УДК 517.90

Г. Д. Оруджев, Р. Ф. Эфендиев

Спектральный анализ одного несамосопряженного операторного пучка с разрывным коэффициентом

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Исследованы прямая и обратная задачи для уравнения Шредингера с комплексными периодическими потенциалами, а также с разрывной правой частью на всей оси. Изучены основные свойства фундаментальных решений и спектр задачи. Сформулирована обратная задача и дана эффективная процедура ее решения.

1. Рассматривается спектральная задача для операторного пучка L с комплексными периодическими потенциалами в пространстве $L_2((-\infty,\infty);\rho(x))$, порожденного дифференциальным выражением

$$l\left(\frac{d}{dx},\lambda\right) \equiv \frac{1}{\rho(x)}\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda p(x) + q(x)\right\}, \tag{1}$$

где λ — комплексное число, а коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ имеют вид

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot|p_n| < \infty, \tag{2}$$

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |q_n| < \infty, \tag{3}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{для} \quad x \in (-\infty, b_1), \\ \gamma_1^2 \quad \text{для} \quad x \in (b_1, b_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_n^2 \quad \text{для} \quad x \in (b_m, \infty), \end{cases} \tag{4}$$

где $\gamma_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \dots, m)$.

В работе ставится и решается прямая и обратная задачи на $(-\infty, +\infty)$ для (1)–(4).

Причиной выбора потенциалов вида (2), (3) является то, что многие интересные результаты физики были получены при рассмотрении задач с этими потенциалами, в оптической решетке [1, 2].

Впервые обратная задача в случае $p(x) = 0$, $q(x) = 0$ рассмотрена в статье Н. И. Гринберга [3], в которой обратная задача восстановления $\rho(x)$ решается с помощью коэффициента отражения.

Случай $\rho(x) \equiv 1$, $p(x) = 0$ полностью изучен М. Г. Гасымовым в [4], где доказано, что непрерывный спектр заполняет $[0,\infty)$, на котором могут быть спектральные особенности в смысле Наймарка, совпадающие с числами вида $(n/2)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что некоторые вопросы спектрального анализа операторов Шредингера с комплексными периодическими потенциалами рассмотрены в работах [5–8].

2. Известно, что изучение спектральных свойств оператора L основывается на анализе решений уравнения

$$-y'' + [2\lambda p(x) + q(x)]y = \lambda^2 \rho(x) y, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Здесь явно строится фундаментальная система решений уравнения (5), что является важным шагом для дальнейших исследований.

Теорема 1. *Пусть $q(x)$, $p(x)$ имеют вид (2), (3) и для $\rho(x)$ удовлетворяется условие (4). Тогда уравнение $Ly = \lambda^2\rho(x)y$ имеет решения вида*

$$f_j^{\pm}(x,\lambda) = e^{\pm i\lambda\gamma_j x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{\pm} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{v_{n\alpha}^{\pm}}{n \pm 2\lambda\gamma_j} e^{i\alpha x}\right) \quad \text{для} \quad x \in (b_j, b_{j+1}), \tag{6}$$

где $j = 0,1,2,\ldots,m$, $\gamma_0 = 1$, $b_0 = -\infty$, $b_{m+1} = \infty$, числа $v_n^{\pm}$ и $v_{n\alpha}^{\pm}$ определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$\alpha^2 \nu_\alpha^{\pm} + \alpha \sum_{n=1}^{\alpha} \nu_{n\alpha}^{\pm} + \sum_{s=1}^{\alpha-1}\left(q_{\alpha-s}\nu_s^{\pm} - p_{\alpha-s}\sum_{n=1}^{s}\nu_{ns}^{\pm}\right) + q_\alpha = 0, \tag{7}$$

$$\alpha(\alpha-n)\nu_{n\alpha}^{\pm} + \sum_{s=n}^{\alpha-1}(q_{\alpha-s} \mp n\cdot p_{\alpha-s})\nu_{ns}^{\pm} = 0, \tag{8}$$

$$\alpha\nu_\alpha^{\pm} \pm \sum_{s=1}^{\alpha-1}\nu_s^{\pm} p_{\alpha-s} \pm p_\alpha = 0; \tag{9}$$

и ряд (6) можно дважды почленно продифференцировать.

