений нормального типа приводит метод разделения переменных [4, 20]. Надежный метод вычисления верхних и нижних оценок ограниченных решений существует только для линейных регулярных бесконечных систем с неотрицательными коэффициентами. Это метод лимитант Б.М. Кояловича [2, 5, 6], который применен в задачах статики [1, 2, 6]. Существенным его недостатком является необходимость решать большое количество конечных систем линейных алгебраических уравнений согласно процедуре последовательных приближений. С помощью предельного перехода метод лимитант модифицирован [16] в метод «предельных лимитант», который вместо последовательных приближений предполагает получать решения только двух вспомогательных конечных систем. Эта модификация использована для кручения призмы с крестообразным основанием [18] и для бигармонических задач в прямоугольнике [17].

Применение метода предельных лимитант для оценок напряженного состояния, возникающего при установившихся вынужденных колебаниях, и для вычисления собственных частот упругой прямоугольной призмы представлено ниже в постановке плоской динамической задачи линейной теории упругости.

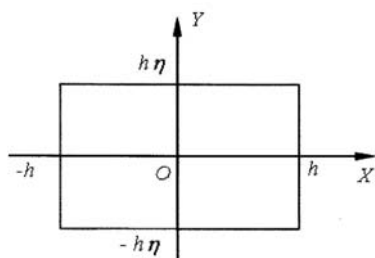


Рис. 1

§1. Постановка краевой задачи. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания прямоугольной призмы (рис. 1) под действием симметричных относительно координатных осей нормальных напряжений.

В безразмерных координатах $x = X/h$; $y = Y/h$ имеем краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}; \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{xx} \Big|_{x=\pm 1} = f(y) e^{-i\omega t}; \quad \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy} \Big|_{x=\pm 1} = 0; \quad \frac{1}{2\mu} \sigma_{yy} \Big|_{y=\pm \eta} = g(x) e^{-i\omega t}; \quad \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy} \Big|_{y=\pm \eta} = 0, \quad (1.2)$$

где ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала; μ – модуль сдвига.

В соответствии с методом суперпозиции [2] решение уравнения Ламе (1.1) ($\vec{u} = \{u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}\} e^{-i\omega t}$) представляется в виде суммы общих решений для полос $x \in [-1; 1]$ и $y \in [-\eta; \eta]$ т.е.

$$\begin{aligned} u(x, y) = & C_0 \sin(\Omega_1 x) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \frac{\alpha_m}{p_{1m}} \text{ch}(p_{1m} y) + B_m \frac{p_{2m}}{\alpha_m} \text{ch}(p_{2m} y) \right) \sin(\alpha_m x) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \text{sh}(q_{1m} x) + D_m \text{sh}(q_{2m} x)) \cos(\beta_m y); \\ v(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \text{sh}(p_{1m} y) + B_m \text{sh}(p_{2m} y)) \cos(\alpha_m x) + \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$+ A_0 \sin(\Omega_1 y) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m \frac{\beta_m}{q_{1m}} \text{ch}(q_{1m} x) + D_m \frac{q_{2m}}{\beta_m} \text{ch}(q_{2m} x) \right) \sin(\beta_m y).$$

где $\alpha_m = m\pi$; $\beta_m = m\pi/\eta$; $q_{\ell m}^2 = \beta_m^2 - \Omega_{\ell}^2$; $p_{\ell m}^2 = \alpha_m^2 - \Omega_{\ell}^2$ ($\ell = 1, 2$); $\Omega_1 = \omega h/c_1$; $\Omega_2 = \omega h/c_2$; $c_1 = \sqrt{\frac{2\mu(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости продольной и сдвиговой волн.

Удовлетворение граничных условий относительно касательных напряжений в (1.2) дает зависимости между неопределенными коэффициентами:

$$C_m = -D_m \frac{\beta_m^2 + q_{2m}^2}{2\beta_m^2} \frac{\text{sh } q_{2m}}{\text{sh } q_{1m}}; \quad A_m = -B_m \frac{\alpha_m^2 + p_{2m}^2}{2\alpha_m^2} \frac{\text{sh } p_{2m} \eta}{\text{sh } p_{1m} \eta}. \quad (1.4)$$

Граничные условия (1.2) для нормальных напряжений с учетом (1.4) приводят [2, 3] к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_0 = & -\frac{\nu \sin \Omega_1}{(1-\nu)\Omega_1 \cos \Omega_1 \eta} z_0 + \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-\nu) \cos \Omega_1 \eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta_n^2 q_{1n}^2} + \frac{(1-2\nu)g_0}{(1-\nu) \cos \Omega_1 \eta}; \\ z_0 = & -\frac{\nu \sin \Omega_1 \eta}{(1-\nu)\eta \Omega_1 \cos \Omega_1} x_0 + \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(1-\nu) \cos \Omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{\alpha_n^2 p_{1n}^2} + \frac{(1-2\nu)f_0}{(1-\nu) \cos \Omega_1}; \\ x_m = & -\frac{\Omega_1^2}{\Delta_m^* (1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} z_n + \frac{2\nu \Omega_1 \sin \Omega_1 \eta}{(1-2\nu)\eta \Delta_m^* q_{1m}^2} x_0 + \frac{f_m}{\Delta_m^*}; \\ z_m = & -\frac{\Omega_1^2}{\Delta_m (1-2\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} x_n + \frac{2\nu \Omega_1 \sin \Omega_1}{(1-2\nu)\Delta_m p_{1m}^2} z_0 + \frac{g_m}{\Delta_m} \quad (m = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$x_0 = A_0 \Omega_1; \quad z_0 = C_0 \Omega_1; \quad x_m = (-1)^m D_m \operatorname{sh} q_{2m}; \quad z_m = \frac{(-1)^m B_m \operatorname{sh} p_{2m} \eta}{\eta};$$

$$a_{mn} = \frac{1}{\alpha_n^2 + q_{1m}^2} \left(\frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + q_{2m}^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\alpha_n^2} \right); \quad b_{mn} = \frac{1}{\beta_n^2 + p_{1m}^2} \left(\frac{2\alpha_m^2}{\beta_n^2 + p_{2m}^2} - \frac{\nu \Omega_2^2}{\beta_n^2} \right);$$

$$\Delta_m = \eta \left(p_{2m} \operatorname{cth} p_{2m} \eta - \frac{(\alpha_m^2 + p_{2m}^2)^2}{4\alpha_m^2 p_{1m}} \operatorname{cth} p_{1m} \eta \right); \quad \Delta_m^* = q_{2m} \operatorname{cth} q_{2m} - \frac{(\beta_m^2 + q_{2m}^2)^2}{4\beta_m^2 q_{1m}} \operatorname{cth} q_{1m}.$$

Величины f_m, g_m – коэффициенты разложений в ряды Фурье для функций, задающих нагрузку на гранях призмы

$$f(y) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m f_m \cos \beta_m y; \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m g_m \cos \alpha_m x.$$

Заметим, что система (1.5) совпадает (с точностью до группировки членов и обозначений) с бесконечной системой, приведенной в [3].

