

И. В. Янчевский

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ
НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПРИ СИЛОВОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИЯХ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: yanchevsky@ukr.net*

Abstract. A numerically-analytical solution of a problem on non-stationary vibrations of the non-closed infinitely long cylindrical shell made of an electroelastic material with hinged ends is presented. The modes of direct and inverse piezoelectric effect are considered. The dynamic processes are modeled within the framework of the linear theory of thin electroelastic shells based on the generalized Kirchhoff-Love hypotheses. To meet the boundary conditions, the additional loads are introduced. Using the Laplace integral transform, the problem is reduced to the system of Volterra integral equations. The numerical findings are presented in the form of plots, which are analyzed.

Key words: non-closed infinitely long cylindrical shell, non-stationary vibrations, Laplace integral transform.

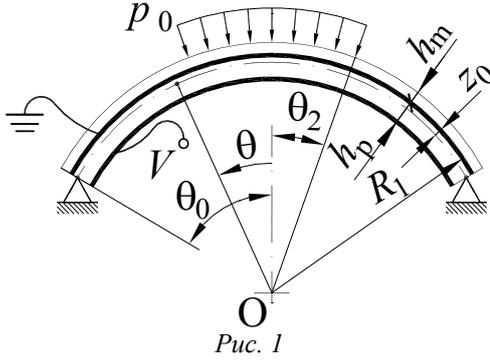
Введение.

Область практического применения приборов и устройств, использующих в своих конструкциях пьезокерамические преобразователи энергии, в настоящее время достаточно широка [15]. Из всего многообразия конфигураций преобразователей к весьма распространенным относятся элементы в виде тонкостенных цилиндрических оболочек, изучению динамического поведения которых уделяется большое внимание [4, 5, 7, 18]. Особый интерес при этом представляют исследования колебаний при приложении импульсных электромеханических нагрузок [1, 8, 16, 17]. Вместе с тем, остаются открытыми вопросы поведения пьезокерамических элементов с конструктивными особенностями при различных вариантах их закрепления.

В данной работе исследованы деформации цилиндрической полосы из пьезоактивного материала с шарнирно закрепленными продольными краями как при ее механическом, так и электрическом импульсном нагружении. Среди публикаций отметим [6, 11 – 14], которые посвящены изучению связанных электроупругих процессов в близких по форме пьезопреобразователях.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим незамкнутую бесконечно длинную круговую цилиндрическую оболочку с центральным углом $2\theta_0$ (рис. 1). Оболочка состоит из тонких, жестко соединенных между собой, внутреннего электроупругого и внешнего упругого слоев с толщинами h_p и h_m , при этом радиус поверхности соединения слоев равен R_1 . На



поляризованный по толщине электроупругий слой нанесены сплошные, бесконечно тонкие электроды, внутренний из которых заземлен, а электрический потенциал на внешнем электроде обозначим через V . На области с центральным углом $2\theta_2$, расположенной симметрично от краев, действует равномерно распределенное давление интенсивностью p_0 (рис. 1). Граничные образующие оболочки шарнирно закреплены.

Цель работы – определение характеристик переходного процесса биморфного преобразователя как в случае работы пьезоактивного слоя в режиме обратного пьезоэлектрического эффекта, так и прямого.

Начальные условия считаем нулевыми (до момента $t = 0$ преобразователь находится в состоянии покоя).

2. Уравнения движения.

В рамках гипотез Кирхгофа – Лява, обобщенных на случай электромеханики, исходная система уравнений движения биморфного цилиндрического пьезопреобразователя имеет вид [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + w - \delta \frac{\partial^3 u_0}{\partial \theta^3} + \frac{\partial u_0}{\partial \theta} &= \gamma_0 q_z - \gamma_1 \left(V_\theta - \frac{a_p}{R_0} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right); \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - (1 + \delta) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + \delta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \gamma_0 q_\theta + \gamma_1 \left(1 + \frac{a_p}{R_0} \right) \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь w и u_0 , q_z и q_θ – нормальные и тангенциальные составляющие вектора перемещений поверхности приведения [9] и внешней нагрузки, соответственно; V_θ – функция, описывающая профиль электрического потенциала на внешнем токопроводящем покрытии; $a_p = z_0 - h_p/2$ – расстояние между поверхностью приведения, имеющей радиус кривизны $R_0 = R_1 - z_0$, и срединной поверхностью электроупругого слоя.

