

А. П. Жук, В. Д. Кубенко, Я. А. Жук

**АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЕ НА ЖИДКУЮ СФЕРУ
В ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ КРУГОВОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ
ул. П. Нестерова, 3, Киев, Украина; e-mail: l.zhuk@inmech.kiev.ua*

Abstract. A problem is solved on interaction of a plane acoustical wave with a liquid sphere, which is placed on the axis of a rigid cylinder, filled by another compressible liquid. A measure of interaction is the radiation force: a mean in time value of the integral over the sphere surface from a pressure in the liquid. To determine the potential of velocity field, the problem on diffraction of wave on the sphere and the internal surface of cylinder is solved. AS an example, the case is considered of the rigid spherical particle, for which the character of dependence of radiation force on the primary wave frequency is established.

Key words: radiation force, cylindrical cavity, spherical drop, spherical particle, perfect compressible liquid, plane wave.

Введение.

При распространении гармонической волны в акустической среде, кроме периодического звукового давления, возникает постоянное давление звукового излучения [7, 11, 19], которое называют радиационным давлением. Оно появляется при условии, что средний за период колебания импульс, переносимый волной, изменяется в некотором объеме, что и определяет возникновение постоянной во времени составляющей звукового давления, действующего на этот объем. Задачи определения радиационного давления, действующего на препятствия в идеальной жидкости, формулируются как в эйлеровой, так и в лагранжевой системах координат. В первом случае оно определяется как свертка тензора плотности потока импульса с единичным вектором нормали к поверхности препятствия. В лагранжевых координатах радиационное давление определяется средним по времени значением звукового давления на поверхности препятствия. Линейное приближение для вычисления акустического давления оказывается недостаточным, так как в этом приближении давление является периодической функцией времени [15] и усредненное по времени за период волнового поля его значение равно нулю. Поэтому при определении акустического давления в жидкости необходимо учитывать эффекты второго порядка, обусловленные отклонением профиля волны в окрестности препятствия от гармонического закона изменения по времени [7, 11, 19]. Заметим, что вычисление акустического давления с учетом величин второго порядка малости можно выполнить, используя потенциал поля скорости, определенный при решении линейной задачи рассеяния первичной волны на препятствии [19]. В результате радиационная сила, действующая на препятствие, может быть вычислена как средняя за период первичной волны величина интеграла по поверхности препятствия от звукового давления. В случае препятствия в виде жидкой сферы возбуждаемые падающей волной колебательные процессы в ней могут существенно влиять на характер рассеяния волны [5, 13, 15].

Теоретическое исследование воздействия радиационных сил на препятствия является сложной задачей. При ее решении необходимо принимать во внимание ряд обстоятельств: форму препятствия и его размеры в сравнении с длиной волны; свойства жидкости и границы пространства, занятого жидкостью; другие факторы. К настоящему времени влияние фактора ограниченности пространства на величину радиационной силы исследовано только для случая твердых частиц у плоской границы жидкости [2, 3, 6, 17, 18, 23].

Различным вопросам движения и взаимодействия капель жидкости, газовых пузырьков и кавитационных образований посвящены работы [8, 9, 16, 22 и др.]. Для случая капли, находящейся в неограниченной жидкости, характер ее движения в результате действия радиационной силы исследован в работе [5].

В данной статье рассмотрен случай, когда капля (жидкая сфера) находится в ограниченном пространстве – на оси заполненной другой идеальной сжимаемой жидкостью цилиндрической полости с абсолютно твердыми стенками, вдоль которой распространяется плоская волна.

В соответствии с развитым ранее подходом [17] решение указанной задачи разделим на два *основных этапа*. *Первый этап* – исследование закономерностей взаимодействия гармонической акустической волны с препятствиями: жидкой сферой и внутренней поверхностью цилиндрической полости, т.е. решение задачи рассеяния первичной волны. *Второй этап* – на основе результатов, полученных на первом этапе, определение гидродинамических сил, действующих на сферу, с последующим их осреднением по времени.

Изучение постоянных во времени сил в акустическом поле представляет интерес для ряда теоретических и практических задач [7, 11, 14]. Определенный технологический интерес представляет изучение движения капель в акустическом поле под действием радиационных сил. Давление звукового излучения используется для создания акустической левитации: для «подвешивания» частиц в звуковом поле, фиксации их в определенных его областях. Это явление находит применение в таких технологических процессах как, например, бестигельная варка стекла, литье из различных компонентов, выращивание кристаллов. С другой стороны, постоянные силы, действующие на частицы в акустическом поле, способствуют процессам коагуляции и дегазации в несущих средах, акустической очистке загрязненных поверхностей и т.д.

§1. Постановка задачи определения потенциалов поля скорости.

