УДК 539.375

Ю.Г. Козуб, канд. техн. наук, доцент
(ЛНУ им. Тараса Шевченко)

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЭЛАСТОМЕРОВ

Аннотация. В статье рассмотрена динамическая связанная задача термоупругости конструкций из эластомеров с учётом зависимости физико-механических свойств от температуры, длительности и условий нагружения.

Для решения связанной задачи используется метод последовательных приближений. Пространственная задача термоупругости и пространственное уравнение теплопроводности решены с помощью метода конечных элементов. На основании полученных полей перемещений, деформаций, напряжений и температур с использованием энергетического критерия разрушения сформулировано критериальное уравнения долговечности для материала с переменными физико-механическими свойствами.

Получены новые решения задачи циклического деформирования конструкций из эластомеров. Установлены зависимости температуры саморазогрева и долговечности от предварительных напряжений.

Ключевые слова: эластомер, термомеханика, долговечность, виброизолятор

Y.G. Kozub, Ph. D. (Tech.), Associate Professor
(LNU named after T. Shevchenko)

DYNAMICAL TASKS OF THERMOMECHANIC OF CONSRUCTIONS FROM ELASTOMERS

Abstract. In the article the dynamic linked problem of thermoelasticity of constructions from elastomers taking into account dependence of physics and mechanics on a temperature, duration and terms of loading is considered.

For the decision of the linked task the method of progressive approximations is used. The three-dimensional task of thermoelasticity and three-dimensional equalization of heat conductivity are decided by means of finite element method. On the basis of the got fields of moving, deformations, tensions and temperatures with the use of power criterion of rapture is set forth equalizations of longevity for material with variable physics and mechanics properties.

The new decisions of task of cyclic deformation of constructions are got from эластомеров. Dependences of temperature of dissipative warming and longevity are set on preliminary tensions.

Keywords: elastomer, thermomechanics, longevity, vibration isolator

Введение. В последнее время возросла роль использования в промышленности конструкций из полимерных и композиционных материалов, что позволяет снизить материалоёмкость машин и конструкций, сократить сроки производства, облегчить переход на новую продукцию, повысить коррозийную стойкость изделий. В современных технических конструкциях, изготовленных из эластомеров и композитных материалов на их основе, при динамических нагрузках существенное влияние на характер напряжённо-деформированного состояния оказывает зависимость физико-механических характеристик от температуры, времени и условий нагружения.

При проектировании эластомерных конструкций следует учитывать вязкоупругость, слабую сжимаемость, демпфирующие свойства, старение материала [1, 2]. Поэтому возрастает потребность в методах расчёта, дающих достаточно точное решение, позволяющих дать надёжную оценку долговечности конструкций. В настоящее время используются различные подходы для расчёта долговечности резинотехнических изделий, которые базируются на основе различных критериев разрушения: энтропийного критерия, критерия разрушения по развивающейся повреждённости, энергетического критерия разрушения [2-6]. В большинстве случаев эластомерные элементы конструкций испытывают циклические деформации, при этом происходит существенное поглощение энергии и саморазогрев. Целью работы является разработка метода решения связанной задачи термоупругости эластомерных элементов конструкций в условиях динамического нагружения.

Результаты и их обсуждение. Формулировку связанной задачи для циклического деформирования можно представить в виде уравнения Био и уравнения теплопроводности:

$$\iiint_V \delta F\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3-\iiint_v \rho\vec{P}\delta\vec{u}\sqrt{g}dx^1dx^2dx^3-\iint_S\sqrt{\frac{G}{g}}\sqrt{G^{ik}n_in_k}\vec{q}\delta\vec{u}ds=0,$$

$$\begin{gathered}\iiint_V c_\varepsilon(T-T_0)\delta Tdv+\iiint_V \beta_{ij}\left(T-T_0\right)\delta\varepsilon_{ij}dv=\iiint_V \lambda_{ij}T_{,i}\delta T_{,j}dv+\\+\iiint_V w_0\delta Tdv+\iint_S\left[q+h(T-\theta)\right]\delta Tds,\end{gathered} \tag{1}$$