Для придания дальнейшим выкладкам большую компактность и обеспечить неотрицательность элементов бесконечной матрицы, введем следующую замену для неизвестных:

$$X_1 = -\frac{x_0 \sin \Omega_1 \eta}{L}; \quad X_2 = \frac{z_0 \sin \Omega_1}{L}; \quad X_{2m+1} = -x_m; \quad X_{2m+2} = z_m$$

и для коэффициентов системы:

$$M_{1,1} = 0; \quad M_{1,2} = \frac{\nu \operatorname{tg} \Omega_1 \eta}{(1-\nu) \Omega_1}; \quad M_{1,2n+1} = \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 \operatorname{tg} \Omega_1 \eta}{\beta_n^2 q_{1n}^2 2(1-\nu)L};$$

$$M_{1,2n+2} = 0; \quad M_{2,1} = -\frac{\nu \operatorname{tg} \Omega_1}{(1-\nu) \eta \Omega_1}; \quad M_{2,2} = 0;$$

$$M_{2,2n+1} = 0; \quad M_{2,2n+2} = \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 \operatorname{tg} \Omega_1}{\alpha_n^2 p_{1n}^2 (2-2\nu)L}; \quad M_{2m+1,1} = \frac{2\nu \Omega_1 L}{(1-2\nu) \eta \Delta_m^* q_{1m}^2};$$

$$M_{2m+1,2} = M_{2m+1,2n+1} = M_{2m+2,1} = 0; \quad M_{2m+1,2n+2} = \frac{\Omega_1^2}{\Delta_m^* (1-2\nu)} a_{mn}; \quad (1.6)$$

$$M_{2m+2,2} = \frac{2\nu \Omega_1 L}{(1-2\nu) \Delta_m p_{1m}^2}; \quad M_{2m+2,2n+1} = \frac{\Omega_1^2}{\Delta_m (1-2\nu)} b_{mn}; \quad M_{2m+2,2n+2} = 0;$$

$$B_1 = -\frac{(1-2\nu) g_0 \operatorname{tg} \Omega_1 \eta}{(1-2\nu)L}; \quad B_2 = \frac{(1-2\nu) f_0 \operatorname{tg} \Omega_1}{(1-\nu)L}; \quad B_{2m+1} = -\frac{f_m}{\Delta_m^*}; \quad B_{2m+2} = \frac{g_m}{\Delta_m}.$$

Здесь L – положительная константа, выбором которой можно обеспечить выполнение условий регулярности с более раннего номера.

Бесконечная система (1.5) имеет такой канонический вид [5]:

$$X_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} X_n + B_m \quad (m=1, 2, \dots). \quad (1.7)$$

§2. Приведение бесконечной системы к оценкам решений регулярной бесконечной системы и решению конечной системы.

Бесконечная система (1.7) является регулярной, если удовлетворяются условия

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| < 1, \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Если же все ряды S_m сходятся, но условие $S_m < 1$ выполняется только при $m > N_R \geq 1$, то бесконечная система (1.7) является [5] квазирегулярной.

Для сумм рядов S_m бесконечной системы (1.5) получена асимптотическая оценка [19]

$$S_m = 1 - \frac{2}{m\pi} + O(m^{-2}), \quad (2.1)$$

согласно которой бесконечные системы (1.5) и (1.7) являются квазирегулярными.

С учетом асимптотического поведения коэффициентов системы (1.5) и коэффициенты a_{mn} и b_{mn} , начиная с определенных номеров, не изменяют своих знаков, преобразуем суммы S_m (2.1) к следующему виду ($\Omega = 2\omega h / (\pi c_2)$ – заданная безразмерная частота колебаний):

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\nu |\operatorname{tg} \Omega_1 \eta|}{(1-\nu)\Omega_1} + \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 |\operatorname{tg} \Omega_1 \eta|}{2(1-\nu)L} \left(\sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{\beta_n^2} \left(\frac{1}{|q_{1n}^2|} - \frac{1}{q_{1n}^2} \right) + \frac{1}{2\Omega_1^4} - \frac{\eta \operatorname{ctg} \Omega_1 \eta}{2\Omega_1^3} - \frac{\eta^2}{6\Omega_1^2} \right); \\ S_2 &= \frac{\nu |\operatorname{tg} \Omega_1|}{(1-\nu)\eta\Omega_1} + \frac{\nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 |\operatorname{tg} \Omega_1|}{2(1-\nu)L} \left(\sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{\alpha_n^2} \left(\frac{1}{|p_{1n}^2|} - \frac{1}{p_{1n}^2} \right) + \frac{1}{2\Omega_1^4} - \frac{\operatorname{ctg} \Omega_1}{2\Omega_1^3} - \frac{1}{6\Omega_1^2} \right); \\ S_{2m+1} &= \left| \frac{2\nu \Omega_1 L}{(1-2\nu)\eta \Delta_m^* q_{1m}^2} \right| + \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) |\Delta_m^*|} \left(\sum_{n=1}^{N_2(m)} \left(|a_{mn}| - \operatorname{sign} \left(m - \frac{\sqrt{\nu} \Omega \eta}{2\sqrt{2}} \right) a_{mn} \right) \right. \\ &+ \operatorname{sign} \left(m - \frac{\sqrt{\nu} \Omega \eta}{2\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\beta_m^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \left(\frac{\operatorname{cth} q_{1m}}{q_{1m}} - \frac{\operatorname{cth} q_{2m}}{q_{2m}} - \frac{1}{q_{1m}^2} + \frac{1}{q_{2m}^2} \right) - \frac{\nu \Omega_2^2}{q_{1m}^2} \left(\frac{1}{6} - \frac{\operatorname{cth} q_{1m}}{2q_{1m}} + \frac{1}{2q_{1m}^2} \right) \right) \Bigg); \\ S_{2m+2} &= \left| \frac{2\nu \Omega_1 L}{(1-2\nu)\Delta_m p_{1m}^2} \right| + \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu) |\Delta_m|} \left(\sum_{n=1}^{N_3(m)} \left(|b_{mn}| - \operatorname{sign} \left(m - \frac{\sqrt{\nu} \Omega}{2\sqrt{2}} \right) b_{mn} \right) + \operatorname{sign} \left(m - \frac{\sqrt{\nu} \Omega}{2\sqrt{2}} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\alpha_m^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \left(\frac{\eta \operatorname{cth} p_{1m} \eta}{p_{1m}} - \frac{\eta \operatorname{cth} p_{2m} \eta}{p_{2m}} - \frac{1}{p_{1m}^2} + \frac{1}{p_{2m}^2} \right) - \frac{\nu \Omega_2^2}{p_{1m}^2} \left(\frac{\eta^2}{6} - \frac{\eta \operatorname{cth} p_{1m} \eta}{2p_{1m}} + \frac{1}{2p_{1m}^2} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } N_1 = \max \left(\left[\frac{\Omega_1 \eta}{\pi} \right], \left[\frac{\Omega_1}{\pi} \right] \right) + 1; \quad N_2(m) = \left[\frac{1}{\pi} \sqrt{\max \left(0, \Omega_2^2 - \left(\frac{\pi}{\eta} \right)^2, \frac{\nu \Omega_2^2 (\beta_m^2 - \Omega_2^2)}{2\beta_m^2 - \nu \Omega_2^2} \right)} \right] + 1;$$

$$N_3(m) = \left[\frac{\eta}{\pi} \sqrt{\max \left(0, \Omega_2^2 - \pi^2, \frac{\nu \Omega_2^2 (\alpha_m^2 - \Omega_2^2)}{2\alpha_m^2 - \nu \Omega_2^2} \right)} \right] + 1; \quad [x] - \text{целая часть действительного } x.$$