Пусть $W[y_1, y_2] = y_1' y_2 - y_1 y_2'$ — вронскиан функций y_1, y_2. Легко проверить, что

$$W[f_j^{+}(x,\lambda), f_j^{-}(x,\lambda)] = 2i\lambda\gamma_j, \qquad j = 0,1,\ldots,m.$$

Поэтому для $x \in (b_j, b_{j+1})$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \pm n/(2\gamma_j)$ функции $f_j^{+}(x,\lambda)$, $f_j^{-}(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (5).

Пусть

$$f_{nj}^{\pm}(x) = \lim_{\lambda\to\mp\frac{n}{2\gamma_j}} (n \pm 2\lambda\gamma_j) f_j^{\pm}(x,\lambda) = \sum_{\alpha=n}^{\infty} v_{n\alpha}^{\pm} e^{i\alpha x} e^{-i\frac{n}{2\gamma_j}x}. \tag{10}$$

Из реккурентных формул (7)–(9) вытекает, что если $v_{nn}^{\pm} = 0$, то $v_{n\alpha}^{\pm} = 0$ при всех $\alpha > n$ и $f_{nj}^{\pm}(x) \equiv 0$. Тогда, учитывая соотношение

$$\lim_{\lambda\to\mp\frac{n}{2\gamma_j}} W[f_j^{+}(x,\lambda), f_j^{-}(x,\lambda)] = 0,$$

получаем, что $f_{nj}^{\pm}(x)$, $f_j^{\mp}(x,\lambda)$ линейно зависимы. Поэтому

$$f_{nj}^{\pm}(x) = S_n^{\pm} f_j^{\mp}\left(x, \mp\frac{n}{2\gamma_j}\right). \tag{11}$$

Сравнение формул для этих функций показывает, что $S_n^{\pm} = v_{nn}^{\pm}$.

Для того чтобы изучить спектр операторного пучка L, построим ядро резольвенты оператора $(L - \lambda^2 I)$.

Известно, что любое решение $y(x,\lambda)$ уравнения (5) есть линейная комбинация функций $f_j^+(x,\lambda)$, $f_j^-(x,\lambda)$ и может быть написано, как

$$y(x,\lambda) = C_{1j}(x) f_j^+(x,\lambda) + C_{2j}(x) f_j^-(x,\lambda)$$

для $x \in (b_j, b_{j+1})$.

Поскольку волновая функция $y(x,\lambda)$ и ее производные должны быть непрерывными, имеем

$$y(b_j - 0) = y(b_j + 0), \tag{12}$$

$$y'(b_j - 0) = y'(b_j + 0), \qquad j = 0,1,2,..,m. \tag{13}$$

При этом функции $C_{ij}(x)$, $i = 1,2$, $j = 0,1,\ldots,m$, выбираются таким образом, что для $y(x,\lambda)$ выполняются условия (12), (13).

Используя метод вариации постоянных, получаем

$$C'_{1j}(x) = -\frac{1}{W[f_j^+(x,\lambda), f_j^-(x,\lambda)]} f_j^-(x,\lambda) f(x),$$

$$C'_{2j}(x) = \frac{1}{W[f_j^+(x,\lambda), f_j^-(x,\lambda)]} f_j(x,\lambda) f(x).$$

Следовательно,

$$C_{1j}(x) = \int_{b_j}^{x} \frac{1}{2i\lambda\gamma_j} f_j^-(t,\lambda) f(t) dt + C_{1j},$$

$$C_{2j}(x) = -\int_{x}^{b_{j+1}} \frac{1}{2i\lambda\gamma_j} f_j^+(t,\lambda) f(t) dt + C_{2j},$$

где $x \in (b_j, b_{j+1})$, $j = 0,1,2,\ldots,m$, и C_{1j}, C_{2j}, $j = 0,1,\ldots,m$, — произвольные числа. Тогда получим, что решение уравнения (5) для $\operatorname{Im}\lambda > 0$ имеет вид

$$y(x,\lambda) = \{y_j(x,\lambda) \text{ для } x \in (b_j, b_{j+1}),\ j = 0,1,\ldots,m;\ b_0 = -\infty,\ b_{m+1} = \infty\},$$