где F – свободная энергия;

$\overline{P}$, $\overline{q}$ – векторы объёмных и поверхностных нагрузок;

$\overline{u}$ – вектор перемещений;

g, G – метрические тензоры недеформированного и актуального состояния;

c_ε – теплоёмкость при постоянной деформации;

β_{ij} – компоненты тензора изотермических упругих постоянных, определяющих взаимное влияние температурного поля и поля деформаций;

ε_{ij} – компоненты тензора конечных деформаций;

λ_{ij} - компоненты тензора теплопроводности;

w_0 – плотность внутренних источников теплообразования;

q – тепловой поток;

h – коэффициент теплообмена;

θ – температура окружающей среды.

Вариация свободной энергии δF вычисляется по формуле

$$\delta F=\delta W-\sigma^{ij}_{(т)}\delta\varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

где $\delta W=\sqrt{\frac{G}{g}}\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}$ – вариация упругой энергии деформации.

В случае совместного действия нагрузки и температуры, возникающие деформации представляются в виде суммы упругой $\varepsilon^{(у)}_{ij}$ и температурной $\varepsilon^{(т)}_{ij}$ составляющих,

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^{(у)}_{ij}+\varepsilon^{(т)}_{ij}, \tag{3}$$

а контравариантные компоненты тензора напряжений – в виде разности

$$\sigma^{ij}=\sigma^{ij}_{(у)}-\sigma^{ij}_{(т)}, \tag{4}$$

где $\sigma^{ij}_{(у)}$ – компоненты тензора напряжений, обусловленные перемещениями тела;

$\sigma^{ij}_{(т)}$ – температурные напряжения.

Компоненты тензора напряжений определяются законом термоупругости Дюамеля–Неймана, представляющего собой закон Гука, обобщённый на случай учёта температуры:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta^{ij}\left(T - T_0\right), \tag{5}$$

где C^{ijkl}, β^{ij} для изотермического и адиабатного состояний имеют примерно одинаковые значения и представляют собой соответственно тензор изотермических упругих постоянных и величин, определяющих взаимное влияние температурного поля и поля деформаций, называемых коэффициентами температурного расширения;

T – температура в точке тела;

T_0 – начальная температура.

Компоненты тензора напряжений, возникающие от температуры, можно вычислить по формуле

$$\sigma^{ij}_{(\text{т})} = 2\mu g^{ik} g^{jl} \varepsilon^{(\text{т})}_{kl} + \lambda\theta^{(\text{т})} g^{ij}, \tag{6}$$

где μ, λ – коэффициенты Ляме;

g^{ij} – компоненты метрического тензора,

компоненты тензора тепловых деформаций:

$$\varepsilon^{(\text{т})}_{kl} = \alpha_{\text{т}}\left(T_1 - T_0\right) g_{kl}, \tag{7}$$

$\alpha_{\text{т}}$ – коэффициент линейного теплового расширения;

$\theta^{(\text{т})}$ – функция изменения объёма при температурной деформации:

$$\theta^{(\text{т})} = \varepsilon^{(\text{т})}_{ii}. \tag{8}$$

Коэффициент Пуассона, для рассматриваемых термочувствительных материалов, мало зависит от температуры, и считаем постоянным.

Компоненты тензора напряжений, возникающих от температуры, вычисляются по формуле (6).

При решении задачи теплопроводности для циклического деформирования функция внутренних источников тепла вычисляется по формуле

$$w_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dt. \tag{9}$$

Для решения связанной задачи используется метод последовательных приближений. Для моделирования пространственного поля перемещений, деформаций и напряжений используется метод конечных элементов [1].

Долговечность эластомерных элементов конструкций зависит от режимов эксплуатации, следовательно, основными факторами определяющими условия разрушения являются критические напряжения и температура.

