УДК 517.9

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Осесимметричное потенциально-вихревое течение со свободной границей

Доказана разрешимость краевой задачи со свободной границей. Построено приближенное решение методом Ритца. Доказана сходимость приближенного решения к точному в интегральной метрике.

Постановка задачи. Изучается осесимметричное течение, когда ось $0x$ является осью симметрии потока в следующей постановке. Обозначим через D область, ограниченную снизу отрезком $A = (0 \leqslant x \leqslant a, y = 0)$, сверху — кривой $P\colon\, y = g(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, где $g(0) = b_1$, $g(a) = b_2$, $b_1 \leqslant b_2$, а $g(x)$ — аналитическая, монотонно возрастающая функция при $x \in [0, a]$, причем $g'(0) = 0$, $g'(a) = b$. Боковую часть границы области D, состоящую из вертикалей, обозначим через $Q_1 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b_1)$ и $Q_2 = (x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b_2)$. Пусть γ — жорданова дуга в D, концы которой лежат на вертикалях Q_1 и Q_2, причем все точки γ, включая и концы, расположены ниже кривой P. Кривая γ разбивает область D на две односвязные области G_γ, находящиеся выше γ и Ω_γ. Такие дуги будем называть допустимыми. Концы γ разбивают вертикали Q_1 и Q_2 на два открытых множества — R_1-боковую часть границы области G_γ и R_2-боковую часть границы области Ω_γ.

Рассматривается задача: требуется определить функции тока $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ и свободную границу γ по условиям

$$\psi_{1xx} + \psi_{1yy} - y^{-1}\psi_{1y} = \overline{\omega} y, \qquad (x, y) \in G_\gamma, \tag{1}$$

$$\psi_{1x} = 0, \qquad (x, y) \in R_1; \qquad \psi_1 = C, \qquad (x, y) \in P; \qquad \psi_1 = 1, \qquad (x, y) \in \gamma, \tag{2}$$

$$\psi_{2xx} + \psi_{2yy} - y^{-1}\psi_{2y} = 0, \qquad (x, y) \in \Omega_\gamma, \tag{3}$$

$$\psi_{2x} = 0, \qquad (x, y) \in R_2; \qquad \psi_2 = 0, \qquad (x, y) \in A; \qquad \psi_2 = 1, \qquad (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

$$|\nabla\psi_1| = |\nabla\psi_2| = 0, \qquad (x, y) \in \gamma. \tag{5}$$

Здесь $\omega = \mathrm{const} > 0$, а $C = \mathrm{const} > 1$. Ранее в работе [1] отдельно изучались случаи потенциального и вихревого течения, когда на свободной границе задавалось условие Бернулли в виде неравенства.

Вариационная постановка задачи. Рассмотрим функционал

$$Y(\psi_1, \psi_2, \gamma) = \iint\limits_{G_\gamma} [\psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2 + 2\omega(\psi_1 - 1)]\frac{dxdy}{y} + \iint\limits_{\Omega_\gamma} [\psi_{2x}^2 + \psi_{2y}^2]\frac{dxdy}{y} \tag{6}$$

на множестве V допустимых троек (ψ_1, ψ_2, γ), обладающих следующими свойствами: γ — допустимая дуга; функция $\psi_1(x, y)$ определена и непрерывна в замыкании области G_γ, кусочно-непрерывно дифференцируема в G_γ, равна единице на γ и постоянной C при

$(x, y) \in P$; функция $\psi_2(x, y)$ определена и непрерывна в замыкании области Ω_γ, кусочно-непрерывно дифференцируема в Ω_γ, равна единице на γ и нулю при $(x, y) \in A$, причем $Y(\psi_1, \psi_2, \gamma) < \infty$.

Лемма 1. *Пусть тройка (ψ_1, ψ_2, γ) является классическим решением задачи (1)–(5). Тогда эта тройка будет стационарной для функционала (6) на множестве V. Обратно, каждая стационарная тройка (ψ_1, ψ_2, γ) функционала (6) на множестве V, где γ — достаточно гладкая кривая, является решением задачи (1)–(5).*

Лемма 1 позволяет свести разрешимость нелинейной задачи (1)–(5) к проблеме минимума функционала (6) на множестве V.

