оповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

4 • 2014

МЕХАНІКА

УДК 532.595

Ю. В. Троценко

Вынужденные колебания стержня с подвесным резервуаром, частично заполненным жидкостью

(Представлено академиком НАН Украины И. А. Луковским)

Рассматривается осесимметричая конструкция, которая состоит из тонкостенного стержня, к одной из параллелей которого прикреплен осесимметричный резервуар, частично заполненный идеальной жидкостью. Исследование вынужденных колебаний такой механической системы под воздействием приложенных к стержню внешних сил и моментов сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений простого вида, независимой переменной в которых является время.

Данная работа является продолжением работы [1], где рассматривалась задача об определении свободных колебаний осесимметричной конструкции, состоящей из вертикально расположенного тонкостенного стержня, к одной из параллелей которого с помощью жесткого шпангоута прикреплен осесимметричный резервуар, частично заполненный идеальной несжимаемой жидкостью (рис. 1). Исследованию колебаний таких конструкций в различных постановках задачи посвящены работы [2, 3].

Предполагается, что к резервуару приложены внешняя суммарная сила $P_{O^*y^*}$, действующая в направлении оси O^*y^*, и суммарный момент $M_{O^*x^*}$ относительно оси O^*x^*. Также предполагается, что на стержень в направлении оси O_1y_1 действует распределенная поперечная нагрузка $q(z_1,t)$.

В работе [1] построена наиболее полная система уравнений, которая описывает взаимосвязанные колебания стержня и присоединенного к нему резервуара с жидкостью в сечении $z_1=\zeta$ под воздействием приложенных к ним внешних сил и моментов. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$L^{(i)}(w^{(i)}) = q^{(i)}(z_1,t) \qquad \text{при} \qquad z_1 \in G^{(i)}, \qquad M^{(2)}|_{z_1=l}=0, \qquad Q_*{}^{(2)}|_{z_1=l}=0,$$

$$[Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} = -\left[m\ddot{w} + mz_c\frac{\partial\ddot{w}}{\partial z_1} + \sum_{n=1}^{n_0}\ddot{\beta}_n\lambda_n - P_{O^*y^*}\right]_{z_1=\zeta},$$

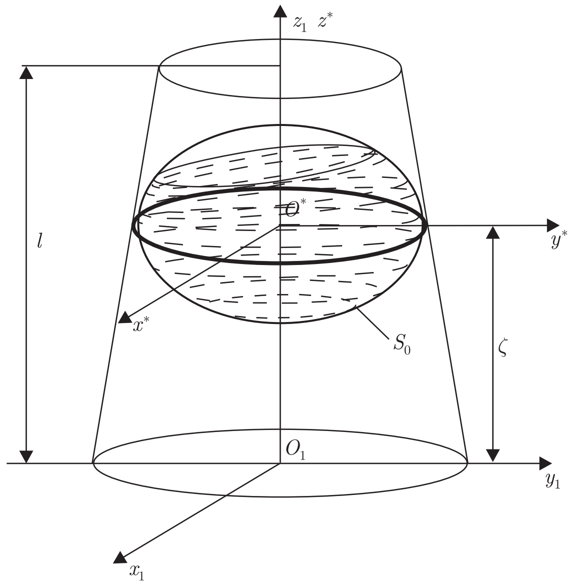

Рис. 1. Общий вид механической системы

$$[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} = -\left[I\frac{\partial\ddot{w}}{\partial z_1} + mz_c\ddot{w} - \sum_{n=1}^{n_0}\ddot{\beta}_n\lambda_{0n} - gmz_c\frac{\partial w}{\partial z_1} - \right. \tag{1}$$

$$\left. - g\sum_{n=1}^{n_0}\beta_n\lambda_n + M_{Ox}\right]_{z_1=\zeta}, \qquad [w^{(1)} = w^{(2)} = w]_{z_1=\zeta},$$

$$\left[\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z_1} = \frac{\partial w}{\partial z_1}\right]_{z_1=\zeta}, \qquad w^{(1)}|_{z_1=0} = \left.\frac{\partial w^{(1)}}{\partial z_1}\right|_{z_1=0} = 0,$$