Положив расстояние z_0 между поверхностями приведения и соединения слоев (рис. 1) равным $(c_{1p} h_p^2 - c_{1m} h_m^2) / 2D_N$, можно обеспечить наиболее простую связь между усилиями и деформациями [9]

$$N_\theta = \frac{D_N}{R_0} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w \right) - e_1 V_\theta; \quad M_\theta = \frac{\bar{D}}{R_0^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - e_1 a_p V_\theta. \quad (2)$$

Электрическая индукция не зависит от толщинной координаты и определяется выражением

$$D_z = \frac{e_1}{R_0} \left(1 + \frac{a_p}{R_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{e_1}{R_0} \left(w - \frac{a_p}{R_0} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{V_\theta}{R_0}. \quad (3)$$

Расчетные формулы для постоянных коэффициентов таковы:

$$\gamma_0 = R_0^2 / D_N; \quad \gamma_1 = -\gamma_0 e_1 / R_0; \quad \gamma_2 = -e_1^2 h_p / D_N \varepsilon_3; \quad \delta = \bar{D} / D_N R_0^2; \quad \rho_h = \rho_p h_p + \rho_m h_m;$$

$$D_N = c_{1p}h_p + c_{1m}h_m; \bar{D} = c_{1p}J_p + c_{1m}J_m + \Delta D; \Delta D = (e_1^2/\varepsilon_3)J_{p0};$$

$$J_p = (z_0^3 - (z_0 - h_p)^3)/3; J_m = ((z_0 + h_m)^3 - z_0^3)/3; J_{p0} = h_p^3/12;$$

$$\bar{\nu} = \nu + (1-\nu)\Delta D/\bar{D}; c_{1j} = 1/s_{11}^j(1-\nu^2); e_1 = c_{1p}d_{31}(1+\nu); \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}^T(1-2d_{31}e_1/\varepsilon_{33}^T);$$

s_{11}^j , ν – упругие податливости и коэффициент Пуассона материалов ($j = m, p$);
 d_{31} , ε_{33}^T – пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость пьезокерамики.

Уравнения движения (1) дополним нулевыми начальными условиями

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = u_0|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial t}|_{t=0} = 0$$

и механическими граничными –

$$w|_{\theta=\pm\theta_0} = 0; u_0|_{\theta=\pm\theta_0} = 0; M_\theta|_{\theta=\pm\theta_0} = 0, \quad (4)$$

соответствующими условию шарнирного закрепления краев (рис. 1).

Форма электрических граничных условий зависит от вида электродирования пьезокерамического слоя и способа подвода (съема) электрической энергии. Если положить, что сплошные электроды подключены к генератору напряжений или закорочены, то функцию

$$V_\theta(\theta, t) = V(t) \quad (5')$$

в системе (1) принимаем заданной. Если электроды разомкнуты или подключены к электронному устройству с бесконечно большим входным сопротивлением, то необходимо выполнение равенства нулю погонного тока смещения через срединную поверхность пьезослоя, т.е. $\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} D_z d\theta = 0$. Тогда на основании (3) получим следующее выражение для неизвестной разности потенциалов:

$$V_\theta = V = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{1}{2\theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left[\left(1 + \frac{a_p}{R_0} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \left(w - \frac{a_p}{R_0} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] d\theta. \quad (5'')$$

Соотношения (1), (4), (5'), (5'') представляют собой полную систему уравнений связанных колебаний исследуемого биморфного электроупругого преобразователя. Заметим, что в уравнениях время t отнесено к $R_0\sqrt{\rho_h/D_N}$; перемещения w , u_0 – к R_0 .

3. Методика решения задачи.

Для шарнирно закрепленных граничных образующих рассматриваемой оболочки, с учетом симметрии ее деформирования относительно сечения $\theta = 0$ (рис. 1), функции w и u_0 представим в виде

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cos KN\theta; u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin KN\theta \quad (6)$$

(c_k , b_k – неизвестные коэффициенты; $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$; $K = (2k-1)/2$; $N = \pi/\theta_0$).

Электрический потенциал также задаем в виде тригонометрического ряда Фурье по четным функциям, т.е.

$$V_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \cos KN\theta, \quad (7)$$

коэффициенты которого на основании равенств (5)', (5)" могут быть выражены через функцию $V - v_k = V \cdot 2 \sin KN\theta_0 / KN\theta_0$.