Для определения долговечности необходимо определить опасные точки, в которых возникают наибольшие главные напряжения и наибольшие температуры диссипативного саморазогрева. В качестве критерия разрушения принимается энергетический критерий, который является наиболее физически обоснованным [2].

$$\int_0^{t^*} \dot{U} dt = \int_0^{t^*} \left(\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\chi} - \dot{q}\right) dt = \Delta U^*, \tag{10}$$

где $t^* = \dfrac{2\pi}{\omega}N^*$ – время до локального разрушения виброизолятора;

N^* – количество циклов до локального разрушения виброизолятора;

ΔU^* – предельное (критическое) значение плотности энергии, идущей на разрушение резины;

$\dot{q}$ – тепловой поток;

χ – энергия внешней агрессивной среды.

Для моделирования вязкоупругого поведения эластомера используется четырёхэлементная модель Бюргерса [10], состоящая из двух упругих и двух вязких элементов.

В этой модели учитываются мгновенная упругость, высокоэластичность, запаздывающая упругость и необратимое деформирование под длительной нагрузкой. Функция изменения физико-механических характеристик материала определяется экспериментальной кривой $G(t) = G_0\varphi(t)$.

Достаточно хорошей аппроксимацией экспериментальных данных является экспоненциальная функция

$$\varphi(t) = \exp(k_1 - k_2\bar{W}t^2), \tag{11}$$

где k_1, k_2 – коэффициенты аппроксимации;

$\bar{W} = \dfrac{1}{G}\bar{\sigma}^{ij}\bar{\sigma}^{ij}$, $\bar{\sigma}^{ij}$ – среднее значении девиатора тензора напряжений.

Критериальное уравнение при циклических деформациях принимает вид

$$\int_0^{t^*}\left(\frac{GW}{\eta_0}\varphi(t) - \dot{q}\right)dt = \Delta U^*, \tag{12}$$

где η_0 – начальное значение коэффициент вязкости элемента с изменяющимися характеристиками.

Численное интегрирование левой части уравнения с неизвестным верхним пределом представляет собой нелинейное уравнение, решением которого является искомая долговечность.

Задача 1. Рассмотрим деформирование слоистой термочувствительной цилиндрической оболочки, левый торец которой жёстко защемлён, а правый свободен, подверженной воздействию неравномерного стационарного температурного поля вида [7]

$$T^{(k)} = T_0^{(k)}(z) + T_1^{(k)}(z) \, (k = 1,\ 2, \ldots, n),$$

где n – количество слоёв;

z – координата, отсчитываемая вдоль внешней нормали к срединной поверхности цилиндра.

Предположим зависимости физико-механических характеристик слоёв от температуры, учитывая термочувствительность материала

$$E_i^{(k)} = E_{i0}^{(k)}\left(1 + \xi_i^{(k)}T^{(k)}\right);$$

$$G^{(k)} = G_0^{(k)}\left(1 + \eta^{(k)}T^{(k)}\right);$$

$$\alpha_i^{(k)} = \alpha_{i0}^{(k)}\left(1 + \gamma_{1i}^{(k)}T^{(k)} + \gamma_{2i}^{(k)}T^{(k)2}\right) (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где $\xi_i^{(k)}, \eta^{(k)}, \gamma_{1i}^{(k)}, \gamma_{2i}^{(k)}$ – постоянные, определяемые экспериментально и характеризующие зависимость упругих модулей $E_i^{(k)}, G^{(k)}$ и коэффициентов температурного расширения $\alpha_i^{(k)}$ от температуры.

Коэффициент Пуассона, для рассматриваемых термочувствительных материалов, мало зависит от температуры, и считаем постоянным.

Компоненты тензора напряжений, возникающих от температуры, вычисляются по формуле (6).