Сформулируем в линейной постановке задачу первого этапа – задачу определения потенциалов поля скорости жидкости в цилиндрической полости, используя подход, предложенный в [20, 21] для случая твердых сферических частиц. Примем, что круговая цилиндрическая полость радиуса ρ_0 с абсолютно твердыми стенками заполнена сжимаемой идеальной жидкостью плотности γ_0 , в которой звук распространяется со скоростью c_0 . В полости находится неподвижная жидкая сферическая частица радиуса r_0 , геометрический центр которой расположен на оси полости. Частица имеет плотность γ_1 и звук в ней распространяется со скоростью c_1 . Введем цилиндрическую систему координат ρ, z, φ , ось Oz которой направим вдоль оси полости, а начало координат совместим с центром сферы. Введем также сферическую систему координат r, θ, φ (рис.1).

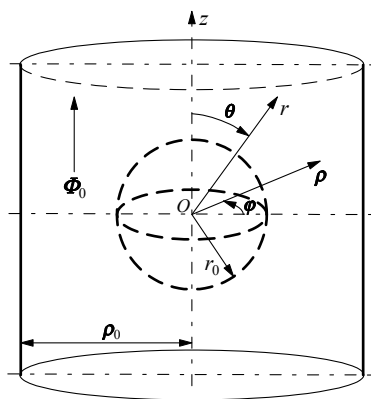


Рис. 1

Рассмотрим установившийся во времени волновой процесс. Пусть в положительном направлении оси Oz распространяется плоская акустическая волна, описываемая потенциалом

$$\Phi_{inc} = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1.1)$$

где A – амплитуда; $k = \omega / c_0$ – волновое число; ω – угловая частота; t – время.

Под действием падающей волны жидкая сфера испытывает периодические сжатия и разрежения. В дальнейшем влияние давления поверхностного натяжения на жидкую сферу не учитываем.

Искомые потенциалы волнового поля в цилиндрической полости и в жидкой сфере, в соответствии с принятым методом, являются решениями линейного волнового уравнения

$$\Delta \tilde{\Phi}_i - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 0, 1), \quad (1.2)$$

где $\tilde{\Phi}_i$ – потенциал поля скорости в рассматриваемой жидкости; c_i – скорость звука в ней, а Δ – дифференциальный оператор Лапласа в системе координат, связанной с конкретным телом.

В линейной постановке скорость частиц жидкости и давление в ней определяются, соответственно, следующими формулами:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \tilde{\Phi}; \quad p = -\tilde{\gamma} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

где $\tilde{\gamma}$ – плотность конкретной жидкости.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \bar{r} = \frac{r}{\rho_0}; \quad \bar{t} = \frac{t c_0}{\rho_0}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega \rho_0}{c_0}; \quad \bar{v} = \frac{v}{a_0}; \quad \bar{\Phi} = \frac{\tilde{\Phi}}{\rho_0 c_0}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\gamma_0 c_0^2}; \quad \bar{z} = \frac{z}{\rho_0}. \quad (1.4)$$

Заметим, что безразмерные величины вычислены относительно радиуса полости и параметров жидкости, заполняющей полость.

В дальнейшем использованы только безразмерные величины, поэтому черту в обозначениях величин опускаем. В безразмерном виде соотношения (1.1) и (1.2) имеют, соответственно, следующий вид:

$$\Phi_{inc} = A \exp[i\omega(z - t)]; \quad (1.5)$$

$$\Delta \Phi_0 + \omega^2 \Phi_0 = 0; \quad (1.6)$$

$$\Delta \Phi_1 + \eta^2 \omega^2 \Phi_1 = 0, \quad \eta = c_0 / c_1, \quad (1.7)$$

где Φ_0 и Φ_1 – потенциалы поля скорости жидкости, соответственно, в полости и в жидкой сфере.

Волновое поле внутри полости формируется в результате интерференции первичной волны (1.5) и волн, отраженных от внутренней поверхности полости и рассеянных на жидкой сфере.

С математической точки зрения определение потенциалов волнового поля в полости сводится к решению многосвязной линейной задачи рассеяния акустической волны (1.5) на жестких стенках полости и на поверхности жидкой сферы, т.е. определению решений линейных волновых уравнений (1.6) и (1.7), которые определяют давление и поле скорости жидкости: в цилиндрической полости –

$$p = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}; \quad \mathbf{v} = \text{grad } \Phi_0 \quad (\Phi_0 = \Phi_{inc} + \Phi_{0sph} + \Phi_{0cyl}); \quad (1.8)$$

в жидкой сфере –

$$p_1 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}; \quad \mathbf{v}_1 = \text{grad} \Phi_1, \quad (1.9)$$

удовлетворяющие граничным условиям на стенках полости и на поверхности жидкой сферы. В (1.8) Φ_{0sph} – потенциал волны, рассеянной на жидкой сфере; Φ_{0cyl} – потенциал волны, отраженной от стенок полости; Φ_0 – суммарный потенциал волнового поля во внешности сферы.

При формулировке граничных условий предполагаем, что амплитуда колебаний поверхности капли очень мала, поэтому можно принять $r_0 = \text{const}$ (для жидкой сферы такое предположение оправдано). Тогда граничные условия на поверхностях цилиндрической полости и жидкой сферы можно записать в следующем виде.