Формулы (2.2) позволяют точно вычислять номера $N_R = N_R(\Omega)$ и значения величин $\rho_m = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}|$, характеризующих регулярные части бесконечной системы

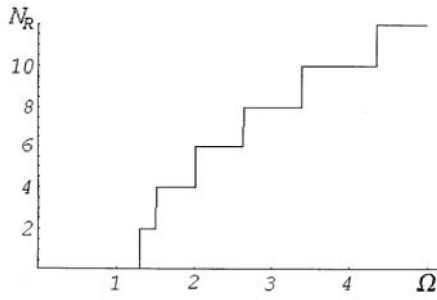


Рис. 2

(1.7), в зависимости от значений заданной относительной частоты колебаний Ω . Для примера на рис. 2 приведена зависимость $N_R = N_R(\Omega)$ при $\eta = 1$; $\nu = 0,248$ (принято $L = 0,1$).

Для преобразования квазирегулярной бесконечной системы (1.7) к оценкам решений регулярной бесконечной системы, полагаем [5], что в регулярной части системы (1.7) первые N_R неизвестных $\{X_1, \dots, X_{N_R}\}$ являются параметрами. Для

оставшихся неизвестных регулярной части системы (1.7) получаем регулярную бесконечную систему с линейной комбинацией параметров $\{X_1, \dots, X_{N_R}\}$ в качестве свободных членов:

$$X_m = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} X_n + (B_m + \sum_{n=1}^{N_R} M_{mn} X_n) \quad (m \geq N_R + 1). \quad (2.3)$$

Решение этой системы (2.3) линейно зависит от параметров в составе свободных членов:

$$X_m = \xi_m^0 + \sum_{j=1}^{N_R} \xi_m^j X_j \quad (m \geq N_R + 1). \quad (2.4)$$

Из (2.3) для коэффициентов линейной формы в представлении (2.4) получаем совокупность регулярных бесконечных систем с одной и той же матрицей:

$$\begin{aligned} \xi_m^0 &= \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \xi_n^0 + B_m; \\ \xi_m^j &= \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \xi_n^j + M_{mj} \end{aligned} \quad (m \geq N_R + 1, j = 1, 2, \dots, N_R), \quad (2.5)$$

Если свободные члены первой из систем (2.5) удовлетворяют условию Пеле – Кояловича [1] $|B_m| \leq K \rho_m$ ($m \geq N_R + 1$; K – некоторая положительная константа), то существуют [5] ограниченные решения каждой из регулярных бесконечных систем (2.5) и регулярной системы (2.3). Единственность этих ограниченных решений доказывается с помощью признака П.С.Бондаренко [1].

Существование ограниченного решения для квазирегулярной системы (1.7) эквивалентно существованию решения конечной системы относительно $\{X_1, \dots, X_{N_R}\}$, которую можно получить, подставив (2.4) в (1.7) при $m = 1, 2, \dots, N_R$:

$$X_m = \sum_{j=1}^{N_R} Q_{mj} X_j + P_m \quad \left(Q_{mj} = M_{mj} + \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \xi_n^j; P_m = \sum_{n=N_R+1}^{\infty} M_{mn} \xi_n^0 + B_m \right). \quad (2.6)$$

Если определитель системы (2.6) не равен нулю, то существует единственное решение $\{X_1, \dots, X_{N_R}\}$ и подстановка его в (2.4) приводит к ограниченному решению квазирегулярной бесконечной системы, которое с помощью зависимостей (1.4), (1.3) соответствует вынужденным гармоническим колебаниям призмы при заданной относительной частоте Ω . Если же определитель система (2.6) равен нулю

$$\det \|\delta_{mj} - Q_{mj}\| = 0, \quad (2.7)$$

то вынужденные гармонические колебания призмы не существуют в форме (1.3). Соответствующая частота Ω является собственной частотой призмы $\Omega = \Omega^*$. Заметим, что представление (2.4) – (2.6) использовано в статьях [7 – 14] авторов.

Согласно описанному выше методу решения задачи о вынужденных колебаниях призмы коэффициенты конечной системы (2.6) вычисляются посредством численных оценок решений регулярных бесконечных систем (2.5) при заданной частоте Ω колебаний. Эта частота Ω приближенно совпадает с Ω^* , если значение определителя (2.7) имеет достаточно малый порядок по сравнению с максимальным порядком коэффициентов матрицы системы (2.6).

§3. Оценки решений бесконечной системы.

Из асимптотического анализа выражений (1.6) следует, что, увеличивая параметр N_R , можно получить неотрицательность элементов матрицы M_{mn} регулярных систем (2.5). При этом свободные члены для систем (2.5) с $j = 1, 2, \dots, N_R$ становятся знакопостоянными. Первая ($j = 0$) из систем (2.5) имеет свободные члены исходной системы (1.7), которые могут оказаться знакопеременными. Однако из-за линейности исходной задачи ее можно разделить на две вспомогательные задачи со знакопостоянными свободными членами. Далее будем полагать, что с помощью соответствующих подстановок все знакопостоянные свободные члены систем (2.5) преобразованы в неотрицательные.

Для регулярных бесконечных систем с неотрицательными элементами матриц и свободных членов построен [6] итерационный метод «лимитант». Он позволяет вычислять верхние и нижние оценки ограниченного решения, если существует положительный предел ограниченного решения. В [2, 3] показано, что для ограниченного решения бесконечной системы (1.5) существует ненулевой предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = - \lim_{m \rightarrow \infty} z_m = G. \quad (3.1)$$

Соответственно, регулярные бесконечные системы (2.3) и (2.5) имеют ненулевые пределы G и $\{G_0, G_1, \dots, G_{N_R}\}$, связанные следующей из представления (2.4) зависимостью

$$G = G_0 + \sum_{j=1}^{N_R} G_j X_j. \quad (3.2)$$

При увеличении порядка вспомогательных конечных систем нижние и верхние оценки решения образуют [6] вложенные промежутки. При этом возможно получение совпадающих знаков в старших разрядах оценок для всех элементов решения, включая и пределы решений $\{G_0, G_1, \dots, G_{N_R}\}$.