Разложения (6) и (7) не позволяют полностью обеспечить выполнение условий (4). Поэтому для удовлетворения равенства $u_0|_{\theta=\pm\theta_0} = 0$ присоединим к заданной механической нагрузке p_0 дополнительные тангенциальные усилия q_1 , распределенные на малых полосах шириной $\Delta\theta$ в окрестности сечений $\theta = \pm\theta_0$ и подлежащие определению. Такой прием использован, в частности, авторами монографии [3] при решении задачи о неустановившихся осесимметричных деформациях механически нагруженной упругой пластины.

В результате компоненты механической нагрузки

$$q_z = -p_0(t)H(\theta_2 - |\theta|); \quad q_\theta = -q_1(t) \cdot \text{sign}(\theta) \cdot H(|\theta| - (\theta_0 - \Delta\theta)),$$

где H – единичная функция Хевисайда, также могут быть представлены в форме, аналогичной (6), т.е.

$$q_z = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cos KN\theta; \quad q_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin KN\theta \quad (8)$$

$$(f_k = -p_0 \cdot 2 \sin KN\theta_2 / KN\theta_0; \quad g_k = -N_0 \cdot 2 \sin KN\theta_0 / R_0\theta_0).$$

Здесь уже выполнен предельный переход к сосредоточенным в сечениях $\theta = \pm\theta_0$ усилиям $N_0 = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} q_1 R_0 \Delta\theta$.

После подстановки разложений (6) – (8) в трансформированную по Лапласу систему (1) получаем алгебраическую систему уравнений относительно изображений искомых коэффициентов c_k и b_k

$$\begin{aligned} b_k^L \xi_k^{(1)} + c_k^L (s^2 + \xi_k^{(2)}) &= \gamma_0 f_k^L - \gamma_1 \xi_k^{(4)} v_k^L; \\ b_k^L (s^2 + \xi_k^{(3)}) + c_k^L \xi_k^{(1)} &= \gamma_0 g_k^L - \gamma_1 \xi_k^{(5)} v_k^L, \end{aligned} \quad (9)$$

где s – параметр преобразования; $\xi_k^{(1)} = KN(1 + \delta K^2 N^2)$; $\xi_k^{(2)} = 1 + \delta K^4 N^4$; $\xi_k^{(3)} = K^2 N^2 (1 + \delta)$; $\xi_k^{(4)} = 1 + (a_p / R_0) K^2 N^2$; $\xi_k^{(5)} = KN(1 + a_p / R_0)$.

Решение системы (9) принимает вид

$$c_k^L = D_k^c / D_k; \quad b_k^L = D_k^b / D_k; \quad (10)$$

$$D_k(s) = s^4 + s^2 \lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}; \quad D_k^c = \gamma_0 f_k^L (s^2 + \lambda_k^{(5)}) - \gamma_0 g_k^L \xi_k^{(1)} - \gamma_1 v_k^L \xi_k^{(4)} (s^2 + \lambda_k^{(3)});$$

$$D_k^b = -\gamma_0 f_k^L \xi_k^{(1)} + \gamma_0 g_k^L (s^2 + \lambda_k^{(4)}) - \gamma_1 v_k^L \xi_k^{(5)} (s^2 + \lambda_k^{(7)}),$$

при этом

$$\lambda_k^{(1)} = \xi_k^{(2)} + \xi_k^{(3)}; \quad \lambda_k^{(2)} = \xi_k^{(2)} \xi_k^{(3)} - \xi_k^{(1)2}; \quad \lambda_k^{(3)} = \xi_k^{(3)} - \xi_k^{(1)} \xi_k^{(6)};$$

$$\lambda_k^{(4)} = \xi_k^{(2)}; \quad \lambda_k^{(5)} = \xi_k^{(3)}; \quad \lambda_k^{(7)} = \xi_k^{(2)} - \xi_k^{(1)} / \xi_k^{(6)}; \quad \xi_k^{(6)} = \xi_k^{(5)} / \xi_k^{(4)}.$$