где

$$L^{(i)}(w^{(i)}) = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left(E^{(i)}J^{(i)}\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z_1}\left(N^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1}\right) + \rho_1^{(i)}S^{(i)}\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2},$$

$$Q^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z_1}\left(E^{(i)}J^{(i)}\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2}\right); \qquad M^{(i)} = E^{(i)}J^{(i)}\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z_1^2}, \qquad Q_*^{(i)} = Q^{(i)} + N^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial z_1}.$$

Напомним, что рассматривается стержень с меняющимися в общем случае его площадью поперечного сечения S, экваториальным моментом инерции J и модулем упругости при изгибе E. Плотность материала стержня ρ_1 также может быть переменной по его длине.

Область $G = [0, l]$ изменения координаты z_1 состоит из двух подобластей $G^{(1)} = [0, \zeta]$ и $G^{(2)} = [\zeta, l]$, а прогибы стержня в этих подобластях обозначены через $w^{(1)}(z_1, t)$ и $w^{(2)}(z_1, t)$ соответственно. В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся функциях будет обозначать область, в которой эти функции определены.

Кроме того, $I = I^{(0)} + I^{(w)}$ — момент инерции корпуса резервуара и подвижной жидкости относительно оси Ox; $m = m^{(0)} + m_w$ — общая масса резервуара и жидкости; $z_c = (m^{(0)}z_{c_0} + m_w z_{c_w})/(m^{(0)} + m_w)$ — координата центра масс на оси Oz системы резервуар–жидкость; g — ускорение сил тяжести; $N^{(i)}$ — сжимающие силы, действующие на стержень.

Система уравнений (1) не является замкнутой, поскольку она включают в себя заранее не известные обобщенные координаты $\beta_n(t)$, характеризующие волновые движения жидкости в резервуаре.

Система дифференциальных уравнений, связывающая обобщенные координаты $\beta_n(t)$ с прогибом стержня и его углом поворота в сечении $z_1 = \zeta$, имеет следующий вид [1]:

$$\mu_n(\ddot{\beta}_n + \sigma_n^2 \beta_n) + \left[\lambda_n \ddot{w} - \lambda_{0n} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z_1} - g\lambda_n \frac{\partial w}{\partial z_1}\right]_{z_1=\zeta} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, n_0). \tag{2}$$

Здесь μ_n, σ_n^2, λ_n и λ_{0n} — гидродинамические коэффициенты, которые определяются по формулам, представленным в работе [4].

Для эффективного расчета колебаний рассматриваемой механической системы под воздействием приложенных к ней сосредоточенных и распределенных нагрузок граничную задачу для уравнений в частных производных (1) целесообразно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, независимой переменной в которых является время t.

Для приведения уравнений (1) с учетом соответствующих граничных условий к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений используем метод Бубнова–Галеркина. Эта процедура не является однозначной и в большей мере зависит от выбора обобщенных координат, характеризующих в совокупности возмущенное движение конструкции. В работах [2, 3] в качестве базисных функций для прогибов стержня выбирались собственные функции спектральной задачи, описывающей свободные колебания стержня с резервуаром с затвердевшей жидкостью. В свою очередь, для описания волновых движений жидкости в резервуаре были использованы собственные функции спектральной задачи о свободных колебаниях жидкости в неподвижном резервуаре. В результате, исходная задача была сведена к системе взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат, характеризующих возмущенное движение стержня и волновые движения жидкости в подвижном резервуаре. Как показали вычисления, проведенные автором настоящей работы, предложенные ряды для аппроксимации прогибов стержня и волновых движений жидкости обладают медленной сходимостью. В связи с этим при исследовании вынужденных колебаний системы приходится решать систему дифференциальных уравнений большой размерности, что усложняет анализ взаимосвязанных колебаний стержня и жидкости.

С практической точки зрения необходимо стремиться к такой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имела бы наиболее простой вид и небольшую размерность. Как будет показано ниже, этим требованиям отвечает система уравнений, при выводе которой для аппроксимации искомых решений в качестве базисных функций выбраны собственные функции спектральной задачи, описывающей свободные взаимосвязанные колебания стержня и жидкости в прикрепленном к нему резервуаре.