Предельные значения итерационного процесса для лимитант получены в [16]; количество вспомогательных конечных систем сократилось до двух. Применительно к системам (2.5) экономия количества вспомогательных конечных систем оказывается еще более значительной из-за совпадения всех матриц в системах (2.5). Первая из вспомогательных систем совпадает с конечной системой метода простой редукции. У всех систем (2.5) она своя и имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_m^0 &= \sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\xi}_n^0 + B_m; \\ \bar{\xi}_m^j &= \sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\xi}_n^j + M_{mj} \end{aligned} \quad (m = N_R + 1, N_R + 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N_R). \quad (3.3)$$

Вторая вспомогательная система определяется только матрицей регулярной системы, и у всех систем (2.5) она одна, т.е.

$$\tilde{\xi}_m = \sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \tilde{\xi}_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} M_{mn} \quad (m = N_R + 1, N_R + 2, \dots, N). \quad (3.4)$$

Для оценок решений регулярных систем (2.5) достаточно [16] вычислить точные верхние и нижние грани «предельных лимитант», которые в случае первой из систем (2.5) имеют вид

$$V_{0,m}^N = \frac{\sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\xi}_n^0 + B_m}{\sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} (1 - \tilde{\xi}_n) + \rho_m + \sum_{n=1}^{N_R} |M_{mn}|} \quad (m \geq N+1). \quad (3.5)$$

Предельные лимитанты для остальных систем отличаются от $V_{0,m}^N$ только числителями

$$V_{j,m}^N = \frac{\sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\xi}_n^j + M_{mj}}{\sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} (1 - \tilde{\xi}_n) + \rho_m + \sum_{n=1}^{N_R} |M_{mn}|} \quad (m \geq N+1; j = 1, 2, \dots, N_R). \quad (3.6)$$

Обозначив $h_j = \inf_{m > N} V_{j,m}^N$, $H_j = \sup_{m > N} V_{j,m}^N$, приходим [16] к следующим двусторонним оценкам ограниченных решений для регулярных бесконечных систем (2.5):

$$\bar{\xi}_m^j + h_j \tilde{\xi}_m \leq \xi_m^j \leq \bar{\xi}_m^j + H_j \tilde{\xi}_m \quad (m = N_R+1, N_R+2, \dots, N; j = 0, 1, \dots, N_R); \quad (3.7)$$

$$h_j \leq \xi_m^j \leq H_j \quad (m \geq N+1); \quad (j = 0, 1, \dots, N_R). \quad (3.8)$$

Через решения вспомогательных систем (3.3) – (3.4) также можно выразить решение квазирегулярной бесконечной системы (1.7) по приближенному методу улучшенной редукции. Предположим [2], что достаточно точное значение предела решения достигается, начиная с некоторого конечного значения номера неизвестных. Применительно к регулярным бесконечным системам (2.5) это приводит к конечным системам вида ($\bar{\xi}_m^j = G_j$, $m \geq N+1$; $j = 0, 1, \dots, N_R$):

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_m^0 &= \sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\xi}_n^0 + G_0 \sum_{n=N+1}^{\infty} M_{mn} + B_m; \\ \bar{\xi}_m^j &= \sum_{n=N_R+1}^N M_{mn} \bar{\xi}_n^j + G_j \sum_{n=N+1}^{\infty} M_{mn} + M_{mj} \end{aligned} \quad (m = N_R+1, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N_R), \quad (3.9)$$

где N – наименьший из номеров неизвестных, при котором достигаются предельные значения $\{G_0, G_1, \dots, G_{N_R}\}$ неизвестных во всех системах (2.5). Поскольку свободные члены линейных систем (3.9) являются линейными комбинациями свободных членов вспомогательных систем (3.3) и (3.4), то решения систем (3.9) имеют вид линейных комбинаций решений систем (3.3) и (3.4) с теми же коэффициентами ($\bar{\xi}_m^j = G_j$, $m \geq N+1$):

$$\bar{\xi}_m^j = G_j \tilde{\xi}_m + \bar{\xi}_m^j \quad (j = 0, 1, \dots, N_R; m = N_R+1, N_R+2, \dots, N). \quad (3.10)$$

Формулу для вычисления предельных значений G_j получим при дополнительном предположении $\bar{\xi}_N^j = G_j$. Тогда из последнего уравнения (3.10) следует

$$G_j = \bar{\xi}_N^j / (1 - \tilde{\xi}_N) \quad (j = 0, 1, \dots, N_R). \quad (3.11)$$

Подстановка зависимостей (3.10) в представление (2.4) приводит к решению регулярной бесконечной системы (2.3) методом улучшенной редукции:

$$\bar{X}_m = \bar{\xi}_m^0 + G_0 \tilde{\xi}_m + \sum_{j=1}^{N_R} (\bar{\xi}_m^j + G_j \tilde{\xi}_m) \bar{X}_j \quad (m = N_R+1, N_R+2, \dots, N-1). \quad (3.12)$$

Другие неизвестные $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{N_R}\}$ вычисляем из конечной системы вида (2.6) после подстановки представления (3.12) в первые N_R уравнений (1.7).

§4. Пример оценки ограниченного решения бесконечной системы (1.7).

Рассмотрим реализацию данного алгоритма на примере возбуждения колебаний гармонической нормальной нагрузкой $\sigma_{yy} = 2\mu g_0 \exp(-i\omega t)$ на гранях $y = \pm\eta$ при следующих данных: $\nu = 0,248$; $\eta = 1$; $\Omega = 1,4$.

Из рис. 2 следует, что уравнения системы (1.7) начинают удовлетворять условиям регулярности, начиная с $N_R = 2$. Таким образом, совокупность бесконечных систем (2.5) содержит только три системы. При $m > 2$ для рассматриваемых граничных условий $B_m = 0$, поэтому для первой системы получаем точно $\xi_m^0 = 0$. В силу симметрии элементов бесконечной матрицы системы (1.7) при $\eta = 1$ следует, что $\xi_{2m-1}^1 = \xi_{2m}^2$; $\xi_{2m}^1 = \xi_{2m-1}^2$.

Нижняя и верхняя оценки решения системы для $j = 1$ на основе формул (2.4), (3.2) приведены в табл. 1 при $N = 20$ и $N = 200$. При этом вначале для фиксированного номера редукции N решены вспомогательные системы (3.3) – (3.4), затем дана оценка нижней и верхней границ лимитант (3.5) – (3.6) и по формулам (3.7) – (3.8) оценены значения неизвестных.

Таблица 1

m	3	4	5	6	7	∞
$N = 20$	0,110295	0,082010	0,077748	0,077037	0,074071	0,073053
$N = 200$	0,110291	0,082007	0,077742	0,077031	0,074061	0,072652
$N = 200$	0,110291	0,082007	0,077742	0,077031	0,074061	0,072617
$N = 20$	0,110288	0,082003	0,077736	0,077025	0,074050	0,072409

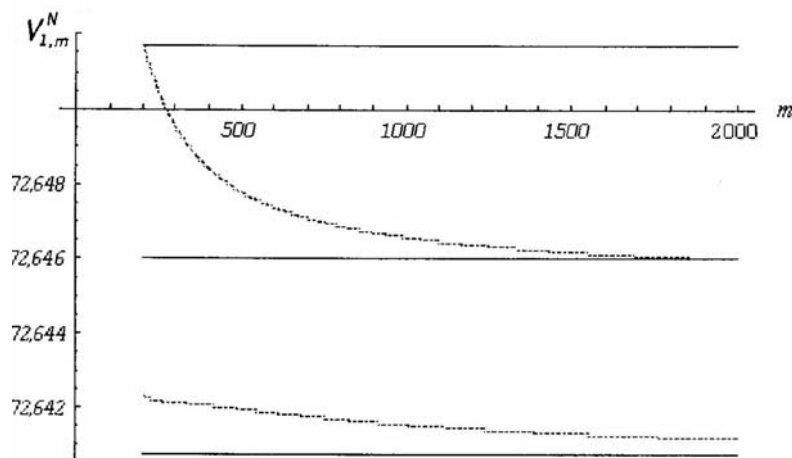


Рис. 3

На рис. 3 представлены значения лимитант $V_{1,m}^{200}$ для данного примера. Зрительно значения лимитант распадаются на две последовательности – верхняя для четных номеров и нижняя для нечетных, что связано с парностью исследуемой бесконечной системы. Обе последовательности строго убывающие и сближаются с горизонтальными асимптотами, что позволяет определить точные грани, которые представлены в последнем столбце табл. 1.