Далее можно установить существование таких последовательностей γ_k и $\widehat{\gamma}_k$ линий уровня функций $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$, являющихся решением задач соответственно (1), (2) и (3), (4) так, что $\gamma_k = \{(x, y)\colon (x, y) \in G_\gamma,\ \psi_1(x, y) = C_k\}$, $\widehat{\gamma}_k = \{(x, y)\colon (x, y) \in \Omega_\gamma,\ \psi_2(x, y) = \widehat{C}_k\}$, а C_k и $\widehat{C}_k$ монотонно стремятся к единице при $k \to \infty$.

Симметризация областей G_γ и Ω_γ. Пусть V_γ — подмножество множества V, состоящее из всех троек (ψ_1, ψ_2, γ), где γ — фиксированная допустимая кривая. С помощью вариационного подхода доказывается лемма.

Лемма 2. *Существует единственная тройка (ψ_1, ψ_2, γ), на которой функционал (6) достигает своего наименьшего значения. При этом функции $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ являются единственными решениями соответственно задач (1), (2) и (3), (4).*

Пусть теперь γ — произвольная допустимая кривая, $\psi_1(x, y)$ — решение задачи (1), (2) в заданной области G_γ, а $\psi_2(x, y)$ — решение задачи (3), (4) в Ω_γ. Введем в рассмотрение множества

$$G_1 = \{(x, y) \in G_\gamma\colon \psi_1(x, y) < 1\}, \qquad L_1 = \{(x, y) \in R_1\colon \psi_1(x, y) < 1\},$$

$$G_2 = \{(x, y) \in G_\gamma\colon \psi_1(x, y) > 1\}, \qquad L_2 = \{(x, y) \in R_1\colon \psi_1(x, y) > 1\}.$$

Лемма 3. *Пусть (ψ_1, ψ_2, γ) — допустимая тройка, причем $\psi_1(x, y)$ — решение задачи (1), (2), а $\psi_2(x, y)$ — решение задачи (3), (4). Просимметризуем область G_2 относительно осей координат. Полученную область обозначим через G^*, а ее свободную границу — через γ^*. Пусть $\psi_1^*(x, y)$ — решение задачи (1), (2) в G^*, а $\psi_2^*(x, y)$ — решение задачи (3), (4) в $\Omega^* = \mathrm{int}(D \setminus G^*)$. Тогда $Y(\psi_1^*, \psi_2^*, \gamma^*) \leqslant Y(\psi_1, \psi_2, \gamma)$, причем $\psi_{1y}^* > 0$ в G^*, а $\psi_{2y}^* > 0$ в Ω^* и γ^* задается уравнением*

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — неубывающие функции параметра t.

Теорема существования. Пусть d — точная нижняя грань функционала (6) на множестве V и $(\psi_{1n}, \psi_{2n}, G_n, \Omega_n)$ — минимизирующая последовательность. На основании леммы 3 можно считать, что G_n и Ω_n имеют свободную границу γ_n, заданную уравнениями типа (7). В силу леммы 2 в качестве функций ψ_{1n} и ψ_{2n} можно брать решения задач (1), (2) и (3), (4) соответственно в областях G_n и Ω_n. Применяя затем метод внутренних вариаций Шиффера и симметризацию Штейнера [1–3], докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть функция $g(x)$ монотонно возрастает в $[0, a]$, является аналитической функцией переменной x при $0 \leqslant x \leqslant a$ и, кроме того, $g'(0) = 0$, $g'(a) = 0$. И пусть также выполнено условие $1 - \omega a^2/2 > 0$. Тогда существует единственное решение (ψ_1, ψ_2, γ) задачи (1)–(5), удовлетворяющее условиям $\psi_{1y} > 0$ в G_γ, а $\psi_{2y} > 0$ в Ω_γ. При этом γ*

является монотонно-возрастающей дугой, аналитической в окрестности каждой своей внутренней точки, причем γ не имеет общих точек с кривой P и отрезком A. Функции $\psi_1(x,y)$ и $\psi_2(x,y)$ непрерывны в $\overline{G_\gamma}$ и $\overline{\Omega_\gamma}$, непрерывно дифференцируемы вплоть до границы всюду за исключением концевых точек γ.