Полученные уравнения (1) позволяют сформулировать математическую постановку задачи, описывающей свободные колебания рассматриваемой механической системы с частотой ω. Для этого положим:

$$\begin{aligned} &q^{(k)}(z_1,t) = P_{O^*y^*} = M_{Ox} = 0; \qquad w^{(k)}(z_1,t) = \exp^{i\omega t} \eta^{(k)}(z_1); \\ &\beta_n(t) = \exp^{i\omega t} c_n \qquad (k = 1, 2). \end{aligned} \tag{3}$$

После перехода к безразмерным величинам [1] получим следующую спектральную задачу относительно функций $\eta^{(i)}(z_1)$:

$$L_1^{(i)}(\eta^{(i)}) = \frac{d^2}{dz_1^2}\left(E^{(i)}J^{(i)}\frac{d^2\eta^{(i)}}{dz_1^2}\right) + \frac{d}{dz_1}\left(N^{(i)}\frac{d\eta^{(i)}}{dz_1}\right) - \omega^2\frac{\rho_1^{(i)}}{\rho}DS^{(i)}\eta^{(i)} = 0, \quad z_1 \in G^{(i)},$$

$$M^{(2)}|_{z_1=l} = Q_*^{(2)}|_{z_1=l} = 0, \qquad [Q_*^{(2)} - Q_*^{(1)}]_{z_1=\zeta} = \omega^2 D\left[m\eta + mz_c\frac{d\eta}{dz_1} + \sum_{n=1}^{n_0} c_n\lambda_n\right]_{z_1=\zeta},$$

$$[M^{(1)} - M^{(2)}]_{z_1=\zeta} = \omega^2 D\left[I\frac{d\eta}{dz_1} + mz_c\eta - \sum_{n=1}^{n_0} c_n\lambda_{0n}\right]_{z_1=\zeta} + Dmz_c\frac{d\eta}{dz_1}\bigg|_{z_1=\zeta} + \tag{4}$$

$$+ D\sum_{n=1}^{n_0} c_n\lambda_n, \qquad [\eta^{(1)} = \eta^{(2)} = \eta]_{z_1=\zeta},$$

$$\left[\frac{d\eta^{(1)}}{dz_1} = \frac{d\eta^{(2)}}{dz_1} = \frac{d\eta}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta}, \qquad \eta^{(1)}|_{z_1=0} = \frac{d\eta^{(1)}}{dz_1}\bigg|_{z_1=0} = 0.$$

Предположим, что собственные функции $\eta_i(z_1)$ и собственные числа ω_i^2 задачи (4) известны. Соответствующие им числа c_n могут быть найдены из уравнений, вытекающих из динамического граничного условия на свободной поверхности жидкости [1]:

$$\mu_n(\sigma_n^2 - \omega^2)c_n + \left[\omega^2\left(\lambda_{0n}\frac{d\eta}{dz_1} - \lambda_n\eta\right) - \lambda_n\frac{d\eta}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, n_0). \tag{5}$$

Установим условия ортогональности собственных функций однородной краевой задачи (4). Для этого подставим в эти уравнения $\eta = \eta_i(z_1)$, $\omega = \omega_i$ и умножим их на $\eta_j(z_1)$, где i и j принимают произвольные, не равные между собой целочисленные значения, и проинтегрируем полученный результат от нуля до l. После применения процедуры интегрирования по частям с учетом граничных условий (4) получаем:

$$\int_0^l \left[EJ\frac{d^2\eta_i}{dz_1^2}\frac{d^2\eta_j}{dz_1^2} - N\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1} - \omega_i^2\frac{\rho_1}{\rho}DS\eta_i\eta_j\right]dz_1 -$$

$$- D\left\{\omega_i^2\left[m\eta_i\eta_j + mz_c\left(\frac{d\eta_i}{dz_1}\eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1}\eta_i\right) + I\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}\left(\lambda_n\eta_j - \lambda_{0n}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}\lambda_n\frac{d\eta_j}{dz_1} + mz_c\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right\}_{z_1=\zeta} = 0. \tag{6}$$

