УДК 550.34.013:531.314

**А. С. Костинский**

# Очаг землетрясения как возбудимая среда: последовательная аксиоматика скалярного полевого описания

*(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)*

*По логике работ автора, новые возможности развития классических кинематических очаговых моделей появляются, если основные соотношения, касающиеся распределенного вектора скачка смещения, трактуются как аксиоматические утверждения. Модуль вектора скачка или функция подвижки рассматривается как абстрактное скалярное поле, инвариантное относительно группы “квазилоренцевых” преобразований, с некоторой произвольной постоянной в роли предельной скорости распространения взаимодействий. В представленном сообщении строится последовательная аксиоматика поля (аналогично лагранжеву подходу обычной физики) в ситуации, когда нет никакой “опоры” в экспериментальных данных. Обращается внимание на нетрадиционность ключевого требования минимальности действия и на проблему совместимости с условием положительной определенности плотности энергии произвольного нелинейного поля.*

Традиционно для современного описания конструировать лагранжиан физической системы в виде конечного числа слагаемых, представляя с самого начала частичную сумму некоторого ряда, определенное усечение. Ряд мыслится как существующее, но недосягаемое идеальное описание, эквивалент полной информации о системе. Обычно соображения о том, какие слагаемые подразумеваются отброшенными, подсказаны требованиями инвариантности, в конечном счете имеющимися экспериментальными данными о системе. Классическим примером может служить линейная релятивистская теория электромагнитного поля [1, *с. 93*]. В противоположность этому, пытаясь обнаружить новые возможности развития в кинематических очаговых моделях [2–4], рассматривая ключевое соотношение

$$U_i(\vec{x},t) = \frac{\gamma_i}{4\pi\rho\alpha^3 r}(\lambda + 2\mu(\vec{\gamma}\vec{\nu})^2)\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma} \varphi\left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{\alpha}\right) d\Sigma(\xi) +$$

$$+ \frac{\mu(\vec{\gamma}\vec{\nu})(\nu_i - \gamma_i(\vec{\gamma}\vec{\nu}))}{2\pi\rho\beta^3 r}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma} \varphi\left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|}{\beta}\right) d\Sigma(\xi)$$

вне теоремы представления как аксиому связи наблюдаемого вектора $\vec{U}$ и вектора состояния $\varphi$ системы, приходится, конструируя лагранжиан поля $\varphi$, начинать “с чистого листа”. Попытка руководствоваться принципом минимальности, именно минимальности, а не стационарности, действия показывает, что возможность прийти к физически разумному сочетанию знаков коэффициентов в уравнении поля существует. Логика подхода однозначно выделяет сочетание знаков, отвечающее центрально-симметричным решениям типа бегущего фронта с “изначальным” или “внутренним” затуханием [5]. Тем не менее очень существенно в поиске самоорганизации, диссипативных структур или режимов с обострением в вариантах нелинейного описания поля $\varphi$ опираться на последовательно, более строго, чем это было сделано в заметке [5], сформулированную аксиоматику поля. Вариант такой аксиоматики приводится ниже.

Присвоим декартовым координатам двумерной пространственной "арены" привычные обозначения

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y.$$

Как неотъемлемый элемент появляется "временная" координата $x^0 = c_E t$, $c_E$ есть некоторая характерная постоянная ("E" означает "Эйнштейн"). За полем $\varphi$ закрепляется ранг объекта в $2+1$-мерном псевдоевклидовом пространстве,

$$\varphi = \varphi(x^i), \qquad i = 0, 1, 2, \tag{1}$$

всюду в дальнейшем, если не оговорено иное, латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Сформулируем следующие основные предположения, останавливаясь на уточнениях и комментариях, может быть, излишне подробно. Согласимся с "физическим уровнем строгости", но то, что в обычной физике считается привычным и само собой разумеющимся, здесь нуждается, по крайней мере, в оправдании.

