ISSN 1028-7507 Акустичний вiсник. 2009. Том 12, N 1. С. 11 – 18

УДК 539.3

# ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНКИ

**М. Я. БАРНЯК***, **Б. СОЛТАННИА****

*Институт математики НАН Украины, Киев

**Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

*Отримано 24.03.2009*

Рассмотрена задача о собственных колебаниях упругой жестко закрепленной пластинки. Предложен проекционный метод построения ее решений, основанный на использовании метода Трефтца решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца и метода наименьших квадратов для решения вспомогательной спектральной краевой задачи с параметром в краевом условии. В результате построены решения задачи, точно удовлетворяющие уравнению внутри области и приближенно (с точностью до шести – восьми значащих цифр) – краевым условиям задачи. В качестве примера определены 24 первые собственные значения и собственные функции задачи для эллиптической и суперэллиптической пластинок.

Розглянуто задачу про власнi коливання пружної жорстко закрiпленої пластинки. Запропоновано проекцiйний метод побудови її розв'язкiв, який грунтується на використаннi методу Трефтца розв'язування задачi Дiрiхле для рiвняння Гельмгольца й методу найменших квадратiв для розв'язування допомiжної спектральної крайової задачi з параметром у крайовiй умовi. В результатi побудовано розв'язки задачi, якi точно задовольняють рiвняння всерединi областi й наближено (з точнiстю до шести – восьми значущих цифр) – крайовi умови задачi. Як приклад визначено 24 першi власнi значення й власнi функцiї задачi для елiптичної та суперелiптичної пластинок.

The paper deals with the problem on natural vibrations of the elastic plate with a fixed boundary. To solve this problem a projective method is suggested that is based on the Trefts method for solving the Dirichlet problems for the Helmholtz equation and r. m s. value method for solving auxiliary spectral boundary problems with a parameter in the boundary condition. As a result, the solution has been developed that exactly satisfies the equation inside the domain and approximately (to within six – eight significant figures) – boundary conditions of the problem. As an example, the first 24 eigenvalues and eigenfunctions in the problem for the elliptic and superelliptic plates have been specified.

## ВВЕДЕНИЕ

Определение частот и форм собственных колебаний упругих пластин – классическая задача, которая в настоящее время достаточно хорошо исследована. В работах многих авторов, начиная с работ С. П. Тимошенко, предложены эффективные методы построения ее решений [1 – 5]. Наиболее универсальным оказалось применение для этой цели метода Ритца, который позволяет рассматривать пластинки довольно сложной геометрии [3 – 5]. Заметим, что метод Ритца дает возможность получать аналитическое решение этой задачи, удовлетворяющее приближенно как уравнению в области, так и краевым условиям, причем оценить его точность не всегда удается.

Современный уровень развития компьютерной техники, позволяющей выполнять большой объем вычислений, дает возможность определять решения краевых задач с высокой точностью. В частности, в этой работе построено аналитическое решение задачи, удовлетворяющее уравнению в области точно, а краевым условиям – приближенно, с точностью до шести – восьми значащих цифр.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о собственных колебаниях жестко защемленной по всему краю упругой пластинки, занимающей область $G$, ограниченную линией $l$. Как известно из работ [1, 2], ее собственные колебания описываются следующей краевой спектральной задачей:

$$\Delta^2 w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \lambda^2 w \quad \text{в} \quad G, \quad (1)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad l, \quad (2)$$

где $w(x, y)$ – прогиб пластинки; $(x, y)$ – декартова система координат; $\lambda$ – спектральный параметр; $n$ – внешняя, по отношению к $G$, нормаль к $l$.

Для круговой области единичного радиуса известно точное решение задачи (1), (2), которое строится с помощью метода разделения переменных в полярной системе координат $(r, \eta)$ и имеет следующий вид:

$$w(r, \eta) = v_m(r) \exp(im\eta), \qquad m = 0, 1, \ldots, \quad (3)$$

где

$$v_m(r)=\frac{J_k(\sqrt{\lambda_k}r)}{J_k(\sqrt{\lambda_k})}-\frac{I_k(\sqrt{\lambda_k}r)}{I_k(\sqrt{\lambda_k})};$$