Перекрывающиеся верхние и нижние границы для всех неизвестных, позволяют определить конечные количества первых цифр, которые не изменятся при увеличении порядков конечных вспомогательных систем. Ограничиваясь только этими «точными»

цифрами при вычислении матрицы коэффициентов конечной системы (2.6), можно оценить порядки элементов матрицы и определить близость заданной частоты вынужденных колебаний к собственной частоте призмы путем сравнения порядка определителя системы (2.6) с наибольшим порядком элементов матрицы системы (2.6).

Для рассматриваемого примера система (2.6) второго порядка ($N_R = 2$), для коэффициентов которой на основе решений (2.4), представленных в табл. 1, находим оценки: при $N = 20 - Q = \begin{pmatrix} 0,05988 & 0,8894 \\ 0,88938 & 0,05988 \end{pmatrix}$; при $N = 200 - Q = \begin{pmatrix} 0,059878 & 0,889378 \\ 0,889378 & 0,059878 \end{pmatrix}$.

Свободные члены, учитывая $\xi_m^0 = 0$, не зависят от N и равны $P = \begin{pmatrix} -21,8389 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В табл. 2 даны значения определителя матрицы Q , отнесенные к наибольшему из его элементов, при частотах вынужденных колебаний, приближающихся к первой собственной частоте $\Omega_1^* = \sqrt{2} \approx 1,41421\dots$

Таблица 2

Ω	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421
$\det Q / (Q_{ij})_{\max}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$

Заметим, что число верных знаков в значении собственной частоты колебаний на единицу больше показателя порядка определителя конечной системы, что позволяет использовать условие (2.7) для вычисления собственных частот призмы.

§5. Улучшение сходимости рядов в представлении решения.

Используя асимптотический закон (3.1), проведем улучшение сходимости рядов для компонент перемещения и тензора напряжений. В случае установившихся колебаний решение (1.3) разделяется на потенциальные и вихревые составляющие

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.1)$$

где функции φ, ψ – решения [3] дифференциальных уравнений Гельмгольца

$$\Delta \varphi + \Omega_1^2 \varphi = 0; \quad \Delta \psi + \Omega_2^2 \psi = 0.$$

Представлению решения (1.3) соответствуют следующие функции φ, ψ :

$$\varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n^2 q_{1n}} \frac{\text{ch } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} x_n \cos \beta_n y + \eta \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2 p_{1n}} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} z_n \cos \alpha_n x \right); \quad (5.2)$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\text{sh } q_{2n} x}{\beta_n \text{sh } q_{2n}} x_n \sin \beta_n y - \frac{\text{sh } p_{2n} y}{\alpha_n \text{sh } p_{2n} \eta} z_n \sin \alpha_n x \right). \quad (5.3)$$

Асимптотический закон (3.1) приводит к плохой сходимости рядов (5.2) и (5.3) на границе прямоугольника и в малой окрестности границы. Подстановка этих рядов в формулы для напряжений приведет из-за дифференцирований к расходящимся рядам на границе прямоугольника. Для корректности необходимо улучшение сходимости рядов (5.2), (5.3), причем не только на границе, но и в ее окрестности. Для этого достаточно определить суммы вспомогательных рядов, которые получаем из рядов (5.2), (5.3) после подстановки в них $x_n = G, z_n = -G$:

$$G \varphi_G = G \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\eta \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2 p_{1n}} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} \cos \alpha_n x - \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n^2 q_{1n}} \frac{\text{ch } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} \cos \beta_n y \right); \quad (5.4)$$

$$G\psi_G = G \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\text{sh } q_{2n} x}{\beta_n \text{sh } q_{2n}} \sin \beta_n y + \frac{\text{sh } p_{2n} y}{\alpha_n \text{sh } p_{2n} \eta} \sin \alpha_n x \right). \quad (5.5)$$

В случае краевых задач статики для прямоугольной призмы аналогичные вспомогательные ряды удалось [17] просуммировать аналитически. Здесь же ограничимся аналитическими суммами остатков рядов (5.4) и (5.5), начиная с номера $N+1$ ($n \geq N+1$), когда для величин p_{jn} , q_{jn} справедливы следующие асимптотические формулы:

$$p_{jn} = \alpha_n - \frac{\Omega_j^2}{2\alpha_n} + O\left(\frac{1}{\alpha_n^3}\right); \quad q_{jn} = \beta_n - \frac{\Omega_j^2}{2\beta_n} + O\left(\frac{1}{\beta_n^3}\right). \quad (5.6)$$

Они позволяют записать приближенные зависимости

$$\frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n^2 p_{1n}} \approx \frac{1}{\alpha_n} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\alpha_n^3}; \quad \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} \approx \frac{\text{ch } \alpha_n y}{\text{sh } \alpha_n \eta} + \frac{\Omega_1^2}{2\alpha_n} \left[(\eta - y) e^{\alpha_n(y-\eta)} + (\eta + y) e^{-\alpha_n(y+\eta)} \right],$$

которые после использования известной [15] суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nX}}{n^p} \cos nY = \begin{cases} \frac{X}{2} - \frac{1}{2} \ln(2 \text{ch } X + 2 \cos Y), & p = 1; \\ \text{Re } Li_p(-e^{-X+iY}), & p > 1; \end{cases} \quad [X \geq 0, \quad -\pi \leq Y \leq \pi]$$

приводят к приближенному значению суммы вспомогательного ряда (5.4):

$$\begin{aligned} \varphi_G \approx & \eta^2 - 1 + \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{(\text{ch}(\pi(1-x)/\eta) + \cos(\pi y/\eta))(\text{ch}(\pi(1+x)/\eta) + \cos(\pi y/\eta))}{(\text{ch}(\pi(\eta-y)) + \cos(\pi x))(\text{ch}(\pi(\eta+y)) + \cos(\pi x))} + \\ & + \text{Re} \left[\frac{\Omega_1^2 \eta^2}{2\pi^2} \left((x-1) \text{Li}_2(-e^{(iy+x-1)\frac{\pi}{\eta}}) - (x+1) \text{Li}_2(-e^{(iy-x-1)\frac{\pi}{\eta}}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - \frac{y}{\eta}) \text{Li}_2(-e^{(ix+y-\eta)\pi}) + (1 + \frac{y}{\eta}) \text{Li}_2(-e^{(ix-y-\eta)\pi}) \right) \right] + \\ & + \eta \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\pi^3} \left(\text{Li}_3(-e^{(ix+y-\eta)\pi}) + \text{Li}_3(-e^{(ix-y-\eta)\pi}) - \eta^2 \text{Li}_3(-e^{(iy+x-1)\pi/\eta}) - \eta^2 \text{Li}_3(-e^{(iy-x-1)\pi/\eta}) \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

($Li_p(z)$ – полилогарифм порядка p).