Далее, используя обычные правила операционного исчисления, осуществляем переход в пространство оригиналов. Тогда имеем

$$c_k = -\gamma_0 \frac{2 \sin KN\theta_2}{KN\theta_0} p_0 * I_k^{(5)} + \gamma_0 \xi_k^{(1)} \frac{2 \sin KN\theta_0}{R_0\theta_0} N_0 * I_k^{(1)} - \gamma_1 \xi_k^{(4)} \frac{2 \sin KN\theta_0}{KN\theta_0} V * I_k^{(3)};$$

$$b_k = \gamma_0 \xi_k^{(1)} \frac{2 \sin KN\theta_2}{KN\theta_0} p_0 * I_k^{(1)} - \gamma_0 \frac{2 \sin KN\theta_0}{R_0\theta_0} N_0 * I_k^{(4)} - \gamma_1 \xi_k^{(5)} \frac{2 \sin KN\theta_0}{KN\theta_0} V * I_k^{(7)}, \quad (11)$$

где обозначено $f * I = \int_0^t f(\tau) I(t-\tau) d\tau$; подынтегральные функции I получены в

виде:
$$I_k^{(r)} = \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_k^{(r,j)}}{\alpha_k^{(j)}} \sin(\alpha_k^{(j)} t) \quad (r = \overline{1,3,5,7}); \quad \beta_k^{(1,j)} = \frac{1}{\alpha_k^{(j)2} - \alpha_k^{(j)2}};$$

$$\beta_k^{(r,j)} = \frac{\lambda_k^{(r)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(i)2} - \alpha_k^{(j)2}} \quad (i, j = \overline{1,2}; i \neq j; r \neq 1); \quad \alpha_k^{(j)} - \text{модули мнимых корней биквад-}$$

ратного уравнения $D_k(s) = 0$.

В случае электромеханического возбуждения преобразователя функции p_0 и V , входящие в (11), предполагаются заданными, а неизвестное усилие N_0 находим из условия

$$u_0|_{\theta=\theta_0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin KN\theta_0 = 0, \quad (12)$$

представляющего собой интегральное уравнение Вольтерра I-го рода.

Если электроупругий слой находится в режиме прямого пьезоэффекта (имеет место режим «холостого хода»), то как N_0 , так и V , – неизвестны. Для их вычисления составляем систему интегральных уравнений, первое уравнение которой сохраняет вид (12), а второе получаем подстановкой (11) в формулу (8) с учетом представлений (6)

$$V = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k^{(4)} \frac{\sin KN\theta_0}{KN\theta_0}. \quad (13)$$

Решение системы интегральных уравнений (12), (13) выполняем численно с использованием специальных регуляризирующих алгоритмов [10], устойчивых к вычислительным погрешностям.

После определения значений p_0 , N_0 и V производим их подстановку в соотношения (11) и, используя полученные формулы, рассчитываем компоненты вектора перемещений (6).

4. Числовые результаты и их анализ.

Числовые данные получены для незамкнутой оболочки с длиной направляющей \bar{l}_0 , равной $2R_1\theta_0=104,7$ мм, которая составлена из слоя пьезокерамики марки PZT-5 с $h_p=2$ мм и слоя титанового сплава ВТ-6 ($h_m=h_p/2$) со следующими материальными характеристиками: $\rho_p=7600$ кг/м³; $s_{11}^p=15,4 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; $\nu=0,331$; $d_{13}=-178 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н; $\varepsilon_{33}^T=1750 \cdot \varepsilon_0$, $\varepsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\rho_m=4450$ кг/м³; $s_{11}^m=8,85 \cdot 10^{-12}$ м²/Н.

При выполнении расчетов в рядах (6) – (8) удержано 40 членов, что обеспечивает приближение к сумме ряда с погрешностью не более 3 %. Точность расчетов также

контролировалась варьированием шага дискретизации временного интервала при численном решении интегральных уравнений (12), (13).

В качестве тестового примера рассмотрено поведение незамкнутой биморфной оболочки с относительно большим радиусом $R_1 = 50$ м, на которую действует давление ступенчатого профиля $p_0(t) = 10^4 \cdot H(t)$ Н/м². При этом электроды являются короткозамкнутыми ($V = 0$), а область приложения механической нагрузки определяется центральным углом $2\theta_2 = \theta_0$. Очевидно, что для принятого значения R_1 и соотношения $\bar{l}_0/(h_p + h_m)$ преобразователь подобен асимметричной биморфной полосе шириной $\bar{l}_0 = \bar{l}_0$, математическая модель для которой описана в работе [2]. Рассчитанные по формулам (6) и (11) и изложенной в [2] методике нормальные перемещения в эквидистантном от краев сечении хорошо согласуются между собой (в настоящей работе они не приведены) и с достаточной степенью точности могут быть описаны уравнением $w = w_{st}(1 - \cos(2\pi t/T))$, где $w_{st} = -0,0478$ мм – статический прогиб в отмеченном сечении, возникающий при действии механической нагрузки $p_0 = 10^4$ Н/м² на области $\theta \in [-\theta_2; \theta_2]$; $T = 2,03$ мс – период низшей формы собственных колебаний биморфной полосы при $V = 0$ [2].