$\lambda_k$ – $k$-ый корень трансцендентного уравнения

$$I_k(\sqrt{\lambda_k})J_k'(\sqrt{\lambda_k})-J_k(\sqrt{\lambda_k})I_k'(\sqrt{\lambda_k})=0.$$

В случае областей более сложной формы для построения решений задачи (1), (2) применяется вариационный метод, основанный на сведении задачи к минимизации функционала

$$F(w)=\int\limits_G\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+\right.\\ \left.+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right)dG \qquad (4)$$

на классе функций $w(x,y)$, интегрируемых с квадратом вместе с первыми и вторыми частными производными по области $G$ и удовлетворяющих краевым условиям (2) и условию нормировки

$$\int\limits_G w^2 dG=1. \qquad (5)$$

Для минимизации функционала (4) используют метод Ритца, когда искомое решение задачи представляют в виде конечной суммы

$$w=\sum_{k=1}^{N}a_k u_k, \qquad (6)$$

где $\{u_k(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая полная в определенном выше классе система координатных функций.

Такая методика известна еще из работ Ритца, Тимошенко и др. В настоящее время появляется ряд исследований, посвященных решению этой задачи с помощью метода Ритца. Мы предлагаем принципиально другой подход к построению решений – в его основу положены идеи проекционных методов.

Сначала несколько преобразуем задачу. Для этого докажем следующее утверждение: *всякое достаточно гладкое, а именно, четырежды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) $w(x,y)$ при $\lambda\neq 0$ представимо в виде суммы*

$$w(x,y)=\varphi(x,y)+\psi(x,y), \qquad (7)$$

*где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – решения уравнений Гельмгольца*

$$(\Delta+\lambda)\varphi=0, \qquad (8)$$

$$(-\Delta+\lambda)\psi=0. \qquad (9)$$

**Доказательство.** *Положим*

$$\varphi=\frac{1}{2\lambda}(-\Delta+\lambda)w, \qquad \psi=\frac{1}{2\lambda}(\Delta+\lambda)w. \qquad (10)$$

*Подействуем на первую из функций оператором $(\Delta+\lambda)$, а на вторую – оператором $(\Delta-\lambda)$. В силу того, что указанные операторы коммутируют между собой, а функция $w(x,y)$ является решением уравнения (1), получим*

$$(\Delta+\lambda)\varphi=0, \qquad (-\Delta+\lambda)\psi=0.$$

*Складывая оба выражения (10), имеем $w(x,y)=\varphi(x,y)+\psi(x,y)$, что и доказывает наше утверждение.*

Задачу (1), (2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{array}{ll}(\Delta+\lambda)\varphi=0 \ \text{ в } \ G, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}+\dfrac{\partial\psi}{\partial n}=0 \ \text{ на } \ l,\\ (-\Delta+\lambda)\psi=0 \ \text{ в } \ G, & \varphi+\psi=0 \ \text{ на } \ l.\end{array} \qquad (11)$$

Отдельно выделим из полученной задачи (11) задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$(-\Delta+\lambda)\psi=0 \ \text{ в } \ G, \qquad \psi=-\varphi \ \text{ на } \ l. \qquad (12)$$

Функция $\psi(x,y)$ может быть определена с помощью функции Грина $H(x,y,\xi,\eta)$:

$$\psi(x,y)=-\int\limits_l H(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)dl. \qquad (13)$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_l=-\int\limits_l\left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_l\varphi dl=-T_\lambda\varphi\big|_l,$$

где $T_\lambda$ – положительно-определенный интегро-дифференциальный оператор, который ставит в соответствие граничным значениям функции $\varphi$ на $l$ значение нормальной производной решения задачи (12), т. е. функции $\psi$ на $l$. Следовательно, задачу (11) можно переписать в таком виде:

$$\begin{array}{l}(\Delta+\lambda)\varphi=0 \ \text{ в } \ G,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}+T_\lambda\varphi=0 \ \text{ на } \ l.\end{array} \qquad (14)$$

Таким образом задача (1), (2) сводится к спектральной задаче для оператора Лапласа в области $G$. Кроме того, спектральный параметр входит в краевое условие задачи посредством оператора $T_\lambda$, определяющего решение задачи (12).

Явный вид этого оператора, т. е. функцию Грина $H(x, y, \xi, \eta)$, удается записать только для частных случаев формы области $G$: круга, кольца, прямоугольника. Для других областей решение задачи (12) можно построить с помощью проекционных методов.