На поверхности цилиндрической полости нормальная составляющая скорости жидкости равна нулю

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = 0. \quad (1.10)$$

При переходе через поверхность сферы нормальные составляющие скорости жидкости в полости и в сфере и давление жидкости в полости и в сфере являются непрерывными величинами

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right|_{r=r_0}; \quad (1.11)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right|_{r=r_0}. \quad (1.12)$$

Потенциал поля рассеянных волн в цилиндрической полости удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{d \Phi_0}{d r} - i \omega \Phi_0 \right) = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_0 = 0. \quad (1.13)$$

Так как жидкости находятся внутри полости и внутри капли, то их волновые возмущения должны быть ограничены, т.е.

$$\Phi_0 \rightarrow \text{const} \text{ при } \rho \rightarrow 0; \quad \Phi_1 \rightarrow \text{const} \text{ при } r \rightarrow 0. \quad (1.14)$$

§2. Построение потенциалов волнового поля.

Определение потенциалов полей скорости в жидкостях полости и сферы состоит в решении многосвязной задачи для уравнений (1.6) и (1.7) с граничными условиями (1.10) – (1.14), заданными на поверхностях тел различной геометрической формы (сферической, цилиндрической), а также на оси цилиндра, в центре сферы и на бесконечности. Потенциалы волн Φ_{0sph} , Φ_1 и Φ_{0cyl} построим методом разделения переменных в соответствующих системах координат (сферической и цилиндрической). В связи с этим множество решений Φ_{0sph} и Φ_1 определим в виде обобщенных рядов Фурье по сферическим волновым функциям

$$\Phi_{0sph}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta); \quad (2.1)$$

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(\eta \omega r) P_n(\cos \theta), \quad (2.2)$$

а множество решений Φ_{0cyl} – в виде интеграла

$$\Phi_{0cyl}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.3)$$

Здесь $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Ханкеля первого рода n -го порядка; $P_n(x)$ – полиномы Лежандра; $J_0(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка; A_n, C_n – неизвестные постоянные; $B(\xi)$ – неизвестная плотность; $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя n -го порядка; $\eta = c_0/c_1$; ξ – постоянная разделения. В выражениях (2.1) – (2.3) опущен множитель $\exp(-i\omega t)$.

Выбор необходимого решения из множества решений осуществляем путем удовлетворения граничным условиям. Укажем, что условия (1.13) и (1.14) удовлетворены при выборе решений (2.1) – (2.3), соответственно. Составляющие (1.5), (2.1) и (2.3) потенциала Φ_0 (1.8) поля скорости жидкости в полости получены в различных системах координат, связанных с конкретными телами. Для удовлетворения граничным условиям на определенном теле, необходимо записать общий потенциал Φ_0 в системе координат, связанной с этим телом. Следовательно, чтобы удовлетворить граничным условиям (1.11), (1.12) на поверхности сферы, необходимо получить представление общего потенциала Φ_0 (его составляющих (1.5) и (2.3)) в сферической системе координат. Соответственно, чтобы удовлетворить граничным условиям (1.10) на внутренней поверхности цилиндра, необходимо получить представление общего потенциала Φ_0 (его составляющей (2.1)) в цилиндрической системе координат. Для получения указанных представлений воспользуемся соотношениями [1, 4, 12], позволяющими цилиндрические волновые функции выразить через сферические волновые функции и наоборот,

$$h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta) = \frac{i^{-n}}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi; \quad (2.4)$$

$$e^{i\xi z} J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) j_n(\omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.5)$$

В (2.4) $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля нулевого порядка.

Используя соотношение (2.4), представим потенциал (2.1), записанный в сферической системе координат, в системе координат, связанной с цилиндром,

$$\Phi_{0sph}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi; \quad A(\xi) = \frac{1}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \quad (2.6)$$

Соотношение (2.5) позволяет представить потенциал (2.3), записанный в цилиндрической системе координат, в системе координат, связанной со сферой,

$$\Phi_{0cyl}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(\omega r) P_n(\cos \theta); \quad B_n = i^n (2n+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi. \quad (2.7)$$

Потенциал Φ_{inc} первичной плоской волны (1.5), распространяющейся вдоль цилиндрической полости, также представим обобщенным рядом Фурье по сферическим волновым функциям [1]

$$\Phi_{inc}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_i^n (2n+1) j_n(\omega r) P_n(\cos \theta). \quad (2.8)$$

Таким образом, используя соотношения (1.5), (2.3) и (2.6), потенциал Φ_0 суммарного акустического поля (1.6) в цилиндрической полости запишем в цилиндрической системе координат ρ, z, φ в следующем виде:

$$\Phi_0(\rho, z) = Ae^{i\omega z} + \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi. \quad (2.9)$$

