УДК 517.958

Л. А. Хилькова

О гладкой зависимости решения "ячеечной" краевой задачи Неймана от параметров области

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Методами теории периодических потенциалов доказана гладкая зависимость решения "ячеечной" краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона от параметров области.

Понятие "ячеечной" краевой задачи возникает в теории усреднения сильно неоднородных сред с периодической микроструктурой (см., например, [1–3]). Через ее решение определяются осредненные характеристики таких сред. В частности, усреднение краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона в периодически перфорированной области приводит к следующей "ячеечной" задаче.

Пусть $\varPi = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon |x_i| \leqslant h_i/2, i = 1, 2, 3\}$ — параллелепипед в $\mathbb{R}^3$, а G — область в нем с гладкой границей S и центром масс в точке O. Обозначим через $\varGamma_i^{\pm}$ — противоположные грани в $\varPi$. Рассмотрим в области $\varPi \setminus \overline{G}$ краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\Delta U(x) = 0, \qquad x \in \varPi \setminus G \\ &\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial x_k}{\partial n}, \qquad x \in S \\ &U|_{\varGamma_i^+} = U|_{\varGamma_i^-}, \quad \frac{\partial U}{\partial n}|_{\varGamma_i^+} = \frac{\partial U}{\partial n}|_{\varGamma_i^-} \\ &\int\limits_{\varPi\setminus G} U dx = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $x \in S$.

Как известно, существует единственное решение $U(x) = U^k(x)$ этой задачи, а коэффициенты усредненного уравнения

$$\sum_{k,l=1}^{3} a_{kl} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_l} = f(x)$$

вычисляются по формуле

$$a_{kl} = \frac{|\varPi \setminus G|}{|\varPi|}\delta_{kl} - \frac{1}{|\varPi|} \int\limits_{\varPi\setminus G} (\nabla U^k(x), \nabla U^l(x))\, dx.$$

Такая же формула имеет место для коэффициентов усредненного уравнения для задачи Неймана в области Ω_ε с локально периодической структурой [4]. Но в этом случае коэффициенты усредненного уравнения являются функциями от $y \in \mathbb{R}^3$, поскольку область $G = G_y$ в ячейке $\varPi$ зависит от y как от параметра.

В простейшем случае локально периодической структуры

$$G_y = \left\{ x \in \Pi\colon A^{-1}(y)\frac{x-a(y)}{d(y)} \in G \right\},$$

где $a(y)$ задает сдвиг, $d(y)$ — растяжение, $A(y)$ — поворот области $G \in \Pi$, $a(y)$, $d(y)$, $A(y)$ — гладкие функции y ($\in C^1(\Omega)$) такие, что $a(0) = 0$, $d(0) = 1$, $A(0) = E$ ($y = 0$ соответствует периодической структуре).

В данной работе рассматривается более общий случай локально периодической структуры:

$$G_y = F_y(G), \qquad S_y = F_y(S) = \partial G_y,$$

где $F_y(x)$ — дифференцируемое и обратимое отображение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, зависящее от параметра $y \in \mathbb{R}^3$ так, что $F_0(x) = I$ (I — тождественное отображение), и при $|y| < L$

$$\begin{aligned} &\|F_y - I\|_{C^1(\Pi)} \leqslant C_1|y|, \\ &F_y(\overline{G}) \subset \Pi_\varepsilon, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Pi_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon |x_i| < \frac{h_i - \varepsilon}{2} \right\}.$$

Обозначим через $U_y(x)$ решение задачи (1) при $G = G_y$ (зависимость от $k = 1, 2, 3$ опускаем). Цель работы — показать, что справедлива оценка

$$\|D^\alpha U_y - D^\alpha U_0\|_{C^1(\Pi \setminus \Pi_\varepsilon)} \leqslant C_2|y|, \qquad |\alpha| = 0, 1. \tag{3}$$

Обозначим через $R(x)$ Π-периодическое фундаментальное решение уравнения Пуассона в $\mathbb{R}^3$, т. е. функцию, удовлетворяющую в $\mathbb{R}^3$ соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\Delta R(x) = -\sum_{m \in Z^3} \delta(x - mh) + \frac{1}{|\Pi|} \\ &R(x+h) = R(x) \end{aligned}\right\}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{4}$$

где $m = \{m_1, m_2, m_3\} \in \mathbb{Z}^3$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $h = \{h_1e^1, m_2e^2, m_3e^3\}$, $mh = \sum\limits_{i=1}^{3} m_ih_ie^i$, e^i — орт оси x_i.