## 2. ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД

Пусть имеются две системы функций – $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие уравнениям (8) и (9) соответственно и полные в соответствующих подпространствах пространства Соболева $\mathsf{W}_2^1(G)$ решений этих уравнений, т. е. любые решения уравнений (8) и (9) могут быть как угодно точно аппроксимированы конечными суммами

$$\varphi^N = \sum_{k=1}^{N} a_k f_k, \qquad \psi^M = \sum_{k=1}^{M} b_k w_k \tag{15}$$

в метрике пространства $\mathsf{W}_2^1(G)$. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдутся такие значения констант $N$, $M$ и коэффициентов $a_k$ и $b_k$, что

$$\|\varphi - \varphi^N\|_{\mathsf{W}_2^1(G)} < \varepsilon, \qquad \|\psi - \psi^M\|_{\mathsf{W}_2^1(G)} < \varepsilon,$$

где $\|u\|_{\mathsf{W}_2^1(G)} = \int\limits_G \left((\nabla u)^2 + u^2\right) dG$.

Для всякого фиксированного значения параметра $\lambda$ сформулируем вспомогательную спектральную задачу

$$\begin{aligned} &(-\Delta + \lambda)u = 0 \quad \text{в} \quad G, \\ &\frac{\partial u}{\partial n} + T_\lambda u = \sigma u \quad \text{на} \quad l, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\sigma$ – спектральный параметр. Квадрат минимального по модулю $\sigma$ можно определить как минимум функционала

$$K(u) = \frac{\int\limits_l \left(\frac{\partial u}{\partial n} + T_\lambda u\right)^2 dl}{\int\limits_l u^2 dl} \tag{17}$$

на классе функций $u$, удовлетворяющих уравнению (8). Если окажется, что при некотором $\lambda = \lambda_i$ минимальная величина функционала достаточно мала, то $\lambda_i$ можно принять за приближенное собственное значение задачи (14). Функцию $u_i$, предоставляющую функционалу $K(u)$ эту минимальную величину, примем за соответствующую собственную функцию задачи. При этом само минимальное значение функционала укажет на точность, с которой полученное решение удовлетворяет краевому условию задачи. Приближенное решение задачи (16) представим в виде конечной суммы

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} a_k f_k, \tag{18}$$

где коэффициенты $a_k$ определим из условий минимума функционала (17) $\partial K(u_N)/\partial a_k = 0$, которые принимают вид системы линейных однородных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} (\alpha_{i,k} - \sigma^2 \beta_{i,k}) a_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{19}$$

Здесь

$$\alpha_{i,k} = \int\limits_l \left(\frac{\partial f_i}{\partial n} + T_\lambda f_i\right)\left(\frac{\partial f_k}{\partial n} + T_\lambda f_k\right) dl;$$

$$\beta_{i,k} = \int\limits_l f_i f_k dl.$$

Из условия существования нетривиального решения системы линейных однородных алгебраических уравнений (19) определим наименьшее по модулю собственное значение задачи (16). Здесь принято, что оператор $T_\lambda$ определен, т. е. предполагается, что мы умеем решать задачу (12). Для построения решений этой задачи при $\varphi = f_i$ используем метод Трефтца [6], представляя искомое решение задачи

$$(-\Delta + \lambda)\psi_k = 0 \quad \text{в} \quad G, \qquad \psi_k = -f_k \quad \text{на} \quad l$$

в виде

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{M} b_{j,k} w_j. \tag{20}$$

Коэффициенты $b_{j,k}$, согласно методу Трефтца, определяются из условий ортгональности [6]

$$\int\limits_l \left(\sum_{j=1}^{M} b_{j,k} w_j + f_k\right) \frac{\partial w_i}{\partial n} \, dl = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, M, \qquad k = 1, 2, \ldots, N,$$