**1.** Поле $\varphi$ меняется так, что всегда существует действие $S$:

$$S = \int \Lambda dt, \tag{2}$$

рассматриваемое аналогично (1) как объект в $2+1$-мерном псевдоевклидовом пространстве, минимальное для действительного движения (интегрирование по времени между заданными моментами $t_1, t_2$). Интеграл $S$ остается инвариантным при переходе к произвольным криволинейным пространственным координатам, но, кроме того, имеет трансформационные свойства $2+1$-скаляра относительно "квазилоренцевых" преобразований

$$\begin{aligned} &t, x^1, x^2 \to t', x^{1'}, x^{2'}, \\ &c_E t' = \mathrm{Z}_0(c_E t, x^1, x^2), \\ &x^{1'} = \mathrm{Z}_1(c_E t, x^1, x^2), \qquad x^{2'} = \mathrm{Z}_2(c_E t, x^1, x^2), \end{aligned} \tag{3}$$

определяемых произвольными параметрами $u_1$, $u_2$, $\omega$ [6, *с. 37*].

*Замечание.* Существенно, что требуется именно минимум. Обычная стационарность, т. е. исчезновение первой вариации, даст только уравнение движения с произвольными коэффициентами, пусть постоянными. Ограничиваясь этим, поскольку у нас нет интерпретации $\varphi$, мы ничего не сможем сказать о коэффициентах, по крайней мере в отношении знаков. Диапазон возможных решений, т. е. свойств возбудимой среды, окажется в этом случае слишком велик.

**2.** Подынтегральная функция в $S$ может быть представлена через плотность лагранжиана $L$:

$$\Lambda = \int L \, dxdy \tag{4}$$

(интегрирование по всей двумерной области, занятой полем).

*Замечание.* В классической теории поля представление в виде интеграла по объему оправдано, с одной стороны, реальностью квантов, взаимодействующих или не взаимодействующих друг с другом. "Тень" дискретного описания традиционно неотделима, и тогда знак $\int$ в функции (4) ассоциируется не только с суммой в смысле Римана. Поскольку никакое описание среды-источника, кроме континуального, не планируется, остается постулировать **2** как чисто математическое свойство функции $\Lambda$. Разложение поля на осцилляторы возможно, конечно, в линейной теории, но только как формальный прием.

**3.** Плотность $L$ не зависит явно от $t$.

*Замечание.* Следует признаться сразу, что пытаться учесть взаимодействие поля $\varphi$ с какими-то "внешними" полями означает сделать задачу полностью неопределенной. Таким образом, налицо двойственность, и она принципиальна. С одной стороны, "островок" возбудимой среды не мыслится иначе, как открытая система, но, если это нелинейная система, существуют эффекты самоорганизации, порожденные самим полем. Диссипативные структуры или автоволны возникают (если возникают) как результат нелинейного взаимодействия разнесенных в пространстве областей поля, и необходимость заставляет ограничить предмет исследования, договариваясь учитывать в лагранжиане только это взаимодействие. Иначе говоря, субстанцию возбудимой среды в целом и "сопутствующее" поле $\varphi$ приходится рассматривать все-таки как замкнутую систему. Плотность $L$, инвариантная относительно преобразований (3), может зависеть от пространственных координат только через произвольную функцию интервала $f(s)$, $s^2 = (c_E t)^2 - x^2 - y^2$, но если $L$ не зависит от $t$, $L$ не может явно зависеть и от $x$, $y$.

Теперь можно утверждать, что плотность $L$ может зависеть от поля $\varphi$ только через $2+1$-мерные инварианты, образованные из поля и его производных, и два препятствия преграждают путь к единственной "обозримой" функции $L$. Во-первых, так или иначе, но приходится иметь дело с бесконечным, строго говоря, числом допустимых инвариантов, никакие из них не могут быть заведомо исключены как аргументы в $L$, все для нас равноправны. Бесконечность, впрочем, здесь потенциальная, становящаяся. Оставим во множестве аргументов только независимые, т. е. не связанные алгебраическими уравнениями, инварианты. Более того, выберем простейшие из них, даже соответствующие в обычной теории описанию поля с источниками (например, $\varphi$, но не $\varphi^2$ или $\varphi^3$). Конечно, невозможно представить в этом перечне, назовем его *полным основным списком*, инвариант, в котором порядок производной обозначался бы символом $\infty$. Однако какое бы достаточно большое положительное число $n$ мы не взяли, мысленно всегда осуществляется возможность сконструировать, например, инвариант с производными порядка большего, чем $n$.