Сходимость ряда (5.2) улучшаем посредством замены остатка ряда (5.2) на сумму (5.7) упрощенного вспомогательного ряда, но без первых N слагаемых. Получаем приближенное значение суммы ряда (5.2), точность которого может быть улучшена посредством увеличения порядка N конечных систем (3.3), (3.4);

$$\begin{aligned} \varphi \approx & \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\beta_n} \left\{ \left[\frac{G}{e^{\beta_n}} \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{2\beta_n} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\beta_n^2} \right) \text{ch } \beta_n x - x \frac{\Omega_1^2}{2\beta_n} \text{sh } \beta_n x \right] - \frac{x_n}{\text{sh } q_{1n}} \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n q_{1n}} \text{ch } q_{1n} x \right\} \cos \beta_n y - \\ & - \left[\frac{G}{e^{\alpha_n \eta}} \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{2\beta_n} + \frac{\Omega_1^2 - \Omega_2^2}{2\alpha_n^2} \right) \text{ch } \alpha_n y - y \frac{\Omega_1^2}{2\alpha_n} \text{sh } \alpha_n y \right] + \frac{z_n \eta}{\text{sh } p_{1n} \eta} \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n p_{1n}} \text{ch } p_{1n} y \left\} \cos \alpha_n x \right\} + G\varphi_G. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Аналогичным образом улучшаем сходимость ряда (5.3). При этом сумму вспомогательного ряда (5.5) вычисляем с помощью известной [15] формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nX}}{n^p} \sin nY = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{\sin Y}{\cos Y + e^X}, & p = 1; \\ \operatorname{Im} Li_p(-e^{-X+iY}), & p > 1; \end{cases} \quad [X \geq 0, \quad -\pi \leq Y \leq \pi],$$

которая принимает вид:

$$\begin{aligned} \psi_G \approx & \frac{\eta}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sin x\pi}{\cos x\pi + \exp(\eta+y)\pi} - \operatorname{arctg} \frac{\sin x\pi}{\cos x\pi + \exp(\eta-y)\pi} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{\sin y\pi/\eta}{\cos y\pi/\eta + \exp(1-x)\pi/\eta} + \operatorname{arctg} \frac{\sin y\pi/\eta}{\cos y\pi/\eta + \exp(1+x)\pi/\eta} + \right. \\ & \left. + \Omega_2^2 \frac{\eta}{2\pi} \operatorname{Im} \left[(1-x) Li_2(-e^{(iy+x-1)\pi/\eta}) - (1+x) Li_2(-e^{(iy-x-1)\pi/\eta}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-y/\eta) Li_2(-e^{(ix+y-\eta)\pi}) - (1+y/\eta) Li_2(-e^{(ix-y-\eta)\pi}) \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Соответственно, улучшение сходимости приводит к приближенному выражению

$$\begin{aligned} \psi \approx & \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\beta_n} \left\{ \left[x_n \frac{\operatorname{sh} q_{2n}x}{\operatorname{sh} q_{2n}} - 2G \left(\left(1 + \Omega_2^2 \frac{\operatorname{cth} \beta_n}{2\beta_n} \right) \operatorname{sh} \beta_n x - \frac{x}{2\beta_n} \Omega_2^2 \operatorname{ch} \beta_n x \right) e^{-\beta_n} \right] \sin \beta_n y - \right. \\ & \left. - \left[z_n \frac{\operatorname{sh} p_{2n}y}{\operatorname{sh} p_{2n}\eta} + 2G \left(\left(1 + \Omega_2^2 \frac{\operatorname{cth} \alpha_n \eta}{2\beta_n} \right) \operatorname{sh} \alpha_n y - \frac{y}{2\alpha_n} \Omega_2^2 \operatorname{ch} \alpha_n y \right) e^{-\alpha_n \eta} \right] \sin \alpha_n x \right\} + G\psi_G. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Приближенные выражения (5.8) и (5.10), в отличие от рядов (5.2), (5.3), можно дифференцировать. Точность этих приближенных выражений можно повысить путем увеличения параметра N .

Подставив выражения (5.8) и (5.10) в потенциальные представления (5.1), получим формулы улучшения сходимости для перемещений. Напряжения могут быть выражены непосредственно через потенциалы φ , ψ , т.е.

$$\frac{1-2\nu}{2\mu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \Delta\varphi; \quad \frac{1}{2\mu} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) (\varphi + i\psi).$$