которые можно переписать как

$$\sum_{j=1}^{M} \gamma_{i,j} b_{j,k} w_j + \omega_{i,k} = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma_{i,j}=\int\limits_l w_j\frac{\partial w_i}{\partial n}dl=\int\limits_l w_i\frac{\partial w_j}{\partial n}\,dl,$$

$$\omega_{i,k}=\int\limits_l f_k\frac{\partial w_i}{\partial n}\,dl.$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений с $N$ правыми частями запишем в сокращенном виде

$$\mathbf{D}\,\mathbf{X}+\mathbf{\Omega}=\mathbf{0}, \qquad (21)$$

где $\mathbf{D}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{\Omega}$ – матрицы коэффициентов $\gamma_{i,j}$, $b_{j,k}$ и $\omega_{i,k}$ соответственно. В результате решения системы уравнений (21) определяем матрицу коэффициентов $\mathbf{X}$ для функций $\psi_k$, а с ними и значение

$$T_\lambda f_k=\sum_{j=1}^{M}b_{j,k}\frac{\partial w_j}{\partial n}\,.$$

Окончательно имеем

$$\alpha_{i,k}=\int\limits_l\frac{\partial f_i}{\partial n}\frac{\partial f_k}{\partial n}dl+\int\limits_l\sum_{j=1}^{M}b_{j,i}\frac{\partial w_j}{\partial n}\sum_{j=1}^{M}b_{j,k}\frac{\partial w_j}{\partial n}dl+$$
$$+\int\limits_l\sum_{j=1}^{M}b_{j,i}\frac{\partial w_j}{\partial n}\frac{\partial f_k}{\partial n}dl+\sum_{j=1}^{M}b_{j,k}\frac{\partial w_j}{\partial n}\frac{\partial f_i}{\partial n}dl.$$

Вводя обозначения матриц коэффициентов

$$\alpha^0_{i,k}=\int\limits_l\frac{\partial f_i}{\partial n}\,\frac{\partial f_k}{\partial n}\,dl \quad \text{через} \quad \mathbf{A_0},$$

$$\alpha^1_{i,k}=\int\limits_l\frac{\partial w_i}{\partial n}\,\frac{\partial f_k}{\partial n}\,dl \quad \text{через} \quad \mathbf{A_1},$$

$$\alpha^2_{i,k}=\int\limits_l\frac{\partial w_i}{\partial n}\,\frac{\partial w_k}{\partial n}\,dl \quad \text{через} \quad \mathbf{A_2},$$

получаем следующее выражение для матрицы:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1\mathbf{X}+(\mathbf{A_1}\mathbf{X})^T+\mathbf{X}^T\mathbf{A}_2\mathbf{X},$$

где $\mathbf{X}^T$ – матрица, транспонированная к $\mathbf{X}$.

Обобщенную спектральную задачу для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ решаем с помощью стандартных подпрограмм.

## 3. ВЫБОР СИСТЕМ КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Успех применения проекционных методов к решению краевых задач математической физики всецело зависит от удачного выбора системы координатных функций.

Перейдем к цилиндрической системе координат $(r,\eta)$:

$$x=r\cos(\eta),\qquad y=r\sin(\eta). \qquad (22)$$

В качестве системы функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ выберем решения уравнений (8) и (9), определяемые с помощью метода разделения переменных:

$$\begin{gathered}
f_{2k}(r,\eta)=J_k(\sqrt{\lambda_k}r)\cos(k\eta),\\
f_{2k+1}(r,\eta)=J_{k+1}(\sqrt{\lambda_k}r)\sin((k+1)\eta),\\
w_{2k}(r,\eta)=I_k(\sqrt{\lambda_k}r)\cos(k\eta),\\
w_{2k+1}(r,\eta)=I_{k+1}(\sqrt{\lambda_k}r)\sin((k+1)\eta),\\
k=1,2,\ldots
\end{gathered} \qquad (23)$$

Отметим, что все выражения в (23) при нечетных значениях индексов – нечетные функции переменной $\eta$, а следовательно, и нечетные функции $y$. Четные значения индексов соответствуют четным функциям переменной $y$. Нетрудно проверить, что при четных значениях параметра $k$ все функции – четные относительно переменной $t=\pi/2-\eta$, а следовательно, и $x$.

При нечетных $k$ все функции будут нечетными по $x$, а при четных – четными. Действительно, проведем в выражениях (23) замену переменной $\eta=\pi/2-t$ при $k=2j$:

$$\begin{gathered}
f_{4j}(r,\eta)=J_{2j}(\sqrt{\lambda}r)\cos(2jt)(-1)^j,\\
f_{4j+1}(r,\eta)=J_{2j+1}(\sqrt{\lambda}r)\cos((2j+1)t)(-1)^j,\\
w_{4j}(r,\eta)=I_{2j}(\sqrt{\lambda}r)\cos(2jt)(-1)^j,\\
w_{4j+1}(r,\eta)=I_{2j+1}(\sqrt{\lambda}r)\cos((2j+1)t)(-1)^j,\\
j=0,1,2,\ldots
\end{gathered} \qquad (24)$$

Учитывая связь (22), делаем вывод, что все выписанные функции – четные по $x$.