где

$$y_j(x,\lambda) = C_{1j}(x) f_j^+(x,\lambda) + C_{2j}(x) f_j^-(x,\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda\gamma_j} \int_{b_j}^{x} f_j^-(t,\lambda) f_j^+(x,\lambda) f(t)\, dt +$$

$$+ C_{1j} f_j^+(x,\lambda) + \frac{1}{2i\lambda\gamma_j} \int_{x}^{b_{j+1}} f_j^+(t,\lambda) f_j^-(x,\lambda) f(t)\, dt + C_{2j} f_j^-(x,\lambda) =$$

$$= \int\limits_{b_j}^{b_{j+1}} G_j(x,t,\lambda) f(t)\,dt + C_{1j} f_j^+(x,\lambda) + C_{2j} f_j^-(x,\lambda)$$

с

$$G_j(x,t,\lambda) = \frac{1}{2i\lambda\gamma_j} \begin{cases} f_j^+(x,\lambda) f_j^-(t,\lambda) & \text{при} \quad t \leqslant x, \\ f_j^+(t,\lambda) f_j^-(x,\lambda) & \text{при} \quad t \geqslant x, \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, m.$$

В силу условия $y(x,\lambda) \in L_2(-\infty,+\infty)$, $f_j^+(x,\lambda) \in L_2(0,+\infty)$ и $f_j^-(x,\lambda) \in L_2(-\infty,0)$ определяем, что $C_{10} = C_{2m} = 0$. Тогда для решения уравнения (5) получим

$$y(x,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,t,\lambda) f(t)\,dt +$$

$$+ \begin{cases} C_{20} f_0^-(x,\lambda) & \text{для} \quad x \in (-\infty, b_1), \\ C_{1j} f_j^+(x,\lambda) + C_{2j} f_j^-(x,\lambda) & \text{для} \quad x \in (b_{j+1}, b_{j+2}), \quad j = 1, \ldots, m-2, \\ C_{1m} f_m^+(x,\lambda) & \text{для} \quad x \in (b_m, \infty), \end{cases}$$

где

$$G(x,t,\lambda) = \{G_j(x,t,\lambda)\colon x \in (b_j, b_{j+1}),\ j = 0, 1, \ldots, m;\ b_0 = -\infty,\ b_{m+1} = \infty\}.$$

Числа C_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, \ldots, m$, определяются из условий (12), (13), а именно, для $x \in (b_j, b_{j+1})$, $j = 0, 1, \ldots, m$; $b_0 = -\infty$, $b_{m+1} = \infty$ и $C_{10} = C_{2m} = 0$

$$\begin{aligned} & C_{1j} f_j^+(b_{j+1},\lambda) + C_{2j} f_j^-(b_{j+1},\lambda) - C_{1(j+1)} f_{j+1}^+(b_{j+1},\lambda) - C_{2(j+1)} f_{j+1}^-(b_{j+1},\lambda) = \\ & \quad = \int\limits_{b_{j+1}}^{b_{j+2}} G_{j+1}(b_{j+1},t,\lambda) f(t)\,dt - \int\limits_{b_j}^{b_{j+1}} G_j(b_{j+1},t,\lambda) f(t)\,dt = \\ & \quad = \int\limits_{b_j}^{b_{j+2}} [G_{j+1}(b_{j+1},t,\lambda) - G_j(b_{j+1},t,\lambda)] f(t)\,dt, \\ & C'_{1j} f_j^+(b_{j+1},\lambda) + C'_{2j} f_j^-(b_{j+1},\lambda) - C'_{1(j+1)} f_{j+1}^+(b_{j+1},\lambda) - C'_{2(j+1)} f_{j+1}^-(b_{j+1},\lambda) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда основной детерминант $\Delta(\lambda)$ системы (14) имеет вид