Решение задачи (1)–(5) методом Ритца. Функционал (6) в классе функций $\psi_{1y}>0$ в $\overline{G_\gamma}$ и $\psi_{2y}>0$ в $\overline{\Omega_\gamma}$ представим следующим образом:

$$Y_1(z_1,z_2)=\iint\limits_{\Delta_1}\left[\left(z_{1x}+\frac{g_x}{g}z_1\right)^2+\frac{1}{g^2}+2\omega(\varphi-1)z_1z_{1\varphi}^2\right]\frac{dxdy}{z_1z_{1\varphi}}+$$
$$+\iint\limits_{\Delta_2}\left[\left(z_{2x}+\frac{g_x}{g}z_2\right)^2+\frac{1}{g^2}\right]\frac{dxdy}{z_2z_{2\varphi}}, \tag{8}$$

где $\Delta_1=(0<x<a, 1<\varphi<C)$, $\Delta_2=(0<x<a, 0<\varphi<1)$, $z_1(x,\varphi)$ и $z_2(x,\varphi)$ — функции, определенные соответственно в $\overline{\Delta_1}$ и $\overline{\Delta_2}$ и являющиеся решениями уравнений $\varphi_1(x,z)\varphi_1=0$, $\varphi_2(x,z)-\varphi_2=0$, $\psi_1(x,zg(x))=\varphi_1(x,z)$, $\psi_2(x,zg(x))=\varphi_2$. Функционал (8) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$G_z=\Big\{(z_1,z_2)\colon z_1\in C^1(\overline{\Delta_1}), z_2\in C^1(\overline{\Delta_2}), \sqrt{\varphi}z_{2\varphi}\in C(\overline{\Delta}), z_2(x,0)=0,$$
$$z_1(x,1)=z_2(x,1), \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_1}}z_{1\varphi}>0, \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_2}}z_{2\varphi}>0\Big\}. \tag{9}$$

Обозначим через (z_1^*,z_2^*) пару, соответствующую решению задачи (1)–(5). Очевидно, что $(z_1^*,z_2^*)\in G_z$. Далее, положим $w(x,\varphi)=\ln z(x,\varphi)$. Тогда семейство допустимых функций G_z перейдет в новое семейство G_w, при этом имеем

$$Y_2(w_1,w_2)=\iint\limits_{\Delta_1}\left[\left(w_{1x}+\frac{g_x}{g}\right)^2+\frac{e^{-2w_1}}{g^2}+2\omega g(\varphi-1)e^{w_1}w_{1\varphi}^2\right]\frac{dxdy}{w_{1\varphi}}+$$
$$+\iint\limits_{\Delta_2}\left[\left(w_{2x}+\frac{g_x}{g}\right)^2+\frac{e^{-2w_2}}{g^2}\right]\frac{dxdy}{w_{2\varphi}}, \tag{10}$$

где $Y_1(z_1,z_2)=Y_1(e^{w_1},e^{w_2})=Y_2(w_1,w_2)$; $w_{1\varepsilon}=w_1^*+\varepsilon\delta w_1$; $w_{2\varepsilon}=w_2^*+\varepsilon\delta w_2$; $\delta w_1=w_1-w_1^*$; $\delta w_2=w_2-w_2^*$; $w_1^*=\ln z_1^*$; $w_2^*=\ln z_2^*$; $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$, а w_1, w_2 — произвольная пара из G_w. Используя теперь формулу Фридрихса [4], получим

$$Y_2(w_1,w_2)=Y_2(w_1^*,w_2^*)+\frac{d}{d\varepsilon}Y_2(w_{1\varepsilon},w_{2\varepsilon})\Big|_{\varepsilon=0}+\int\limits_0^1(1-\varepsilon)\frac{d^2}{d\varepsilon^2}Y_2(w_{1\varepsilon},w_{2\varepsilon}). \tag{11}$$

Учитывая, что первая вариация функционала $Y_2(w_1,w_2)$, вычисленная на паре (w_1^*,w_2^*), обратится в ноль, а вторая вариация этого функционала в силу [3] положительно определена, заключаем, что $Y_1(z_1^*,z_2^*)=Y_2(w_1^*,w_2^*)\leqslant Y_2(w_1,w_2)=Y_1(z_1,z_2)$ для любой пары $(z_1,z_2)\in G_z$.

Тогда получим утверждение.

Лемма 4. *Пара $(z_1^*, z_2^*) \in G_z$, соответствующая решению задачи* (1)–(5)*, доставляет наименьшее значение функционалу* (10) *на множестве* (9).