Выделим в (2.9) решения, которые удовлетворяют граничным условиям (1.10). Для них выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[A(\xi) H_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) + B(\xi) J_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right) \right] \sqrt{\omega^2 - \xi^2} e^{i\xi z} dz = 0. \quad (2.10)$$

Из (2.10), принимая во внимание выражение (2.6) для $A(\xi)$, получаем формулу для вычисления функции $B(\xi)$ через неизвестные постоянные A_n , т.е.

$$B(\xi) = -\frac{1}{2\omega} \frac{H_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right)}{J_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \quad (2.11)$$

В сферической системе координат (r, θ, φ) потенциал Φ_0 суммарного волнового поля (1.6), принимая во внимание соотношения (2.1), (2.7) и (2.8), представим в таком виде:

$$\Phi_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A i^n (2n+1) j_n(\omega r) + A_n h_n^{(1)}(\omega r) + B_n j_n(\omega r) \right] P_n(\cos \theta). \quad (2.12)$$

Заметим, что в формулах для потенциалов (2.5) – (2.8) и (2.12) опущен множитель $\exp(-i\omega t)$.

Используя выражения для потенциалов скорости жидкостей (2.2) и (2.12), граничное условие (1.11) представим в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A(2n+1) i^n \frac{dj_n(\omega r_0)}{dr} + A_n \frac{dh_n^{(1)}(\omega r_0)}{dr} + B_n \frac{dj_n(\omega r_0)}{dr} - C_n \eta \frac{dj_n(\eta \omega r_0)}{dr} \right] P_n(\cos \theta) = 0. \quad (2.13)$$

Из (2.13), учитывая (2.7) для B_n и (2.11) для $B(\xi)$ и используя ортогональность полиномов Лежандра, получаем первую бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n и C_n

$$A_n - \frac{(2n+1)}{2\omega} \frac{j_n'(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\omega r_0)} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} q_{mn} A_m - C_n \eta \frac{j_n'(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\omega r_0)} = -A(2n+1) i^n \frac{j_n'(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\omega r_0)} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\left(q_{mn} = 2 \int_0^{\infty} \frac{H_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right)}{J_1\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right)} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_m\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi \right). \quad (2.14)$$

При этом для нечетных сумм индексов $n + m$ коэффициенты q_{mn} равны нулю.

Используя выражения для потенциалов скорости жидкостей (2.2) и (2.12), граничное условие (1.12) представим в таком виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A(2n+1) i^n j_n(\omega r_0) + A_n h_n^{(1)}(\omega r_0) + B_n j_n(\omega r_0) - C_n j_n(\eta \omega r_0) \right] P_n(\cos \theta) = 0. \quad (2.15)$$

Из (2.15), принимая во внимание выражение (2.7) для B_n и (2.11) для $B(\xi)$ и используя ортогональность полиномов Лежандра, получаем вторую бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n и C_n

$$A_n - \frac{(2n+1)}{2\omega} \frac{j_n(\omega r_0)}{h_n^{(1)}(\omega r_0)} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} q_{mn} A_m - C_n \frac{j_n(\omega r_0)}{h_n^{(1)}(\omega r_0)} = -A(2n+1) i^n \frac{j_n(\omega r_0)}{h_n^{(1)}(\omega r_0)} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2.16)$$

В результате для вычисления коэффициентов A_n и C_n имеем бесконечную систему уравнений (2.14), (2.16), для решения которой может быть применен метод редукции.

§3. Определение радиационной силы, действующей на жидкую сферу.

Радиационную силу вычислим, осреднив по периоду первичной волны гидродинамическую силу, действующую на жидкую сферу со стороны внешней жидкости, заполняющей цилиндрическую полость. Так как поле скорости жидкости в полости симметрично относительно оси Oz , гидродинамическая сила направлена вдоль этой оси и равна интегралу по поверхности частицы от давления p , для определения которого используем потенциал Φ_0 (2.12). В рассматриваемом случае для вычисления гидродинамической силы имеем следующее соотношение:

$$F_z = -2\pi r_0^2 \int_0^\pi p \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (3.1)$$

в котором необходимо принимать действительную часть в выражении для давления p . Давление звуковой волны на поверхность сферы вычислим с точностью до величин второго порядка. Для этого воспользуемся выражением для давления p [19], которое в безразмерном виде имеет следующий вид:

$$p = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2r_0^2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right)^2. \quad (3.2)$$

Заметим, что рассматривается неподвижная жидкая сфера, поэтому первое слагаемое в правой части (3.2), которое синусоидально изменяется во времени, при осреднении гидродинамической силы (3.1) по периоду первичной волны вносит в радиационную силу вклад, равный нулю [17], поэтому при дальнейших вычислениях его не учитываем.