$$\left| \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{f_0^-(b_1,\lambda)\; f_1^+(b_1,\lambda)\; f_1^-(b_1,\lambda)\; 0 \; 0 \; \ldots \; 0 \; 0 \; 0 \; f_{m-1}^+(b_m,\lambda) f_{m-1}^-(b_m,\lambda) f_m^+(b_m,\lambda)}}^{2m} \\ \begin{array}{ccccccccc} f_0^-(b_1,\lambda) & f_1^+(b_1,\lambda) & f_1^-(b_1,\lambda) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ f_0^{-'}(b_1,\lambda) & f_1^{+'}(b_1,\lambda) & f_1^{-'}(b_1,\lambda) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^+(b_2,\lambda) & f_1^-(b_2,\lambda) & f_2^+(b_2,\lambda) & f_2^-(b_2,\lambda) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^{+'}(b_2,\lambda) & f_1^{-'}(b_2,\lambda) & f_2^{+'}(b_2,\lambda) & f_2^{-'}(b_2,\lambda) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & f_{m-1}^+(b_m,\lambda) & f_{m-1}^-(b_m,\lambda) & f_m^+(b_m,\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & f_{m-1}^{+'}(b_m,\lambda) & f_{m-1}^{-'}(b_m,\lambda) & f_m^{+'}(b_m,\lambda) \end{array} \end{array} \right|.$$

Если обозначить

$$D(b_j, \lambda) = \int\limits_{b_j}^{b_{j+2}} [G_j(b_j, t, \lambda) - G_{j-1}(b_j, t, \lambda)] f(t)\, dt$$

и через $\Delta_i(\lambda)$ детерминант

$$\left| \overbrace{\begin{matrix}
f_0^-(b_1,\lambda) & f_1^+(b_1,\lambda) & f_1^-(b_1,\lambda) & 0 & 0 & \ldots & \overbrace{D(b_1,\lambda)}^{i} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
f_0^{-'}(b_1,\lambda) & f_1^{+'}(b_1,\lambda) & f_1^{-'}(b_1,\lambda) & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & f_1^+(b_2,\lambda) & f_1^-(b_2,\lambda) & f_2^+(b_2,\lambda) & f_2^-(b_2,\lambda) & \ldots & D(b_2,\lambda) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & f_1^{+'}(b_2,\lambda) & f_1^{-'}(b_2,\lambda) & f_2^{+'}(b_2,\lambda) & f_2^{-'}(b_2,\lambda) & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & D(b_m,\lambda) & \ldots & f_{m-1}^+(b_m,\lambda) & f_{m-1}^-(b_m,\lambda) & f_m^+(b_m,\lambda) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & f_{m-1}^{+'}(b_m,\lambda) & f_{m-1}^{-'}(b_m,\lambda) & f_m^{+'}(b_m,\lambda)
\end{matrix}}^{2m} \right|,$$

то для коэффициента $C_{ij}(\lambda)$ получим

$$C_{ij}(\lambda) = \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Замечание 1. $R_{\lambda^2} = (L - \lambda^2 I)^{-1}$ существует и ограничена для всех λ вне оси $(-\infty, +\infty)$ и $\Delta(\lambda) \neq 0$.

Теорема 2. *Спектр операторного пучка L состоит из непрерывного спектра, заполняющего ось $(-\infty, \infty)$, на которой могут быть спектральные особенности, совпадающие с числами вида $(\pm n/(2\gamma_j))$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, и из конечного числа собственных чисел, которые определяются, как корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$.*

3. Обратная задача. Числа $S_n^{\pm}$ из (10) играют роль “нормировочных” чисел для функций, отвечающих спектральным особенностям $(\pm n/(2\gamma_j))$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Ставится задача определения потенциалов $q(x)$ и $p(x)$ по $S_n^{\pm}$.

Для того чтобы решать поставленную обратную задачу, сначала установим связь между “нормировочными” числами $S_n^{\pm}$ и $v_n^{\pm}, v_{n\alpha}^{\pm}$.

На самом деле, используя результаты найденные нами выше, получим нижеследующий алгоритм для решения обратной задачи.