Если сделать замену переменной $\eta=\pi/2-t$ при $k=2j+1$, то получим нечетные функции переменной $x$ с индексами $4j+2$ и $4j+3$:

$$f_{4j+2}(r,\eta)=J_{2j+1}(\sqrt{\lambda}r)\sin((2j+1)t)(-1)^j,$$

$$f_{4j+3}(r,\eta)=J_{2j+2}(\sqrt{\lambda}r)\sin((2j+2)t)(-1)^j,$$

$$w_{4j+2}(r,\eta)=I_{2j+1}(\sqrt{\lambda}r)\sin((2j+1)t)(-1)^j, \quad (25)$$

$$w_{4j+3}(r,\eta)=I_{2j+2}(\sqrt{\lambda}r)\sin((2j+2)t)(-1)^j,$$

$$j=0,1,2,\ldots$$

Таким образом, все функции $f_i(x,y)$ и $w_i(x,y)$ разбиваются по признаку четности по переменным $x$ и $y$ на четыре класса:

1) функции с индексом $4j$ четные по $x$ и четные по $y$;

2) функции с индексом $4j+1$ четные по $x$ и нечетные по $y$;

3) функции с индексом $4j+2$ нечетные по $x$ и четные по $y$;

4) функции с индексом $4j+3$ нечетные по $x$ и нечетные по $y$.

Эти свойства используются при построении решений задачи для симметричных областей.

Как уже отмечено, через выписанные функции выражаются точные решения задачи для круговой области. Таким образом, их целесообразно использовать для аппроксимации решений задачи для областей, мало отличающихся от круговой.

## 4. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

Ниже предлагается алгоритм численной реализации описанного проекционного метода решения задачи для областей эллиптической и суперэллиптической формы, уравнение границы которых задается в виде

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2k}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2k}=1, \quad (26)$$

где $k$ – произвольное целое положительное число. При $k=1$ получаем канонический эллипс. Для такой области задача (1), (2) была рассмотрена в работах [3 – 5]. Там для ее решения применялся метод Ритца.

Уравнение суперэллипса в полярной системе координат имеет вид

$$F(r,\eta)\equiv r^p\left(\left(\frac{\cos\eta}{a}\right)^p+\left(\frac{\sin\eta}{b}\right)^p\right)-1=0 \quad (27)$$

или

$$r=\left(\left(\frac{\cos\eta}{a}\right)^p+\left(\frac{\sin\eta}{b}\right)^p\right)^{-\frac{1}{p}},$$

где $p=2k$.

Вычислим нормальную производную от $\varphi(r,\eta)$ на $l$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{\partial F/\partial r}{|\nabla F|}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,\frac{\partial F/\partial\eta}{|\nabla F|}.$$

Элемент дуги кривой составляет

$$dl=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\eta)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2}\,r d\eta.$$

Производную $dr/d\eta$ вычислим как производную неявно заданной функции, а потому

$$dl=\sqrt{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F/\partial\eta}{|\nabla F|}\right)^2}\,r d\eta=\frac{|\nabla F|}{\partial F/\partial r}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}dl=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,\frac{\partial F/\partial\eta}{\partial F/\partial r}.$$

Теперь, когда получено выражение для нормальных производных от функций в полярной системе координат, не представляет труда найти коэффициенты матриц, например, с помощью метода Гаусса. Вычисляя матрицы A и B и решая спектральную задачу (16), имеем зависимость