Физико-механические параметры принимаются следующими:

$$E_{10} = E_{30} = 1{,}704 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \; E_{20} = 2{,}808 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \; \mu_0 = E_{10}/50; \; l = 0{,}2 \text{ м}; 2h = 0{,}04 \text{ м};$$

$$\nu_{12} = 0{,}106; \nu_{21} = \nu_{13} = 0{,}174; \nu_{23} = 0{,}064; \; \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = -0{,}25 \cdot 10^{-2};$$

$$\eta = \xi_1; \gamma_{2i} = 0 \; (i = 1,2,3); \; \gamma_{11} = -0{,}2413 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1}; \; \gamma_{13} = 0; \gamma_{12} = -0{,}2445 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1};$$

$$\alpha_{10} = 0{,}1134 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}; \; \alpha_{20} = 0{,}1418 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}; \; \alpha_{30} = 0; R = 0{,}4 \text{ м}.$$

Построенная система уравнений в перемещениях с переменными коэффициентами решается с помощью трехмерного метода конечных элементов, полученные результаты удовлетворительно совпадают с результатами, полученными при точных и приближенных решениях с применением теории оболочек авторами работ [7, 8].

На рисунке 1 приведены графики радиальных перемещений, полученных с помощью комплекса МИРЕЛА+ (кривая 1) и авторами работы [7].

Учёт термочувствительности материала вносит существенные поправки в значения расчётных величин и необходим при проектировании ответственных технических конструкций.

Задача 2. Диссипативный разогрев полого цилиндрического амортизатора в условиях предварительного нагружения. Размеры амортизатора: R_1 = 0,035 м, R_2 = 0,1 м, h = 0,175 м. Упругие характеристики резины 2959: равновесный модуль сдвига μ = 0,74 МПа, мгновенный модуль сдвига μ_0 = 1,76 МПа, ν = 0,499; реологические параметры ядра релаксации Работнова α = -0,6; β = 1,062; χ = 0,64. Амплитуда осевых колебаний δ = 0,008 м, частота ω = 40 с$^{-1}$. Коэффициент теплопроводности λ = 0,293 Вт/(м·К); коэффициенты теплообмена с металлической арматурой и окружающей средой, соответственно H_1 = 5240 м$^{-1}$, H_2 = 40 м$^{-1}$.

На рис. 2 приведены графики распределения установившейся температуры саморазогрева без предварительного поджатия (1) и предварительной осадкой (7, 8), которые показывают, что с увеличением начальной осадки температура увеличивается. Учёт начальных напряжений основан на использовании инкрементальной теории и её реализации методом конечных элементов [9].

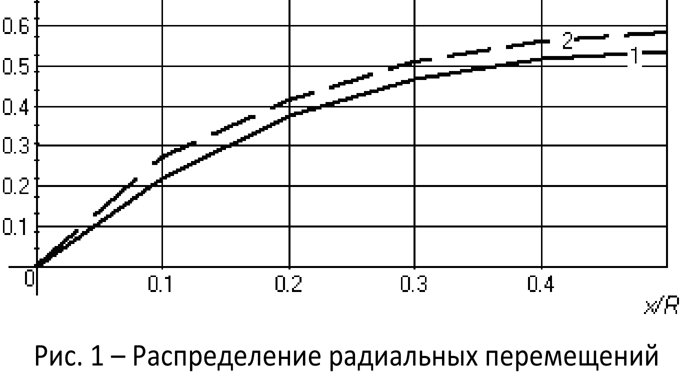
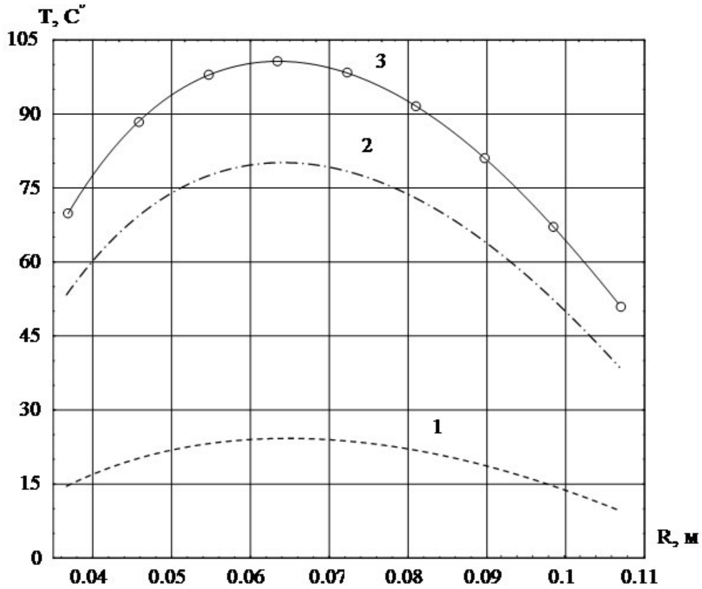