Рассмотрим теперь множество реализаций описания, ансамбль лагранжианов, зависящих от полного основного списка аргументов. Этот ансамбль порождается уже только разными версиями функциональной зависимости. Не пытаясь строго сформулировать свойства множества возможных $L$ над полным основным списком, будем считать первичным, изначальным все многообразие видоизменений, а каждое конкретное $L$ возникнет как заимствование из "осязаемого" целого. Каждый раз мы потенциально получаем в свое распоряжение функцию $L$, вектор гильбертова пространства, назовем его *абсолютным описанием*,

$$L^{(\mathrm{abs})} = L\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x_i}, \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^i\partial x_i\partial x^k\partial x_k}, \dots\right), \tag{5}$$

и представимые только как проект уравнения Эйлера–Лагранжа высшей возможной сложности. Можно сказать, что (5) дает безупречную, эталонную с точки зрения принципа Гамильтона конструкцию поля, и отсюда начинается “спуск” к физически разумным $L$. Ситуация кардинально отличается от классической электродинамики, где лагранжево описание свободного поля с помощью первого простейшего инварианта

$$I_0 = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2), \qquad L_{\mathrm{M}} = I_0, \tag{6}$$

возникло как одна из формулировок линейной теории Максвелла (индекс “M” в лагранжиане означает “Максвелл”). Уже позже рассматривались обобщения (6), специальным образом сконструированный лагранжиан Борна–Инфельда [7]

$$L_{\mathrm{BI}} = \frac{E_0^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2} - \frac{(\vec{E}\vec{H})^2}{E_0^4}}\right), \qquad E_0 = \mathrm{const},$$

и теория с высшими производными Боппа–Подольского [8, 9]

$$L_{\mathrm{BP}} = \frac{1}{8\pi}\left\{E^2 - H^2 + \frac{1}{k_0^2}\left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})^2 - \left(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)^2\right]\right\}, \qquad k_0 = \mathrm{const}.$$

Ограниченность человеческих сил и средств заставляет искать реализацию $L$ на подмножестве вырожденных функций, зависящих не от всех инвариантов полного основного списка, а только от инвариантов с производными порядка не более, чем некоторое целое число $n_D^{(\infty)}$. Здесь по-прежнему актуальная бесконечность вариантов, в поле мысленного зрения все вырожденные версии $L$ как целостный, готовый к рассмотрению объект. Каждая версия, назовем ее *совершенным описанием*, снова появляется для нас как вектор гильбертова пространства функций

$$L^{(\mathrm{per})} = L\left(n_D^{(\infty)}, \phi, \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\partial x_i}, \frac{\partial^4\phi}{\partial x^i\partial x_i\partial x^k\partial x_k}, \ldots\right), \tag{7}$$

причем при отсутствии поля $L^{(\mathrm{per})} = 0$.

**4.** Существует *совершенное описание* $L^{(\mathrm{per})} = L$ такое, что функция (7) — аналитическая по каждому из аргументов в некоторой окрестности нуля. Более того, формально сконструированный бесконечный ряд по инвариантам, “имитирующий” ряд Тейлора, сходится к $L$ для всех возможных эволюций возбудимой среды, определяемых аксиомой **1**.

*Замечание.* Заменим каждый инвариант в (7) на независимую переменную, запишем кратный степенной ряд для $L$ как функции независимых переменных, а затем на место этих переменных вернем соответствующие инварианты. Предполагается, что такой “функционально-степенной” ряд в любом случае есть $L$, какую бы функцию мы не получили в результате минимизации действия $S$. Ряд сходится в том смысле, что разница между его частичной суммой и $L$, задаваемым выражением (7), грубо говоря, становится все меньше по мере увеличения числа членов ряда. Если это справедливо, то справедливо для всех значений координат $x$, $y$ в области существования возбудимой среды, любого момента времени $t$ и любой функции $\varphi$, согласной с аксиомой **1**.