Подставляя сюда (5.8) и (5.10), получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1-2\nu}{2\mu} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = & \Omega_1^2 \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\beta_n} \left[\left(x_n \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n q_{1n}} \frac{\operatorname{ch} q_{1n}x}{\operatorname{sh} q_{1n}} - 2G e^{-\beta_n} \operatorname{ch} \beta_n x \right) \cos \beta_n y + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(z_n \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n p_{1n}} \frac{\operatorname{ch} p_{1n}y}{\operatorname{sh} p_{1n}\eta} + 2G e^{-\alpha_n \eta} \operatorname{ch} \alpha_n y \right) \cos \alpha_n x \right] + G \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(\eta-y)\pi + \cos x\pi}{\operatorname{ch}(1-x)\pi/\eta + \cos y\pi/\eta} + \right. \\ & \left. + G \left[1 - \eta^2 + \frac{\eta}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(\eta+y)\pi + \cos x\pi}{\operatorname{ch}(1+x)\pi/\eta + \cos y\pi/\eta} \right] \right\} + z_0 \cos \Omega_1 x + x_0 \cos \Omega_1 y; \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\frac{1-2\nu}{2\mu} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = (z_0 \cos \Omega_1 x - x_0 \cos \Omega_1 y) (1-2\nu) + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \left\{ (1-2\nu) x_n \left(q_{2n} \frac{\operatorname{ch} q_{2n}x}{\operatorname{sh} q_{2n}} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\beta_n + q_{1n}}{q_{1n}} \frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{4\beta_n} \frac{\text{ch } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} \right) + G\Omega_1^2 e^{-\beta_n} (x \text{sh } \beta_n x - \text{ch } \beta_n x) \left] \cos \beta_n y + \eta \left[G\Omega_1^2 e^{-\alpha_n \eta} (y \text{sh } \alpha_n y - \right. \right. \\
& \left. \left. - \eta \text{ch } \alpha_n y) + (1 - 2\nu) z_n \left(\left(\frac{\alpha_n + p_{1n}}{p_{1n}} \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{4\alpha_n} \frac{\text{ch } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} - p_{2n} \frac{\text{ch } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} \eta} \right) \cos \alpha_n x \right) - \frac{G}{2} \Omega_1^2 (2 + 2\eta^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(1-x) \text{sh}((1-x)\pi/\eta)}{\text{ch}(1-x)\frac{\pi}{\eta} + \cos y \frac{\pi}{\eta}} - \eta \frac{(\eta-y) \text{sh}((\eta-y)\pi)}{\text{ch}(\eta-y)\pi + \cos x \pi} - \frac{(1+x) \text{sh}((1+x)\pi/\eta)}{\text{ch}(1+x)\frac{\pi}{\eta} + \cos y \frac{\pi}{\eta}} - \eta \frac{(\eta+y) \text{sh}((\eta+y)\pi)}{\text{ch}(\eta+y)\pi + \cos x \pi} \right) \right];
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1-2\nu}{2\mu} \sigma_{xy} = \sum_{n=1}^N (-1)^n \left\{ (1-2\nu) x_n \left(\frac{\beta_n^2 + q_{2n}^2}{2\beta_n} \left(\frac{\text{sh } q_{1n} x}{\text{sh } q_{1n}} - \frac{\text{sh } q_{2n} x}{\text{sh } q_{2n}} \right) + G\Omega_1^2 e^{-\beta_n} (\text{sh } \beta_n x - x \text{ch } \beta_n x) \right) \times \right. \\
& \left. \times \sin \beta_n y + \eta \left[(1-2\nu) z_n \frac{\alpha_n^2 + p_{2n}^2}{2\alpha_n} \left(\frac{\text{sh } p_{1n} y}{\text{sh } p_{1n} \eta} - \frac{\text{sh } p_{2n} y}{\text{sh } p_{2n} \eta} \right) + G\Omega_1^2 e^{-\alpha_n \eta} (y \text{ch } \alpha_n y - \eta \text{sh } \alpha_n y) \right] \sin \alpha_n x \right\} + \\
& + \frac{G}{4} \Omega_1^2 \left(\frac{(1-x) \sin y\pi/\eta}{\text{ch}(1-x)\frac{\pi}{\eta} + \cos y \frac{\pi}{\eta}} + \frac{\eta(y-\eta) \sin x\pi}{\text{ch}(\eta-y)\pi + \cos x \pi} - \frac{(1+x) \sin y\pi/\eta}{\text{ch}(1+x)\frac{\pi}{\eta} + \cos y \frac{\pi}{\eta}} + \frac{\eta(\eta+y) \sin x\pi}{\text{ch}(\eta+y)\pi + \cos x \pi} \right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

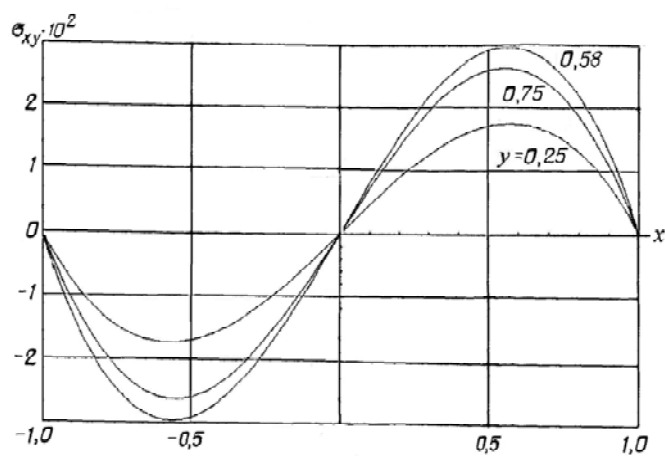
Заметим, что логарифмические особенности при подходе к угловым точкам, заключенные в полилогарифмах формул (5.7) и (5.9), сократились в формулах (5.11), (5.12) для нормальных напряжений. Если в асимптотических формулах (5.6) удерживать только первые слагаемые, то особенности не сокращаются, и искажается характер напряжений в углах прямоугольника.

В табл. 3 представлены граничные значения нормальных напряжений, вычисленные по формулам (5.11) и (5.12) для рассмотренного в §4 примера, где $\sigma_{yy} = 2\mu g_0 \exp(-i\omega t)$ на гранях $y = \pm\eta$, а $\nu = 0,248$; $\eta = 1$; $\Omega = 1,4$; остальные напряжения на границе равны нулю) при двух значениях порядка N вспомогательных систем метода лимитант. Данные таблицы показывают удовлетворительное с практической точки зрения выполнение граничных условий уже при $N = 20$, а с увеличением N появляется возможность добиться повышенной точности решения исходной задачи.

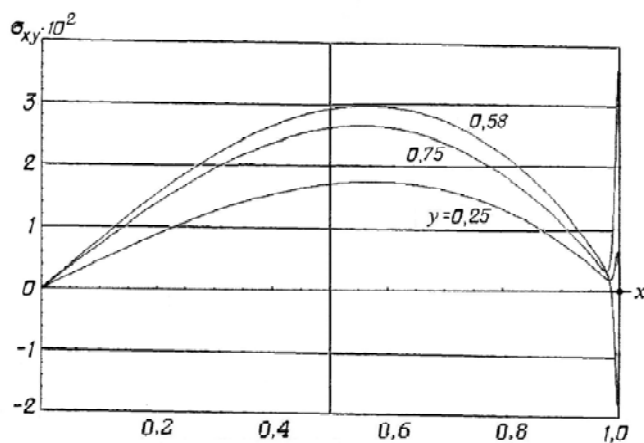
Таблица 3

x	$\sigma_{yy} / (2\mu g_0)$ $N = 20$	$\sigma_{yy} / (2\mu g_0)$ $N = 200$	y	$\sigma_{xx} / (2\mu g_0)$ $N = 20$	$\sigma_{xx} / (2\mu g_0)$ $N = 200$
0	0,99897	1,00001	0	0,001174	-0,000009
0,20	0,99896	1,00001	0,20	0,001187	-0,000009
0,40	0,99891	1,00001	0,40	0,001241	-0,000009
0,60	1,00114	1,00001	0,60	-0,001299	-0,000009
0,80	1,00143	1,00001	0,80	-0,001635	-0,000009
0,90	0,99855	1,00001	0,90	0,001718	-0,000009
0,95	1,00582	1,00001	0,95	-0,006325	-0,000011
1,00	0,97001	1,00229	1,00	0,031911	-0,002244

На рис. 4, *a* представлены значения касательных напряжений σ_{xy} в трех сечениях $y = 0,25; 0,58; 0,75$ призмы, которые вычислены по формулам (5.13) с улучшением сходимости ($N=200$), а на рис. 4, *б* – без улучшения сходимости ($G=0, N=200$). Последний случай иллюстрирует явление Гиббса, которое наблюдается для напряжений во всех сечениях призмы при подходе к границе. Заметим, что катастрофическое падение точности решения происходит независимо от того, что для касательных напряжений граничные условия выполнены тождественно, а ряды имеют экспоненциальный характер сходимости всюду, кроме границы области. Аналогичная картина наблюдается и для нормальных напряжений. Увеличением параметра N удается лишь сократить интервал, где наблюдается явление Гиббса. Сопоставление данных рис. 4, *a*, *б* демонстрирует эффективность суммирования вспомогательных функциональных рядов (5.4), (5.5) для преодоления явления Гиббса в окрестности границы призмы.



a



б

Рис. 4

На рис. 5, 6 представлены графики нормальных напряжений для рассмотренного выше примера в сечениях $y = 0; 0,5; 0,75; 1,0$ и в сечениях $x = 0; 0,5; 0,75$. Наибольшие по модулю напряжения достигаются в центре призмы и равны: $(\sigma_{yy})_{\max} = 81,424 \mu g_0$; $(\sigma_{xx})_{\max} = -76,535 \mu g_0$; при этом касательные напряжения оказываются достаточно

малы и не превосходят $|\tau_{xy}| \leq 0,1 \mu g_0$. Большие значения нормальных напряжений можно объяснить тем, что принята здесь частота $\Omega = 1,4$ вынужденных колебания меньше, чем на 0,015 отличается от первой собственной частоты $\Omega_1^* = \sqrt{2}$.