Поменяем местами в этом уравнении индексы i и j, затем вычтем полученное уравнение из уравнения (6). При этом будем иметь

$$(\omega_j^2 - \omega_i^2)\left\{\int_0^l \frac{\rho_1}{\rho}S\eta_i\eta_j dz_1 + \left[m\eta_i\eta_j + mz_c\left(\frac{d\eta_i}{dz_1}\eta_j + \frac{d\eta_j}{dz_1}\eta_i\right) + I\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta}\right\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)}\left[\omega_j^2\left(\lambda_n\eta_i-\lambda_{0n}\frac{d\eta_i}{dz_1}\right)+\lambda_n\frac{d\eta_i}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}\left[\omega_i^2\left(\lambda_n\eta_j-\lambda_{0n}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right)+\lambda_n\frac{d\eta_j}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta}=0. \qquad (7)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (7) воспользуемся связью между $c_n^{(i)}$ и η_i, полученной из уравнения (5):

$$\mu_n(\sigma_n^2-\omega_i^2)c_n^{(i)}=-\left[\omega_i^2\left(\lambda_{0n}\frac{d\eta_i}{dz_1}-\lambda_n\eta_i\right)-\lambda_n\frac{d\eta_i}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta} \qquad (n=1,2,\ldots,n_0). \qquad (8)$$

Принимая во внимание уравнение (8), после несложных преобразований покажем, что

$$\left[\omega_j^2\left(\lambda_n\eta_i-\lambda_{0n}\frac{d\eta_i}{dz_1}\right)+\lambda_n\frac{d\eta_i}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta}=(\omega_j^2-\omega_i^2)\left(\lambda_n\eta_i-\lambda_{0n}\frac{d\eta_i}{dz_1}\right)_{z_1=\zeta}+$$

$$+c_n^{(i)}(\mu_n\sigma_n^2-\mu_n\omega_i^2). \qquad (9)$$

Поменяв в этом уравнении местами индексы i и j, получим еще одно соотношение, которое необходимо для дальнейших преобразований выражения (7). С учетом этих соотношений и того, что $\omega_j\neq\omega_i$ при $i\neq j$, из уравнения (7) получаем первое условие ортогональности для собственных функций задачи (4), (5):

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{G^{(k)}}\frac{\rho_1^{(k)}}{\rho}S^{(k)}\eta_i^{(k)}\eta_j^{(k)}dz_1+\left[m\eta_i\eta_j+mz_c\left(\frac{d\eta_j}{dz_1}\eta_i+\frac{d\eta_i}{dz_1}\eta_j\right)+I\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n^{(i)}c_n^{(j)}\mu_n+c_n^{(j)}\left(\lambda_n\eta_i-\lambda_{0n}\frac{d\eta_i}{dz_1}\right)+c_n^{(i)}\left(\lambda_n\eta_j-\lambda_{0n}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right)\right]_{z_1=\zeta}=0. \qquad (10)$$

Второе условие ортогональности получим из уравнения (4) при $\eta=\eta_i$, $\omega=\omega_i$. Умножим полученное уравнение на $\omega_j^2\eta_j$ и проинтегрируем его в пределах от нуля до l с использованием формулы интегрирования по частям и граничных условий краевой задачи (4). При этом получаем

$$\omega_j^2\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{G^{(k)}}\left[E^{(k)}J^{(k)}\frac{d^2\eta_i^{(k)}}{dz_1^2}\frac{d^2\eta_j^{(k)}}{dz_1^2}-N^{(k)}\frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1}\frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1}-\omega_i^2\omega_j^2D\frac{\rho_1^{(k)}}{\rho}S^{(k)}\eta_i^{(k)}\eta_j^{(k)}\right]dz_1-$$

$$-\omega_j^2D\left\{\omega_i^2\left[m\eta_i\eta_j+mz_c\left(\frac{d\eta_i}{dz_1}\eta_j+\frac{d\eta_j}{dz_1}\eta_i\right)+I\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\omega_i^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(i)}\left[\lambda_n\eta_j-\lambda_{0n}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(i)}\lambda_n\frac{d\eta_j}{dz_1}+z_cm\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right\}_{z_1=\zeta}=0. \qquad (11)$$