Здесь требуется некоторое уточнение. Выражение для степенного ряда по инвариантам для $L^{(\mathrm{per})} = L$ как нечто застывшее, завершенное, есть, с другой точки зрения, не что иное, как функция $3n_D^{(\infty)} + 1$ “вторичных” аргументов. Именно это — “аргумент с нулевым номером” $\varphi$ и производные $\varphi$ разных порядков как равноценные независимые переменные, производные по времени и пространственным координатам уравнены в правах псевдоевклидовым пространством. Любой член ряда характеризуется степенью по "вторичному" аргументу $\varphi$, но также целым числом, которое обыкновенно называется степенью по полю, и это не одно и то же. Оборвать ряд, образовать частичную сумму, можно, задавая некоторую максимальную степень $\varphi$, или максимальную степень по полю, или максимальную степень определенного порядка производной, и каждый из этих вариантов должен рассматриваться независимо.

**5.** Поле $\varphi$ в некотором смысле слабое. Это означает, что существует положительное целое число $n_0^{\max}$, $n_0^{\max} \geqslant 2$, такое, что слагаемые в разложении $L = L^{(\mathrm{per})}$ по инвариантам, имеющие степень по полю, иначе говоря, степень однородности "по букве $\varphi$, где бы она ни встретилась", $n_0 > n_0^{\max}$, в совокупности считаются малыми и могут быть отброшены.

**6.** Поле $\varphi$ в некотором смысле меняется медленно. Это означает, что для каждого порядка $N_D \leqslant n_D^{(\infty)}$ производной, включая $N_D = 0$, существует целое положительное число $n_D^{\max}(N_D) \geqslant 0$, определяющее "край" частичной суммы, $n_D^{\max}$ зависит от $N_D$. Иными словами, слагаемые в разложении $L = L^{(\mathrm{per})}$ по инвариантам, содержащие производные порядка $N_D$ и имеющие степень по этим производным $n_D > n_D^{\max}$, в совокупности считаются малыми и могут быть отброшены.

*Замечание.* Показатель $n_0^{\max}$ и функция $n_D^{\max}(N_D)$ задают определенный *уровень описания*, они произвольны и, как было сказано, изначально независимы друг от друга. Традиционно всегда предполагается, что можно очертить границу полноты свойств, набора, исчерпывающего существенные для физики явления свойства. Например, чтобы описать поведение листиков электроскопа, достаточно закона Кулона и можно забыть о бесконечных (в классической электродинамике) значениях потенциалов и энергии поля в точках расположения зарядов. Но в данном случае "компас свойств" указывает только на то, что самоорганизация возможна исключительно для нелинейного поля, подробности появятся (если появятся) после решения уравнений движения. Можно, следовательно, расценивать **5**, **6** как попытку формализовать понятие *уровня полного описания*.

В сущности, все, описанное выше, есть не более чем лагранжев подход обычной физики в ситуации, когда нет никакой "опоры" в экспериментальных данных. Нетрадиционно только требование минимальности действия. Именно это, как выясняется, очень жесткое условие, границы "могущества" которого было бы крайне любопытно очертить, оказывается не всегда совместимым с выбранными показателями $n_0^{\max}$ и $n_D^{\max}(N_D)$, с заданным уровнем полного (в смысле непротиворечивого) описания. Не всегда совместимым еще и по той причине, что придя в конце концов к некоторому определенному "релятивистскому" лагранжиану, мы автоматически получаем закон сохранения, поток энергии, связанный с импульсом свободного поля. Отсутствие явной зависимости лагранжиана от координат $x^i$ означает, что существует симметричный тензор энергии-импульса $T_{ik}$, $2+1$-дивергенция которого обращается в нуль. Соответствующая плотность энергии поля, компонента $T_{00}$, должна быть положительно определенной при любых значениях входящих в лагранжиан произвольных постоянных, но это в общем случае не так [5].