С увеличением кривизны рассматриваемого преобразователя максимальные значения радиального перемещения в сечении $\theta = 0$ для принятой ранее механической нагрузки, действующей на прежней области, существенно уменьшаются. В частности, при $R_1 = 0,05$ м ($\theta_0 = \pi/3$) и работе электроупругого слоя в режиме прямого пьезоэффекта амплитуда $w(0, t)$ уменьшилась в ≈ 77 раз, а период основной формы колебаний – в 8 (кривая 1, рис. 2, а). Возникающая при этом разность потенциалов между электродами пьезокерамического слоя изображена кривой 1 на рис. 2, б.

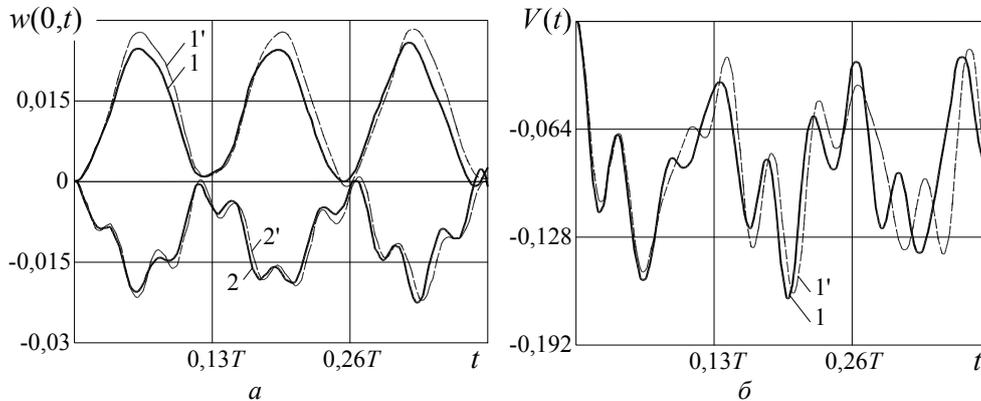


Рис. 2

Отметим, что на рис. 2 функция $w(0, t)$ отнесена к w_{st} , а $V(t)$ – к разности потенциалов V_{st} между разомкнутыми электродами биморфной полосы при действии статической механической нагрузки p_0 ($V_{st} \approx 62,5$ В).

На рис. 2, а сплошная кривая 2 иллюстрирует реакцию преобразователя с $R_1 = 0,05$ м на мгновенно приложенный постоянный электрический потенциал – $V(t) = -V_{st} \cdot H(t)$. Кривая 2 свидетельствует, что при электрическом возбуждении преобразователя изменение во времени перемещения $w(0, t)$ носит более сложный характер (в сравнении с кривой 1). Более высокочастотные колебания соответствуют

первому члену в разложениях (6), (7). Форма кривых, на которые накладываются эти колебания, при выбранном варианте закрепления и ее нагружения оболочки определяются преимущественно членами с $k = 2$.

Для оценки достоверности результатов (рис. 2) эти задачи были решены в программном комплексе, основанном на методе конечных элементов. Полученные числовые значения изображены соответствующими штриховыми кривыми и обозначены цифрой со штрихом. Возможной причиной различия результатов является использование в модели электроупругого преобразователя предположения, согласно которому его сдвиговая жесткость является бесконечной. Однако, в целом можно утверждать об удовлетворительном качественном и количественном совпадении графиков как радиального перемещения (рис. 2, а), так и разности потенциалов (рис. 2, б).

Выводы.

В работе получено решение задачи о нестационарном деформировании двухслойного электроупругого преобразователя в виде незамкнутой цилиндрической оболочки. При решении задачи применен способ введения дополнительной нагрузки, необходимой для удовлетворения кинематических условий на краях оболочки. В математическом смысле задача сведена к системе интегральных уравнений во времени, полученных на основе граничных условий. Проведенные расчеты показали эффективность разработанного численно-аналитического метода расчета механических и электрических характеристик исследуемого переходного процесса. Проверка достоверности результатов осуществлена решением тестовой задачи о колебаниях биморфной асимметричной полосы и сравнением с конечно-элементными решениями.