Отделив в потенциале (2.12) суммарного акустического поля действительную часть, получим равенство

$$\text{Re } \Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n \cos \omega t + R_n \sin \omega t) P_n(\cos \theta), \quad (3.3)$$

где $S_n = K_n + M_n + G_n$; $R_n = L_n + T_n + N_n$

$$(K_n = (-1)^n A(4n+1) j_{2n}(\omega r_0); L_n = (-1)^n (4n+3) j_{2n+1}(\omega r_0);$$

$$M_n = \text{Re } A_n j_n(\omega r_0) - \text{Im } A_n y_n(\omega r_0); N_n = \text{Re } A_n y_n(\omega r_0) + \text{Im } A_n j_n(\omega r_0); \quad (3.4)$$

$$G_n = \text{Re } B_n j_n(\omega r_0); T_n = \text{Im } B_n j_n(\omega r_0)).$$

В дальнейшем для вычисления давления p и силы F_z , с которой жидкость действует на сферу, используем выражения (3.1) – (3.4), опуская для краткости символ Re . При этом, учитывая приведенное выше замечание, формулу (3.2) для вычисления давления p применяем в таком виде:

$$p = -\frac{1}{2r_0^2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right)^2. \quad (3.5)$$

Далее вычислим вклад каждого из слагаемых давления p в величину силы F_z (3.1).

Вклад первого слагаемого определяется интегралом

$$F_z^{(1)} = \pi \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (3.6)$$

Принимая во внимание соотношение (3.3) при интегрировании (3.6) и учитывая следующее условие:

$$\int_{-1}^1 \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \frac{dP_m(\mu)}{d\mu} \mu (1-\mu^2) d\mu = \begin{cases} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1; \\ 0, & m \neq n+1; \end{cases} \quad \mu = \cos \theta,$$

получаем выражение для вычисления вклада первого слагаемого (3.5) в величину гидродинамической силы F_z

$$F_z^{(1)} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} [R_n R_{n+1} \sin^2(\omega t) + S_n S_{n+1} \cos^2(\omega t)]. \quad (3.7)$$

В выражении (3.7) опущены слагаемые, которые при осреднении $F_z^{(1)}$ по времени обращаются в нуль. Осреднив (3.7) по периоду первичной волны, получаем вклад первого слагаемого в выражении для давления p в величину радиационной силы

$$\langle F_z^{(1)} \rangle = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} (R_n R_{n+1} + S_n S_{n+1}). \quad (3.8)$$

Вклад второго слагаемого (3.5) в величину гидродинамической силы F_z определяется интегралом

$$F_z^{(2)} = -\pi r_0^2 \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \right)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (3.9)$$

Принимая во внимание (3.3) и условие

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) \mu d\mu = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}, & m = n+1; \\ 0, & m \neq n+1, \end{cases} \quad (3.10)$$

после интегрирования (3.9) получаем формулу для вычисления вклада в величину силы F_z второго слагаемого выражения (3.5), т.е.

$$F_z^{(2)} = -4\pi r_0^2 \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} [R_n R_{n+1} \cos^2(\omega t) + S_n S_{n+1} \sin^2(\omega t)]. \quad (3.11)$$

В выражении (3.11) опущены слагаемые, которые при осреднении $F_z^{(2)}$ по времени обращаются в нуль. После осреднения (3.11) по периоду первичной волны получаем вклад в величину радиационной силы второго слагаемого выражения для давления (3.5)

$$\langle F_z^{(2)} \rangle = -2\pi r_0^2 \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} (R_n R_{n+1} + S_n S_{n+1}). \quad (3.12)$$

Для вычисления давления p , обусловленного третьим слагаемым выражения (3.5), необходимо в частной производной $\partial\Phi_0/\partial r$ отделить действительную часть. В результате при $r = r_0$ получим

$$\operatorname{Re} \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega (R'_n \sin \omega t + S'_n \cos \omega t) P_n(\cos \theta) \quad (3.13)$$

$$(R'_n = L'_n + N'_n + T'_n; \quad S'_n = K'_n + M'_n + G'_n;$$

$$K'_n = (-1)^n (4n+1) A j'_{2n}(\omega r_0); \quad L'_n = (-1)^n (4n+3) A j'_{2n+1}(\omega r_0);$$

$$M'_n = \operatorname{Re} A_n j'_n(\omega r_0) - \operatorname{Im} A_n y'_n(\omega r_0); \quad N'_n = \operatorname{Re} A_n y'_n(\omega r_0) + \operatorname{Im} A_n j'_n(\omega r_0);$$

$$G'_n = \operatorname{Re} B_n j'_n(\omega r_0); \quad T'_n = \operatorname{Im} B_n j'_n(\omega r_0).$$

Вклад третьего слагаемого (3.5) в величину гидродинамической силы (3.1) определяется интегралом

$$F_z^{(3)} = \pi r_0^2 \int_0^\pi \left(\operatorname{Re} \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \right)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (3.14)$$

Принимая во внимание (3.13) и условие (3.10) при интегрировании (3.14) получаем

$$F_z^{(3)} = 4\pi \omega^2 r_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} (R'_n R'_{n+1} \sin^2 \omega t + S'_n S'_{n+1} \cos^2 \omega t). \quad (3.15)$$