Один из наиболее заслуживающих внимания "строительных блоков" в здании кинематического очагового моделирования — самоподобное решение [10]

$$\Delta V \sqrt{t^2 - \left(\frac{\rho}{\nu}\right)^2} H\left(t - \frac{\rho}{\nu}\right), \qquad \Delta V, \nu = \mathrm{const}, \tag{8}$$

на языке автоволновых процессов называлось бы распространением уединенного фронта возбуждения или бегущим фронтом. Усилия, затраченные на "встраивание" теории поля в привычную схему моделирования, можно было бы считать, пусть отчасти, оправданными, если бы из уравнений поля следовало решение, связанное некоторым принципом соответствия с решением (8). Это означало бы связь ранее совершенно различных областей знания и прямое указание на то, что традиционный для сейсмолога образ распространяющихся трещин скрывает более глубокую реальность, отраженную во всеобщности принципа наименьшего действия. Скорее всего следствием описанной выше аксиоматики будет некоторое множество фундаментальных решений типа (8) для бесконечного пространства, но ограниченных во времени. Отдельную проблему представляет трактовка "двумерной" энергии, связанной с полем $\varphi$, но уже на данном этапе возможно и необходимо указать как ориентир в выборе положительную определенность плотности $T_{00}$ для конкретного решения полевого уравнения. В этом состоит одна из целей настоящего сообщения.


1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – Москва: Наука, 1973. – 502 с.
2. *Molnar P., Tucker B. E., Brune J. N.* Corner frequencies of P- and S-waves and models of earthquake sources // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1973. – **63**. – P. 2091. – 2104.
3. *Sato T., Hirasawa T.* Body wave spectra from propagating shear crack // J. Phys. Earth. – 1973. – **21**. – P. 415–431.
4. *Dahlen F. A.* On the ratio of P-wave to S-wave corner frequences for shallow earthquake sources // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1974. – **64**. – P. 1159–1180.
5. *Костинский А. С.* Квазидинамические модели очага землетрясения с точки зрения классической теории поля // Доп. НАН України. – 2002. – № **11**. – С. 114–121.
6. *Мёллер К.* Теория относительности. – Москва: Атомиздат, 1975. – 398 с.
7. *Born M., Infeld L.* Foundations of the new field theory // Proc. Roy. Soc. London. – 1934. – A**144**. – P. 425–451.
8. *Podolsky B.* A generalized electrodynamics. Part 1 – Non-quantum // Phys. Rev. – 1942. – **62**. – P. 68–71.
9. *Podolsky B., Schwed P.* Review of a generalized electrodynamics // Rev. Mod. Phys. – 1948. – **20**. – P. 40–50.
10. *Burridge R., Willis J.* The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1969. – **66**. – P. 443–468.



*Отдел сейсмологии Института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины, Симферополь*



*Поступило в редакцию 09.09.2013*



**О. С. Костінський**


## Осередок землетрусу як збудливе середовище: послідовна аксіоматика скалярного польового опису


*За логікою робіт автора, нові можливості розвитку класичних кінематичних осередкових моделей з'являються, якщо основні співвідношення, що стосуються розподіленого вектора стрибка зміщення, трактуються як аксіоматичні твердження. Модуль вектора стрибка або функція зрушення розглядається як абстрактне скалярне поле, інваріантне щодо групи "квазілоренцевих" перетворень, з деякою довільною постійною в ролі граничної швидкості поширення взаємодій. У представленому повідомленні будується послідовна аксіоматика поля (аналогічно лагранжевого підходу звичайної фізики) в ситуації, коли немає ніякої "опори" в експериментальних даних. Звертається увага на нетрадиційність ключової вимоги мінімальності дії і на проблему сумісності з умовою позитивної визначеності щільності енергії довільного нелінійного поля.*

**A. S. Kostinsky**

## Earthquake focus as an excitable medium: consecutive axiomatics of scalar field description

*By the logic of author's works, new potentialities to develop the classical kinematic focus models appear if the basic relations concerning a distributed displacement discontinuity vector are treated as axiomatic statements. The modulus of the discontinuity vector or slip function is seen as an abstract scalar field, invariant under the group of "quasi-Lorentz" transformations, with some arbitrary constant in the role of the limit propagation velocity of interactions. A consistent axiomatics of the field is built, similar to the Lagrangian approach of ordinary physics, in the situation where there is no "underpinning" in experimental data. The attention is drawn to the non-traditionality of a key requirement of action minimality and to the issue of compatibility with the condition of positive definiteness of the energy density for an arbitrary nonlinear field.*