Отметим, что на основе представленных в данной работе соотношений можно рассмотреть как другие варианты закрепления граничных образующих биморфной оболочки, так и геометрию электродирования ее электроупругого слоя. Полученные результаты могут быть использованы при решении прикладных задач активного управления нестационарными колебаниями конструктивных элементов в виде незамкнутых цилиндрических оболочек.

РЕЗЮМЕ. Представлено чисельно-аналітичне розв'язання задачі про нестационарні коливання незамкненої нескінченної циліндричної оболонки з електропружного матеріалу для шарнірно закріплених граничних країв. Розглянуто режими прямого і зворотного п'єзоелектричного ефекту. Динамічні процеси моделюються в рамках лінійної теорії тонких електропружних оболонок, заснованої на узагальнених гіпотезах Кірхгофа – Лява. Для задоволення граничних умов введені додаткові навантаження. З використанням інтегрального перетворення Лапласа задача зведена до системи інтегральних рівнянь Вольтера. Числові результати наведені у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. Бабаев А.Э., Савин В.Г., Кожемяка Ю.В. Излучение акустических импульсов заданного профиля электроупругой цилиндрической оболочкой // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 186 – 191.
2. Бабаев А.Э., Бабаев А.А., Янчевский И.В. Активное демпфирование нестационарных изгибных колебаний биморфной балки // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 7. – С. 84 – 92.
3. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – К.: Наук. думка, 1977. – 339 с.
4. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э. Динамика систем оболочек, взаимодействующих с жидкостью // Успехи механики: В 6-ти т. / Под ред. А.Н. Гузя. Т. 3. – К.: «А.С.К.», 2007. – С. 185 – 245.
5. Карлаш В.Л. Резонансные электромеханические колебания пьезоэлектрических оболочек вращения (обзор) // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 3 – 34.
6. Карнаухова Т.В. Активное демпфирование вынужденных резонансных колебаний пологой вязкоупругой композитной цилиндрической панели при действии на нее неизвестной механической нагрузки // Акуст. вісник. – 2008. – 11, № 4. – С. 24 – 30.
7. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В., Пересунько Н.В. Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 132 – 140.

8. Кубенко В.Д., Янчевский И.В. Нестационарные неосесимметричные колебания цилиндрической оболочки металл-пьезокерамика // Зб. наук. праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2011. – Вип. 12. – С. 188 – 196.
9. Рудницький С.И., Шаранов В.М., Шульга Н.А. Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 10. – С. 64 – 72.
10. Янютин Е.Г., Янчевский И.В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХАДИ, 2001. – 184 с.
11. Ding H.J., Xu R.Q., Chen W.Q. Free vibration of transversely isotropic piezoelectric circular cylindrical panels // Int. J. Mech. Sci. – 2002. – **44**, Iss. 1. – P. 191 – 206.
12. Gupta K.M. An orthotropic adaptive shallow cylindrical shell on elastic foundation // Int. J. Res. and Rev. Appl. Sci. – 2010. – **2**, Iss. 1. – P. 67 – 87.
13. Nosier A., Ruhi M. Three dimensional analysis of laminated cylindrical panels with piezoelectric layers // IJE. Transactions B: Applications. – 2006. – **19**, N 1. – P. 61 – 72.
14. Ootao Y., Tanigawa Y. Control of transient thermoelastic displacement of an angle-ply laminated cylindrical panel bonded to a piezoelectric layer // Appl. Math. and Comp. – 2004. – **148**, N1. – P. 263 – 286.
15. Qiu J., Ji H. The application of piezoelectric materials in smart structures // Int. J. Aeronaut. and Space Sc. – 2010. – **11**, N 4. – P. 266 – 284.
16. Sheng G.G., Wang X. Active control of functionally graded laminated cylindrical shells // Composite Structures – 2009. – **90**, Iss. 4. – P. 448 – 457.
17. Wang H.M., Ding H.J., Chen Y.M. Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems // Int. J. Sol. and Struct. – 2005. – **42**, N1. – P. 85 – 102.
18. Yang J.S. Piezoelectric transformer structural modeling – A review // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. – 2007. – **54**, N 6. – P. 1154 – 1170.

Поступила 03.10.2011

Утверждена в печать 22.11.2012