Принимая во внимание (10), имеем

$$\sum_{\alpha=n}^{\infty} v_{n\alpha}^{\pm} e^{i\alpha x} e^{-i\frac{n}{2}x} = S_n^{\pm} \cdot e^{i\frac{n}{2}x} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{\mp} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{v_{n\alpha}^{\mp}}{n+n} e^{i\alpha x} \right).$$

Тогда получим, что

$$v_{nn}^{\pm} = S_n^{\pm}$$

и

$$v_{m,\alpha+m}^{\pm} = S_m^{\pm} \left(v_{\alpha}^{\mp} + \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{v_{n\alpha}^{\mp}}{n+m} \right), \tag{15}$$

откуда все числа $v_\alpha^\pm$, $v_{n\alpha}^\pm$, $\alpha = 1, 2\ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, $\alpha - 1$ определяются однозначно. Эти соотношения являются основными уравнениями для определения q_n, p_n по $S_n^\pm$. Действительно, если известны $S_n^\pm$, то (15) дает рекуррентные формулы для определения $v_\alpha^\pm$, $v_{n\alpha}^\pm$, $\alpha = 1, 2\ldots$, $n = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$. Тогда, используя (7)–(9), мы можем восстановить все числа q_n, p_n.

Таким образом, по "нормировочным" числам $S_n^\pm$ потенциалы $q(x)$ и $p(x)$ восстанавливаются однозначно и эффективно. Спрашивается, когда последовательность $S_n^\pm$ может быть последовательностью "нормировочных" чисел оператора типа L?

Теорема 3. *Для того чтобы числа $S_n^\pm$ были "нормировочными" числами оператора типа L с потенциалами вида* (2)–(3), *для которых ряд* (6) *можно дважды почленно продифференцировать, достаточно выполнение следующих условий:*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m|S_m|^* = s_1 < \infty,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|S_m|^*}{m+1} = s < 1,$$

где

$$|S_n|^* = \max\{|S_n^+|,\ |S_n^-|\}.$$

1. *Makris K. G., El-Ganainy R., Christodoulides D. N., Musslimani Z. H.* PT-symmetric optical lattices // Phys. Rev. A. – 2010. – **81**, No 6. – 063807.
2. *Makris K. G., El-Ganainy R., Christodoulides D. N., Musslimani Z. H.* Beam dynamics in PT symmetric optical lattices // Phys. Rev. Lett. – 2008. – **100**, No 10. – 103904.
3. *Гринберг Н. И.* Одномерная обратная задача рассеяния для волнового уравнения // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 8. – С. 1114–1129.
4. *Гасымов М. Г.* Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка // Функц. анализ и его приложения. – 1980. – **14**, № 1. – С. 14–19.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
6. *Efendiev R. F.* Spectral analysis for one class of second-order indefinite non-self-adjoint differential operator pencil // Appl. Anal. – 2011. – **90**, No 12. – P. 1837–1849.
7. *Efendiev R. F., Orudzhev H. D.* Inverse wave spectral problem with discontinuous wave speed // J. Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2010. – **6**, No 3. – P. 255–265.
8. *Efendiev R. F.* Spectral analysis of a class of non-self-adjoint differential operator pencils with a generalized function // Theoret. and Math. Physics. – 2005. – **145**, No 1. – P. 1457–1461.

Университет Гафгаз, Баку, Азербайджан
Бакинский государственный университет, Азербайджан

Поступило в редакцию 10.10.2013

Г. Д. Оруджев, Р. Ф. Ефендієв

Спектральний аналіз одного несамоспряженого операторного пучка з розривним коефіцієнтом

Досліджено пряму й обернену задачі для рівняння Шредінгера з комплексними періодичними потенціалами та розривною правою частиною на всій осі. Вивчено основні властивості фундаментальних розв'язків і спектр задачі. Сформульовано обернену задачу і розроблено ефективну процедуру її розв'язання.

H. D. Orudzhev, R. F. Efendiev

The spectral analysis of some not self-adjoint operator pencil with a discontinuous coefficient

The direct and inverse problems for the Schrödinger equation on the whole axis with complex periodic potentials and discontinuous right-hand side are investigated. The main properties of the fundamental solutions and the spectrum of the problem are studied. The inverse problem is formulated, and a constructive procedure for its solution is given.