Рис. 1 – Распределение радиальных перемещений

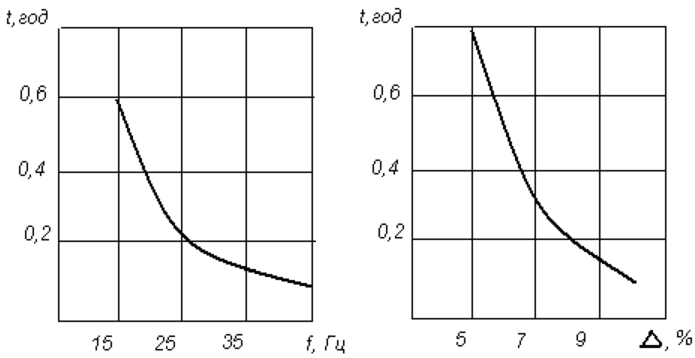
Задача 3. Расчёт срока службы полого цилиндрического виброизолятора. Размеры r_1 = 0,9 см, r_2 = 2,6 см, h = 1,7 см. Модуль сдвига G = 1,27 МПа, коэффициент вязкости $\eta_0 = 780$ МПа·с. Параметры ядра релаксации α = 0,6, β = 1,11, χ = 0,64. Коэффициент теплопроводности λ = 0,293Вт/(м·К), коэффициенты теплообмена $H_1 = H_2$ = 40 Вт/(м^2·К), H_3 = 5240 Вт/(м^2·К). Коэффициенты аппроксимации k_1 = 7,2766 1/год, k_2 = 0,3166·10^{-3}см^2/(год^2·кг). Решение критериального уравнения даёт значение 0,43 года.

На рис. 3 представлены зависимости долговечности от амплитуды и частоты нагружения.



предварительная осадка: 1) $\Delta = 0{,}02$ м; 2) $\Delta = 0{,}01$ м; 3) $\Delta = 0$ м

Рис. 2 – Распределение избыточной температуры в сечении $z = h/2$



а) б)

Рис. 3 – Зависимость долговечности: а) от частоты; б) от амплитуды

Выводы. Разработан метод решения связанной задачи термоупругости для случая динамического нагружения. Получены соотношения для критериального уравнения долговечности эластомерных элементов конструкций на основе энергетического критерия разрушения с учётом изменения физико-механических свойств с течением времени, а также под действием тепловой нагрузки. Изучена зависимость температуры диссипативного саморазогрева и долговечности от частоты и амплитуды динамической нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киричевский, В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. — К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
2. Дырда, В.И. Механика деформирования и разрушения упруго-наследственных сред / В.И. Дырда, А.С. Кобец, А.А. Демидов. – Днепропетровск: Герда, 2009. – 584 с.
3. Масленников, В.Г. Энтропийный критерий долговечности силових резино-технических деталей / В.Г. Масленников, Э.Э. Лавендел // Механика полимеров. – 1975. – №2. – С. 241-247.
4. Гольденблат, И.И. Энтропийный принцип в теории прочности полимерных материалов / И.И. Гольденблат, В.Л. Бажанов, В.А. Копнов // Механика полимеров. – 1976. – №1. – С. 113-121.
5. Голуб, В.П. Нелинейные модели накопления повреждений в условиях ползучести / В.П. Голуб // Пробл. машиностроения и автоматизации. – 1992. – №1. – С. 51-58.
6. Губанов, В.В. Прогнозирование срока службы резинотехнических изделий, работающих при циклических деформациях / В.В. Губанов // Вопр. динамики и прочности. – 1982. – Вып. 40. – С. 21-33.