Будем минимизировать функционал (8) на множестве (9) при помощи сумм:

$$z_{1n}(x,\varphi) = 1 + \frac{c-\varphi}{c-1}\sum_{k=0}^{L}\sum_{j=0}^{M_j} b_{kj}x^j\varphi^k, \qquad z_{2n}(x,\varphi) = \sqrt{\varphi}\sum_{k=0}^{L}\sum_{j=0}^{M_j} a_{kj}x^j\varphi^k, \tag{12}$$

где $n = \sup(j + M_j)$ при $0 \leqslant j \leqslant L$. Включение $(z_{1n}z_{2n}) \in G_z$ выделяет в евклидовом пространстве E_r коэффициентов a_{kj}, b_{kj} область допустимости G_r, где $r = \sum\limits_{k=0}^{L}(1 + 2M_k)$, $G_2 = G_r^+ \bigcap E_0$, $G_r^+ = G_r^1 \oplus G_r^2$, $E_0 = E_0^0 \oplus E_1^0 \oplus \ldots \oplus E_L^0$,

$$G_r^1 = \left\{b_{kj}\colon \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_1}} z_{1n\varphi} > 0\right\}, \qquad G_r^2 = \left\{a_{kj}\colon \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta_2}} z_{2n\varphi} > 0\right\},$$

$$E_0^0\colon \sum_{k=1}^{M_0} a_{ko} = \sum_{k=0}^{M_0} b_{ko} + 1; \quad E_j^0\colon \sum_{k=1}^{M_j} a_{kj} = \sum_{k=0}^{M_j} b_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, L; \quad L = \max_{0\leqslant k\leqslant M} L_k\,.$$

Неизвестные коэффициенты a_{kj}; b_{kj} определяются из нелинейной системы Ритца [3, 5, 6].

Теорема 2. *Функция $Y_1(a_{kj}, b_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке множества G_r, лежащей на конечном расстоянии от начала координат. При этом нелинейная система Ритца имеет, по крайней мере, одно решение на множестве G_r.*

Сходимость приближений Ритца. Решив систему Ритца при каждом фиксированном n, можно затем построить последовательность приближений (12) в виде $z_{1n}(x,\varphi) = z_{1n}^*$, $z_{2n}(x,\varphi) = z_{2n}^*$.

Лемма 5. *Приближения* (12)*, построенные по методу Ритца, образуют минимизирующую последовательность для функционала* (8) *на множестве* (9).

Теорема 3. *Пусть выполнены все предположения теоремы 1. Тогда справедливы следующие предельные соотношения при $n \to \infty$:*

$$\iint\limits_D [(\psi_{nx} - \psi_x)^2 + (\psi_{ny} - \psi_y)^2]\frac{dxdy}{y} \to 0,$$

$$\iint\limits_{G_\gamma} [(\psi_{1nx} - \psi_{1x})^2 + (\psi_{1ny} - \psi_{1y})^2]\frac{dxdy}{y} \to 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega_\gamma} [(\psi_{2nx} - \psi_{2x})^2 + (\psi_{2ny} - \psi_{2y})^2]\frac{dxdy}{y} \to 0,$$

где (ψ_1, ψ_2, γ) — точное решение задачи (1)–(5)*; $\psi_1(x, z_{1n}(x,\varphi)g(x)) = \psi_{1n}$; $\psi_2(x, z_{2n}(x, \varphi)g(x)) = \psi_{2n}$; $\psi_n = \psi_{1n}$ при $(x,y) \in G_\gamma$ и $\psi_n = \psi_{2n}$, если $(x,y) \in \Omega_\gamma$.*

1. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
2. *Миненко А. С., Шевченко А. И.* Методы исследования нелинейных математических моделей. – Киев: Наук. думка, 2012. – 130 с.
3. *Миненко А. С.* Осесимметричное течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–487.

4. *Friedrich K. O.* Uber ein Minimumproblem für Potentialstromungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**, No 1. – P. 60–82.
5. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291–294.
6. *Миненко А. С.* О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1358–1394.

Донецкий национальный технический университет *Поступило в редакцию 04.11.2013*

Член-кореспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко**

Осесиметрична потенціально-вихрова течія з вільною межею

Доведено розв'язність крайової задачі з вільною межею. Побудовано наближений розв'язок методом Рітца. Доведено збіжність наближеного розв'язку до точного в інтегральній метриці.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

Axially symmetric potentially rotational flow with free boundary

The solvability of a boundary-value problem with free boundary is proved. The approximate solution is constructed using the Ritz method. The convergence of the approximate solution to the exact one in the integral metric is proved.