Такая функция изучалась в работах [2, 3]. В частности, показано, что при $x \in \Pi$

$$R(x) = \frac{1}{4\pi|x|} + (Bx, x), \tag{5}$$

где B — симметрическая 3×3 матрица.

С помощью ядра $R(x)$ можно построить потенциалы простого и двойного слоев, которые в силу (5) обладают такими же свойствами, что и соответствующие потенциалы с ньютоновым ядром $1/(4\pi|x|)$. Основываясь на этом, получим для решения $U_y(x)$ задачи (1) на $G = G_y$ представление, которое приводит к требуемой оценке (3).

Для этого продолжим $U_y(x)$ периодически (с параллелепипедным периодом Π) на все пространство $\mathbb{R}^3$. Полученная функция $\widetilde{U}_y(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\widetilde{U}_y(x)=0\\ \widetilde{U}_y(x+h)=\widetilde{U}_y(x)\end{array}\right\}, \qquad x\in\mathbb{R}^3\setminus\widetilde{G}_y, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\widetilde{U}_y}{\partial n}=\frac{\partial x_k}{\partial n}, \qquad x\in\widetilde{S}_y, \tag{7}$$

где $\widetilde{G}_y=\bigcup\limits_m(G_y+mh)$, $\widetilde{S}_y=\bigcup\limits_m(S_y+mh)$.

Будем искать $\widetilde{U}_y(x)$ в виде потенциала простого слоя с ядром $R(x)$

$$\widetilde{U}_y(x)=\int\limits_{S_y}R(x-\xi)\mu_y(\xi)\,dS(\xi) \tag{8}$$

с плотностью $\mu_y(\xi)$ с нулевым средним

$$\int\limits_{S_y}\mu_y(\xi)\,dS(\xi)=0.$$

Тогда в силу свойства (4) ядра $R(x)$ выполняются равенства (6). Потребуем, чтобы функция (8) удовлетворяла граничному условию (7). Тогда, учитывая что предельная формула для нормальной производной функции (8) на S такая же, как для ньютонова потенциала простого слоя, получаем для плотности $\mu_y(\xi)$ интегральное уравнение

$$\mu_y(x)-\int\limits_{S_y}K_y(x,\xi)\mu_y(\xi)\,dS(\xi)=f_y(x), \qquad x\in S_y, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}f_y(x)=-\frac{\partial x_k}{\partial n}\bigg|_{x\in S_y},\\ K_y(x,\xi)=-\frac{\partial}{\partial n}R(x-\xi)\bigg|_{x,\xi\in S_y}=(\nabla R(x-\xi),n)|_{x,\xi\in S_y}.\end{gathered} \tag{10}$$

Из (5) следует, что интегральный оператор K_y с ядром $K_y(x,\xi)$ действует из пространства $\widehat{C}(S_y)=C(S_y)\ominus 1$ (функции с нулевым средним) в него же как вполне непрерывный оператор. Правая часть уравнения (9) принадлежит тому же пространству $\widehat{C}(S_y)$. Поэтому решение уравнения (9) принадлежит $\widehat{C}(S_y)$. Существование такого решения следует из теорем Фредгольма для вполне непрерывного оператора K_y, так как соответствующее однородное уравнение для сопряженного к K_y оператора не имеет ненулевых решений. (Существование такого решения означало бы, что существует ненулевое решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области G с нулевым граничным условием, что противоречит принципу максимума.)