7. Хорошун, Л.П. Определение осесимметричного напряженно-деформированного состояния термочувствительных оболочек вращения методом сплайн-коллокации / Л.П. Хорошун, С.В. Козлов, И.Ю. Патлашенко // Прикл.механика. – 1988. – 24, №6. – С.56-63.
8. Василенко, А.Т. Розв’язання задачі про напружений стан товстостінних циліндричних ортотропних оболонок / А.Т. Василенко, Я.М. Григоренко, Н.Д. Панкратова // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – №2. – С. 146-149.
9. Дохняк, Б.М. Расчет предварительно напряженных конструкций из эластомеров / Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб // 13 Симп. Проблемы шин и резинокордных композитов (Москва 14-18 октября 2002 г.). – М.: НИИШП, 2002. – С. 119-123.
10. Лавендел, Э.Э. Расчет резинотехнических деталей / Э.Э. Лавендел. – М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.

REFERENCES

1. Kirichevskiy, V. V. and Sakharov, A. S. (1992), *Nelineynye zadachi termomekhaniki konstruktsiy iz slaboszhimaemych elastomorov* [Nonlinear tasks of thermomechanics of constructions from weak compressible elastomers], Budivelnik, Kiyev, Ukraine.
2. Dyrda, V. I., Kobets, A. S. and Demidov, A. A. (2009) *Mekhanika deformirovaniya i razrusheniya uprugo-nasledstvennych sred* [The deformed and fracture mechanics of elasticity-inherited continuum], Gerda, Dnepropetrovsk, Ukraine.
3. Maslennikov, V. G. and Lavendel, E. E. (1975) “Entropy criterion of longevity of force rubber-technical structural member”, *Mechanics of polymers,* no. 2, pp. 241-247.
4. Goldenblat, I. I., Bazhanov, V. L. and Kopnov, V. A. Romanov (1976*)* “Entropy principle is in the strength theory of polymeric material”, *Mechanics of polymers,* no. 1, pp. 113-121.
5. Golub, V. P., (1992) “Nonlinear models of accumulation of damages to creep conditions”, *Engineering and Automation problems,* no.1, pp. 51-58.
6. Gubanov, V. V. (1982) “Forecasting of service life of the rubber products working at cyclic deformations”, *Voprosy dinamikii i procnosti*, no. 40, pp. 21-33.
7. Khoroshun, L. P., Kozlov, S. V. and Patlashenko, I. Y. (1988) “The determination of axisymmetric stressed and deformed state of thermosensitive shells of rotation by a spline collocation method”, *International Applied Mechanics,* vol. 24, no. 6, pp. 56-63.
8. Vasilenko, A. T., Grigorenko, Y. M. and Pankratova, N. D. (1974) “The solution of a task about stress-deformed state of thick-walled cylindrical ortotropic shalls”, *Reports of Acalmy of Sciences of URSR,* Ser. A., no. 2, pp. 146-149.
9. Dokhnyak, B. M. and Kozub, Y. G. (2002) “Calculation of previously intense designs from elastomers”, *Proc. 13th Int. Symp. "Problem of tires and rubber-cord composits",* Moscow, Russia, October 2002, pp. 119-122.
10. Lavendel, E. E (1976) *Raschet rezinotekhnicheskich detaley* [Calculation of rubber details], Mashinostroenie, Moscow, Russia.

Об авторе

Козуб Юрий Гордеевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологий производства и профессионального образования, Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко (ЛНУ им. Тараса Шевченко), Луганск, Украина, kosub@rambler.ru

---

About the author

Kozub Yuriy Gordeyevich, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor, Associate Professor in Department of Technology of Production and Trade Education, Taras Shevchenko National University of Lugansk (LNU), Lugansk, Ukraine, kosub@rambler.ru