В выражении (3.15) опущены слагаемые, которые при осреднении $F_z^{(3)}$ по периоду первичной волны обращаются в нуль. После осреднения (3.15) получаем вклад в радиационную силу третьего слагаемого (3.5):

$$\langle F_z^{(3)} \rangle = 2\pi \omega^2 r_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} (R'_n R'_{n+1} + S'_n S'_{n+1}). \quad (3.16)$$

Суммируя (3.8), (3.12) и (3.16), получаем выражение для вычисления радиационной силы, действующей на жидкую сферу в цилиндрической полости,

$$\begin{aligned} \langle F_z \rangle = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \{ & (R_n R_{n+1} + S_n S_{n+1}) [n(n+2) - \alpha^2] + \\ & + (R'_n R'_{n+1} + S'_n S'_{n+1}) \alpha^2 \} \quad (\alpha = \omega r_0). \end{aligned} \quad (3.17)$$

§4. Численное исследование радиационной силы. Анализ результатов.

В качестве примера рассмотрим случай неподвижной твердой сферической частицы в круговой цилиндрической полости, заполненной жидкостью. В этом случае граничное условие (1.12) теряет смысл, а условие (1.11) принимает следующий вид:

$$v_r \Big|_{r=r_0} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad (4.1)$$

поэтому из системы уравнений (2.14) и (2.16), полученных для определения постоянных в разложении потенциала Φ_0 (2.12) в обобщенный ряд Фурье, использованы только уравнения (2.14), которые для рассматриваемого случая ($C_n = 0$) преобразуются к такому виду:

$$A_n - \frac{(2n+1)}{2\omega} \frac{j'_n(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\omega r_0)} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} q_{mn} A_m = -A(2n+1) i^n \frac{j'_n(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\omega r_0)} \quad (n=0, 1, 2 \dots). \quad (4.2)$$

Отметим, что система уравнений (4.2) обладает вполне непрерывным оператором [10] в гильбертовом координатном пространстве l^2 и его правые части удовлетворяют условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| A(2n+1)^2 \frac{j'_n(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\omega r_0)} \right| < \infty.$$

Следовательно, бесконечная система алгебраических уравнений (4.2) имеет единственное решение $\{A_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющее условию $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|^2 < \infty$. Это решение получим методом редукции.

Действительная часть потенциала (2.12) в случае твердой сферической частицы также имеет вид (3.3). Постоянные S_n и R_n вычисляем по формулам (3.4) с использованием решений уравнения (4.2). При определении давления p в звуковой волне используются только первые два слагаемые выражения (3.5), так как на поверхности твердой неподвижной сферы $\partial\Phi_0/\partial r = 0$. В результате для вычисления радиационной силы получаем формулу

$$\langle F_z \rangle = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} [n(n+2) - \alpha^2] (R_n R_{n+1} + S_n S_{n+1}). \quad (4.3)$$

Исследование характера действия радиационной силы на твердую сферическую частицу в круговой цилиндрической полости, заполненной жидкостью, проведено численно в безразмерных величинах (1.4). В качестве нормировочных параметров использовались параметры сжимаемой жидкости (воды): скорость звука $a_0 = 1500$ м/с, плотность $\gamma = 1000$ кг/м³. Рассмотрена плоская акустическая волна (1.1), для которой безразмерная амплитуда A (в формуле (1.5)) равна $0,3 \cdot 10^{-5}$.

Первый этап исследования состоял в определении потенциала Φ_0 поля скорости (2.12), которое сведено к приближенному вычислению коэффициентов A_n и B_n из усеченной системы алгебраических уравнений (4.2). При этом учтены также выражения (2.7), (2.11) и (2.14). Заданная степень точности (порядка 10^{-6}) обеспечена путем сравнения результатов вычислений для последовательно возрастающего числа уравнений. На первом этапе коэффициенты A_n и B_n определены, следуя [18]. Величина безразмерного радиуса r_0 сферической частицы изменялась в пределах $0,1 - 0,8$, а величина безразмерной частоты ω – в пределах частотного диапазона $0,1 - 8$. При вычислении величин q_{mn} (2.14) интервал интегрирования разбит на два участка: $0 \leq \xi < \omega$ и $\omega < \xi < \infty$. На втором участке интегрирования верхний бесконечный предел заменялся конечным пределом ξ_s , который выбран из условия, при котором результаты последовательных вычислений при увеличении значения предела отличаются на величину 10^{-6} . В связи с тем, что во втором участке интегрирования аргумент подынтегральной функции – мнимая величина, она была выражена через модифицированные функции Бесселя. Заметим, что подынтегральная функция имеет особые точки, при приближении значения аргумента к которым она неограниченно возрастает. Эти точки – нули функции Бесселя $J_1(\zeta_k)$ ($\zeta_k = \sqrt{\omega^2 - \xi^2}$), а также точка $\xi = \omega$.