Поменяем местами в этом уравнении индексы i и j. Затем вычтем полученное уравнение из уравнения (11). При этом будем иметь

$$(\omega_j^2-\omega_i^2)\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{G^{(k)}}\left[E^{(k)}J^{(k)}\frac{d^2\eta_i^{(k)}}{dz_1^2}\frac{d^2\eta_j^{(k)}}{dz_1^2}-N^{(k)}\frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1}\frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1}\right]dz_1-$$

$$-D\Bigg\{z_c m\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1}(\omega_j^2-\omega_i^2)+\omega_i^2\omega_j^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(i)}\left(\lambda_n\eta_j-\lambda_{0n}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right)+\omega_j^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(i)}\lambda_n\frac{d\eta_j}{dz_1}-$$

$$-\omega_i^2\omega_j^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(j)}\left(\lambda_n\eta_i-\lambda_{0n}\frac{d\eta_i}{dz_1}\right)-\omega_i^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(j)}\lambda_n\frac{d\eta_i}{dz_1}\Bigg\}_{z_1=\zeta}=0. \tag{12}$$

Преобразуем уравнение (12) с учетом соотношений (8). Тогда, с учетом того, что $\omega_j\neq\omega_i$ при $i\neq j$, второе условие ортогональности можно представить в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{G^{(k)}}\left[E^{(k)}J^{(k)}\frac{d^2\eta_i^{(k)}}{dz_1^2}\frac{d^2\eta_j^{(k)}}{dz_1^2}-N^{(k)}\frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1}\frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1}\right]dz_1-D\Bigg\{z_c m\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1}-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(i)}c_n^{(j)}\mu_n\sigma_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(c_n^{(j)}\frac{d\eta_i}{dz_1}+c_n^{(i)}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right)\Bigg\}_{z_1=\zeta}=0 \qquad (i\neq j). \tag{13}$$

Пусть к рассматриваемой механической системе приложены описанные выше внешние нагрузки. Возникающие при этом поперечные перемещения стержня $w(z_1,t)$ в плоскости $O_1y_1z_1$ и соответствующие им обобщенные координаты $\beta_n(t)$, характеризующие волновые движения жидкости в подвижном резервуаре, представим в виде следующих разложений:

$$w(z_1,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)\eta_i(z_1), \qquad \beta_n(t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)c_n^{(i)}, \tag{14}$$

где $q_i(t)$ — обобщенные координаты системы, характеризующие ее вынужденные колебания.

Подставим разложения (14) в систему дифференциальных уравнений (2). В результате получим следующие уравнения:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i\left(\mu_n c_n^{(i)}+\lambda_n\eta_i-\lambda_{0n}\frac{d\eta_i}{dz_1}\right)-q_i\left(\lambda_n\frac{d\eta_i}{dz_1}-\mu_n\sigma_n^2c_n^{(i)}\right)\right]_{z_1=\zeta}=0. \tag{15}$$

Остальные дифференциальные уравнения получим из безразмерного вариационного уравнения (17), полученного в работе [1], подставив в него разложения (14) и положив $\delta w=\eta_j(z_1)$. С учетом первого условия ортогональности (10) полученные уравнения можно преобразовать к следующему виду:

$$\sum_{i=1}^{\infty}q_i\psi_{ij}+\ddot{q}_j a_j-\sum_{i=1}^{\infty}D\ddot{q}_i\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n^{(i)}c_n^{(j)}\mu_n+c_n^{(j)}\left(\lambda_n\eta_i-\lambda_{0n}\frac{d\eta_i}{dz_1}\right)\right]_{z1=\zeta}-$$

$$-D\sum_{i=1}^{\infty}q_i\left[\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(i)}\lambda_n\frac{d\eta_j}{dz_1}+mz_c\frac{d\eta_i}{dz_1}\frac{d\eta_j}{dz_1}\right]_{z_1=\zeta}=Q_j(t) \qquad (j=1,2,\ldots), \tag{16}$$