Положим

$$\widehat{f}_y(x') = J_y(x') f_y(F_y(x')), \qquad x' \in S,$$
$$K_y(x', \xi') = J_y(x') K_y(F_y(x'), F_y(\xi')) J_y(\xi'), \qquad x', \xi' \in S, \tag{11}$$

где $J_y(x)$ — якобиан отображения $F_y(x')\colon S_y \to S$. Тогда уравнение (9) для функции $\widehat{\mu}_y(x') = J_y(x')\mu_y(F_y(x'))$ принимает вид

$$\widehat{\mu}_y(x') - \int\limits_S \widehat{K}_y(x', \xi')\widehat{\mu}_y(\xi')\, dS(\xi') = \widehat{f}_y(x'), \qquad x' \in S. \tag{12}$$

В силу гладкости поверхности S ($S \subset C^1$) из (2), (10) и (11) следуют оценки

$$\|\widehat{K}_y(x', \xi') - \widehat{K}_0(x', \xi')\|_{\widehat{C}(S)} \leqslant \frac{C_1}{|x' - \xi'|}|y|, \tag{13}$$

$$\|\widehat{f}_y(x') - \widehat{f}_0(x')\|_{\widehat{C}(S)} \leqslant C_2|y|. \tag{14}$$

Запишем уравнение (12) в операторной форме в пространстве $\widehat{C}(S)$:

$$\widehat{\mu}_y - \widehat{K}_0\widehat{\mu}_y - \widehat{\Lambda}_y\widehat{\mu}_y = \widehat{f}_0 + \widehat{\delta}_0, \tag{15}$$

где $\widehat{K}_0$, $\widehat{\Lambda}_y$ — интегральные операторы в $\widehat{C}(S)$ с ядрами $\widehat{K}_0(x', \xi')$ и $\widehat{\Lambda}_y(x', \xi') = \widehat{K}_y(x', \xi') - \widehat{K}_0(x', \xi')$, а $\widehat{\delta}_0(x') = \widehat{f}_y(x') - \widehat{f}_0(x')$. В силу (13), (14) нормы оператора $\widehat{\Lambda}_y$ и вектора $\widehat{\delta}_0$ имеют оценки

$$\|\widehat{\Lambda}_y\|_{\widehat{C}(S)} \leqslant C_1|y|$$

и

$$\|\widehat{\delta}_0\|_{\widehat{C}(S)} \leqslant C_2|y|.$$

Поэтому из (15) следует, что

$$\|\widehat{\mu}_y - \widehat{\mu}_0\|_{\widehat{C}(S)} \leqslant C_3|y|. \tag{16}$$

Согласно определению функции $\widetilde{U}_y(x)$ и функции (8) решение $U_y(x)$ задачи (1) при $S = S_y$ и при $x \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon$ представимо в виде

$$U_y(x) = \int\limits_S R(x - F_y(\xi'))\widehat{\mu}_y(\xi')\, dS(\xi').$$

Отсюда, учитывая (16), (5) и (2), получаем требуемую оценку (3).

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. Н.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композитных материалов. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Щербина В. А.* Фундаментальные решения 3-х мерных ячеечных задач для некоторых уравнений математической физики // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, No 2. – С. 298–304.

3. *Щербина В. А.* Краевые задачи с три-периодическим решением для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$ // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1986. – No 46. – С. 132–139.
4. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Київ: Наук. думка, 2005. – 551 с.

Институт химических технологий
Восточноукраинского национального университета
им. Владимира Даля, Рубежное

Поступило в редакцию 01.10.2013

Л. О. Хількова

Про гладку залежність розв'язку "коміркової" крайової задачі Неймана від параметрів області

Методами теорії періодичних потенціалів доведено гладку залежність рішення "коміркової" крайової задачі Неймана для розв'язку Пуассона від параметрів області.

L. A. Khilkova

The smooth dependence of the solution of the Neumann boundary-value "cell" problem on the parameters of a domain

The smooth dependence of the solution of the Neumann boundary-value "cell" problem for the Poisson equation on the parameters of a domain is proved by methods of the periodic potential theory.