На малых расстояниях слева и справа от указанных точек подынтегральная функция принимает значения, одинаковые по модулю и противоположные по знаку [21].

Поэтому эти точки при вычислении интегралов были выделены бесконечно малыми ε -окрестностями, на которых значениями интегралов не учитывалось.

Проведено сравнение результатов действия радиационной силы на твердую сферическую частицу, находящуюся в жесткой цилиндрической полости и в безграничной жидкости. В связи с этим для первичной волны (1.5) в случае безграничной жидкости решена задача для волнового уравнения (1.6) при граничных условиях (1.13) и (4.1). Решение получено в виде (2.12) при условии $B_n = 0$, а коэффициенты A_n вычислены по формуле

$$A_n = -i^n (2n+1) \frac{j_n'(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

Графики изменения безразмерных значений радиационной силы, вычисленной на втором этапе решения задачи по формуле (4.3), представлены на рис. 2 – 5. Сплошной линией показана зависимость от безразмерной частоты величины радиационной силы, действующей на сферическую частицу в круговой цилиндрической полости. Штриховой – при тех же условиях для случая сферической частицы, находящейся в безграничной жидкости. Представленные на рисунках результаты, свидетельствуют о немонотонном характере зависимости величины радиационной силы от частоты. При определенных значениях частоты ω ($\omega \rightarrow 4, \omega \rightarrow 7$) происходит резкое изменение величины радиационной силы, свойственное для всех размеров сферической частицы.

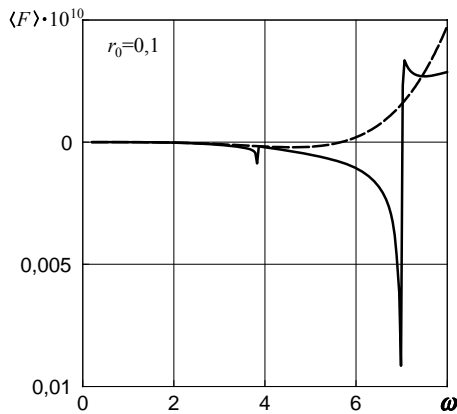


Рис. 2

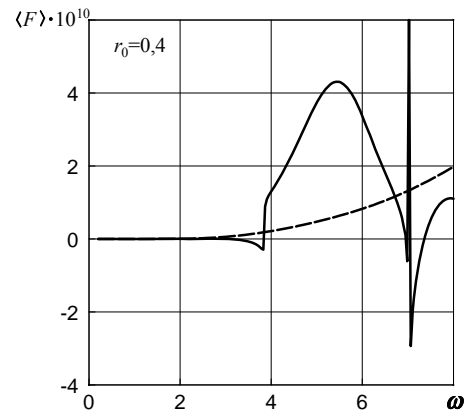


Рис. 3

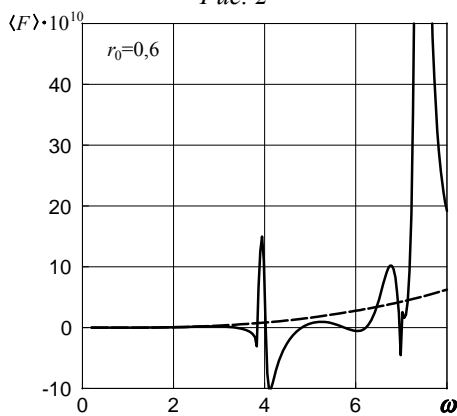


Рис. 4

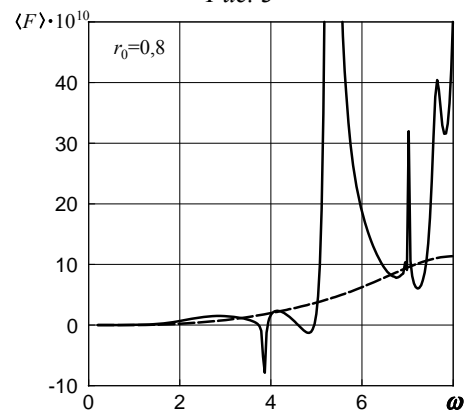


Рис. 5

Отметим также характерные особенности воздействия радиационной силы на сферическую частицу, которые следуют из анализа графиков (рис. 2 – 5):

1) если на частицу в безграничной жидкости действует радиационная сила, направленная в сторону распространения волны и монотонно возрастающая с увеличением частоты, то для частицы в цилиндрической полости характер зависимости радиационной силы от частоты существенно усложняется, что определяется усложнением дифракционного поля внутри цилиндра;

2) в зависимости от частоты радиационная сила для частицы в полости (в отличие от случая частицы в неограниченной жидкости) может быть направлена как в сторону распространения акустической волны, так и в противоположную сторону;

3) в окрестности некоторых частот изменение величины радиационной силы имеет характер, близкий к резонансному: на графиках зависимости радиационной силы от частоты в окрестностях резонансных частот появляются максимумы. Очевидно резонансные частоты являются собственными частотами механической системы: заполненная жидкостью жесткая цилиндрическая полость с твердой сферической частицей [21].