где

$$\psi_{i,j} = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{G^{(k)}} \left(E^{(k)} J^{(k)} \frac{d^2\eta_i^{(k)}}{dz_1^2} \frac{d^2\eta_j^{(k)}}{dz_1^2} - N^{(k)} \frac{d\eta_i^{(k)}}{dz_1} \frac{d\eta_j^{(k)}}{dz_1} \right) dz_1,$$

$$a_j = D \left\{ \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{G^{(k)}} \frac{\rho_1^{(k)}}{\rho} (\eta_j^{(k)})^2 S^{(k)} dz_1 + \left[m\eta_j^2 + 2mz_c\eta_j \frac{d\eta_j}{dz_1} + I \left(\frac{d\eta_j}{dz_1} \right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left((c_n^{(j)})^2 \mu_n + 2c_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_j - \lambda_{0n} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right) \right]_{z_1=\zeta} \right\},$$

$$Q_j(t) = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{G^{(k)}} q^{(k)} \eta_j^{(k)} dz_1 + \left[P_{O^*y^*} \eta_j - M_{Ox} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right]_{z_1=\zeta}.$$

Если воспользуемся вторым условием ортогональности (13), формулой (6) при $i = j$, соотношением (7) для собственных форм колебаний системы, то для первой суммы в левой части уравнений (16) после ряда преобразований можно установить следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{\infty} q_i \psi_{ij} = q_j a_j \omega_j^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} Dq_i \left[z_c m \frac{d\eta_i}{dz_1} \frac{d\eta_j}{dz_1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 - \lambda_n c_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} - \lambda_n c_n^{(i)} \frac{d\eta_j}{dz_1} \right) \right]_{z_1=\zeta}. \tag{17}$$

С учетом этого соотношения уравнения (16) примут вид:

$$a_j(\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i D \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n c_n^{(j)} \frac{d\eta_i}{dz_1} - c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n \sigma_n^2 \right) \right]_{z_1=\zeta} -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{q}_i D \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(i)} c_n^{(j)} \mu_n + c_n^{(j)} \left(\lambda_n \eta_i - \lambda_{0n} \frac{d\eta_i}{dz_1} \right) \right) \right]_{z_1=\zeta} = Q_j(t). \tag{18}$$

Вследствие уравнений (15) уравнения (18) принимают следующую форму:

$$a_j(\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j) = Q_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Таким образом, задача о вынужденных движениях рассматриваемой механической системы под воздействием приложенных к ней сосредоточенных и распределенных нагрузок сведена к интегрированию бесконечной системы не связанных между собой дифференциальных уравнений наиболее простого вида (19). Коэффициенты этой системы уравнений выражаются через частоты и формы собственных колебаний данной конструкции, а также через гидродинамические коэффициенты μ_n, σ_n^2, $I^{(w)}$, λ_n и λ_{0n}. Следовательно перед решением задачи о возмущенном движении конструкции необходимо предварительно решить спектральную задачу о собственных колебаниях системы и определить вышеуказанные гидродинамические коэффициенты.

1. *Троценко Ю. В.* Колебания упругих конструкций, содержащих подвесные резервуары с жидкостью // Пробл. динаміки та стійкості багатовимірних систем. – 2011. – **8**, № 2. – С. 258–275.
2. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – Москва: Машиностроение, 1971. – 563 с.
3. *Рабинович Б. И., Шмаков В. П., Кобычкин В. С.* К теории колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью // Исследования по теории сооружений. – 1970. – № 18. – С. 68–84.
4. *Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Поперечные колебания упругого стержня, несущего на свободном конце резервуар с жидкостью // Акуст. вісник. – 2010. – **13**, № 3. – С. 51–67.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 15.10.2013*

Ю. В. Троценко

Вимушені коливання стержня з підвісним резервуаром, частково заповненим рідиною

Розглядається осесиметрична конструкція, яка складається з тонкостінного стержня, до однієї з паралелей якого прикріплений осесиметричний резервуар, частково заповнений ідеальною рідиною. Дослідження вимушених коливань такої механічної системи під дією прикладених до стержня зовнішніх сил та моментів зведено до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь простого вигляду, незалежною змінною в яких є час.

Yu. V. Trotsenko

Forced vibrations of a rod with attached tank which is partially filled with liquid

The axisymmetric structure, which consists of a rod and the tank attached to it, which is partially filled with an ideal liquid is considered. The study of forced vibrations of such a mechanical system under the influence of external forces and moments is reduced to the system of ordinary differential equations of a simple form. The independent variable in these equations is the time.