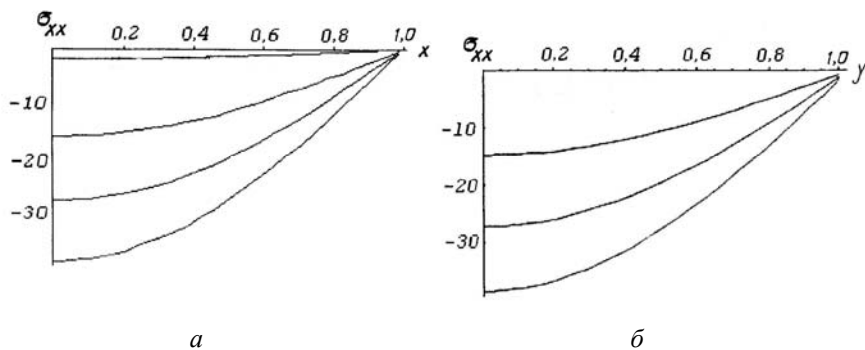


Рис. 5

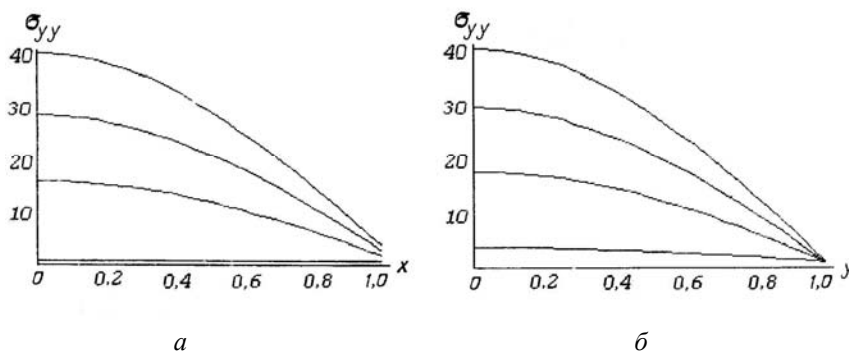


Рис. 6

Заключение.

В данной работе представлен новый алгоритм определения напряженно-деформированного состояния при установившихся колебаниях прямоугольной призмы, позволяющий получить двусторонние оценки решения квазирегулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений и собственные частоты призмы. Выполнено улучшение сходимости функциональных рядов для всей области определения решения. Приведены числовые результаты и дан их анализ.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто алгоритм розв'язку квазирегулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка відповідає крайовій задачі усталених вимушених коливань ізотропної прямокутної призми в постановці плоскої задачі лінійної теорії пружності. Алгоритм базується на використанні лімітант Кояловича, що дозволяє обчислювати верхні й нижні оцінки для всієї нескінченної послідовності невідомих, а також власні частоти призми. Додатково в області прямокутника знайдені суми всіх функціональних рядів у представленні розв'язку крайової задачі.

1. Бондаренко П.С. К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Матем. сборник. – 1951. – 29, № 2 – С. 403 – 418.
2. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.

3. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
4. *Гузь А.Н., Головчан В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наук. думка, 1972. – 256 с.
5. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М. –Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
6. *Коялович Б.М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. физ.-матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1930. – **3**. – С. 41 – 167.
7. *Папков С.О.* Динамическая задача для прямоугольной призмы // Вісник Севастопольського держ. техн. ун-ту. Серія Механіка, енергетика, екологія. – 2005. – № 67. – С. 5 – 18.
8. *Папков С.О.* Установившиеся вынужденные колебания призмы при заданных на границе смещениях // Акустичний вісник. – 2008. – **11**, № 4. – С. 36 – 43.
9. *Папков С.О., Мелешко В.В.* Изгибные колебания прямоугольной пластинки со свободными краями // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – **46**. – С. 104 – 111.
10. *Папков С.О., Чехов В.Н.* Регулярные бесконечные системы алгебраических уравнений в случае длиннопериодических деформаций призмы // Ученые записки Таврического нац. ун-та. – 2001. – № 1. – С. 81 – 86.
11. *Папков С.О., Чехов В.Н.* Определение резонансных частот вынужденных установившихся колебаний прямоугольной призмы // Вестник Севастопольского нац. техн. ун-та. Серия: Фізика і математика, 2003. – № 43. – С. 149 – 158.
12. *Папков С.О., Чехов В.Н.* К исследованию установившихся вынужденных колебаний прямоугольной призмы // Збірник праць акустичного симпозиуму «Консонанс–2003» / Інститут гідромеханіки НАН України. – 2003. – С. 181 – 189.
13. *Папков С.О., Чехов В.Н.* О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 57 – 62.
14. *Папков С.О., Чехов В.Н.* Нестационарное деформирование прямоугольной призмы // Збірник праць акустичного симпозиуму «Консонанс–2005» / Інститут гідромеханіки НАН України. – 2005. – С. 255 – 260.
15. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
16. *Чехов В.Н., Пан А.В.* Про граничні вирази лімітант Кояловича // Доп. НАН України – 2007. – № 3. – С. 31 – 36.
17. *Чехов В.Н., Пан А.В.* Об улучшении сходимости рядов для бигармонической задачи в прямоугольнике // Динамические системы. – 2008. – № 3. – С. 135 – 144.
18. *Chekhov Val. N.* Stress State of a Cross-Base Prism under Torsion // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 11. – P. 1265 – 1278.
19. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F.* Dynamic Problem of Elastic Theory for a Rectangular Prism // Int. Appl. Mech. – 1971. – **7**, N 9. – P. 979 – 984.
20. *Karnaukhova T.V., Pyatetskaya E.V.* Resonant vibrations of a clamped viscoelastic rectangular plate // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 8. – P. 762–771.
21. *Kosmodamianskii A.S.* Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity for Multiply Connected Plates: Survey // Int. Appl. Mech. – 1983. – **19**, N 12. – P. 1045 – 1061.
22. *Shaldyrvan V.A., Bulanov G.S.* Method of Homogeneous Solutions in Problems with Mixed Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 1989. – **25**, N 9. – P. 57 – 61.
23. *Vasil'ev T.A., Shaldyrvan V.A.* Local stress singularities in mixed axisymmetric Problems of the Bending of circular cylinders // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 176 – 187.

Поступила 10.01.2011

Утверждена в печать 06.6.2013