Заметим, что разработанный метод исследования может быть обобщен на случай наличия внутри круговой цилиндрической полости конечного числа произвольно расположенных сферических частиц.

Заключение.

На основе решения задачи дифракции плоской волны на сферической капле в заполненной жидкостью цилиндрической полости определена действующая на каплю радиационная сила как функция частоты первичной волны. Задача дифракции решена методом разделения переменных. Для удовлетворения граничным условиям на цилиндрической и сферической поверхностях использованы разложения сферических волновых функций по цилиндрическим и наоборот. Постоянные в разложениях искоемых решений в обобщенные ряды Фурье определены из бесконечной системы алгебраических уравнений, которая решена методом редукции. Радиационная сила вычислена как средняя по периоду первичной волны величина гидродинамической силы, действующей в полости на сферическую каплю. Для частного случая твердой сферической частицы установлено, что наличие цилиндрической граничной поверхности оказывает существенное влияние на значение радиационной силы: при некоторых значениях частоты сила имеет максимум; кроме того, в зависимости от частоты радиационная сила может менять знак. Отмеченные свойства могут обусловить особенности движения и локализации частиц в цилиндрическом сосуде при действии акустических волн.

РЕЗЮМЕ. Розв'язано задачу про взаємодію плоскої акустичної хвилі з рідинною сферою, яка розміщена на осі жорсткого циліндра, наповненого іншою стисливою рідиною. Мірою взаємодії є радіаційна сила: середня в часі величина інтеграла по поверхні сфери від тиску в рідині. Для визначення потенціала поля швидкості розв'язано задачу дифракції хвилі на сфері і внутрішній поверхні циліндра. Як приклад, розглянуто випадок твердої сферичної частинки. Для нього встановлено характер залежності радіаційної сили від частоти первинної хвилі.

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 308 с.
2. Гузь О.М., Жук О.П., Геращенко Н.В. Про рух циліндра біля твердої плоскої поверхні в радіаційному полі звукової хвилі // Доп. НАН України. – 1994, № 11. – С. 61 – 65.
3. Гузь А.Н., Жук А.П. Движение твердой частицы в окрестности плоской границы жидкости в поле средних сил акустической волны // Проблемы механики // Сборник статей к 90-летию со дня рождения А.Ю.Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. – С. 342 – 349.
4. Ерофеенко В.Т. Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1972. – № 4. – С. 42 – 46.

5. Жук А.П. Действие акустического излучения на сферическую каплю жидкости // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 7. – С. 26 – 34.
6. Жук О.П. Дія радіаційних сил звукового поля на сферичну частинку в околі плоскої межі рідини // Доп. НАН України. – 2008. – № 7. – С. 71 – 76.
7. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 520 с.
8. Зинченко А.З. К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, № 5. – С. 955 – 959.
9. Зинченко А.З. Медленное асимметричное движение двух капель в вязкой среде // Прикл. математика и механика. – 1980. – **44**, № 1. – С. 49 – 59.
10. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 695 с.
11. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984. – 340 с.
12. Кубенко В.Д. Задачи дифракции стационарных волн на совокупности цилиндрических и сферических тел в жидкости // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 6. – С. 111 – 117.
13. Лепендин Л.Ф. Акустика. – М.: Высш. шк., 1978. – 448 с.
14. Медников Е.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 264 с.
15. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1960. – 336 с.
16. Buřivol V.D. Dynamics of Ellipsoidal Cavities in Fluid // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 2. – P. 145 – 151.
17. Guz A.N., Zhuk A.P. Motion of Solid Particles in a Liquid under the Action of an Acoustic Field: the Mechanism of Radiation Pressure // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 3. – P. 246 – 265.
18. Guz A.N., Zhuk A.P. Dynamics of a rigid cylinder near a plane boundary in the radiation field of an acoustic wave // J. of Fluid and Structures. – 2009. – **25**. – P. 1206 – 1212.
19. King L.V. On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1934. – **147**, N 861. – P. 246 – 265.
20. Kubenko V.D., Dzyuba V.V. Interaction of Infinite Thin Elastic Cylindrical Shell and a Pulsating Spherical Inclusion in Potential Flow of Ideal Compressible Liquid: Internal Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 3. – P. 297 – 312.
21. Kubenko V.D., Dzyuba V.V. Diffraction of a Plane Acoustic Wave by a Rigid Sphere in a Cylindrical Cavity: an Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 424 – 432.
22. Lakiza V.D. Features of the Motion of a Gas – Liquid Medium in a Compound Shell (Sphere and Truncated Cone) Subject to Vibration // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 1. – P. 85 – 89.
23. Zhuk A.P. Dynamics of a Spherical Particle Near a Flat Liquid Boundary under Acoustic Radiation Forces // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 11. – P. 1223 – 1232.

Поступила 28.11.2011

Утверждена в печать 06.06.2013