$$\sigma^2_{\min}=\sigma^2_{\min}(\lambda).$$

Изложим алгоритм определения величины минимума значения этой функции. Сначала задаем некоторое начальное значение $\lambda_1$ и вычисляем значение $\sigma_1=\sigma_{\min}(\lambda_1)$. Далее, изменяем $\lambda$ с некоторым постоянным шагом $h$. Как только получим три последовательные пары значений аргумента $\lambda$ и функции $\sigma_{\min}$ – $(\lambda_1,\sigma_1)$, $(\lambda_2,\sigma_2)$, $(\lambda_3,\sigma_3)$, – проверяем, не попали ли мы на минимум. Если выполняется условие $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ или $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$, значит функция на этом отрезке монотонно убывает или монотонно возрастает. Следовательно, минимума здесь нет, и мы дальше с тем же шагом увеличиваем значение аргумента. Если окажется, что на некотором отрезке выполняются неравенства $\sigma_1>\sigma_2<\sigma_3$, то это означает что на отрезке $\lambda_1<\lambda<\lambda_3$ находится точка, в которой функция принимает минимальное значение. Чтобы уточнить его, проводим через точки $(\lambda_1,\sigma_1)$, $(\lambda_2,\sigma_2)$, $(\lambda_3,\sigma_3)$ параболу $\sigma=c(\lambda-s)+d$. Подставляя в уравнение параболы координаты указанных трех точек, получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c$, $s$ и $d$:

Табл 1. Собственные значения для колебаний суперэллиптической пластинки, симметричных по $x$ и антисимметричных по $y$ ($p=10$, $N=15$)

| $M$ | $\lambda_1,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2,\ \sigma^2_{\min}$ |
|---|---|---|
| 10 | $3.22981305, 0.59\cdot10^{-6}$ | $5.02247739, 0.14\cdot10^{-4}$ |
| 11 | $3.22981309, 0.72\cdot10^{-6}$ | $5.02247598, 0.56\cdot10^{-5}$ |
| 12 | $3.22981310, 0.62\cdot10^{-6}$ | $5.02247616, 0.40\cdot10^{-5}$ |
| $M$ | $\lambda_3,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4,\ \sigma^2_{\min}$ |
| 10 | $5.89299340, 0.75\cdot10^{-4}$ | $6.96353055, 0.68\cdot10^{-2}$ |
| 11 | $5.89299330, 0.56\cdot10^{-4}$ | $6.96361217, 0.13\cdot10^{-2}$ |
| 12 | $5.89299311, 0.19\cdot10^{-4}$ | $6.96363141, 0.14\cdot10^{-4}$ |
| $M$ | $\lambda_5,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6,\ \sigma^2_{\min}$ |
| 10 | $8.46241786, 0.23\cdot10^{1}$ | $8.90078664, 0.24\cdot10^{0}$ |
| 11 | $8.46762713, 0.21\cdot10^{0}$ | $8.90128922, 0.10\cdot10^{-1}$ |
| 12 | $8.46849720, 0.17\cdot10^{-1}$ | $8.90128340, 0.57\cdot10^{-2}$ |

Табл 2. Собственные значения для колебаний суперэллиптической пластинки, симметричных по $x$ и антисимметричных по $y$ ($p=10$, $M=24$)

| $N$ | $\lambda_1,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2,\ \sigma^2_{\min}$ |
|---|---|---|
| 18 | $3.22981314, 0.32\cdot10^{-10}$ | $5.02247602, 0.61\cdot10^{-9}$ |
| 19 | $3.22981312, 0.31\cdot10^{-10}$ | $5.02247607, 0.50\cdot10^{-9}$ |
| 20 | $3.22981316, 0.16\cdot10^{-10}$ | $5.02247601, 0.11\cdot10^{-9}$ |
| $N$ | $\lambda_3,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4,\ \sigma^2_{\min}$ |
| 18 | $5.89299354, 0.94\cdot10^{-8}$ | $6.96363117, 0.61\cdot10^{-7}$ |
| 19 | $5.89299346, 0.54\cdot10^{-8}$ | $6.96363001, 0.27\cdot10^{-7}$ |
| 20 | $5.89299359, 0.11\cdot10^{-8}$ | $6.96363035, 0.43\cdot10^{-8}$ |
| $N$ | $\lambda_5,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6,\ \sigma^2_{\min}$ |
| 18 | $8.46862759, 0.25\cdot10^{-6}$ | $8.90131359, 0.63\cdot10^{-6}$ |
| 19 | $8.46862616, 0.15\cdot10^{-6}$ | $8.90131535, 0.14\cdot10^{-6}$ |
| 20 | $8.46862502, 0.42\cdot10^{-8}$ | $8.90131318, 0.70\cdot10^{-8}$ |

Табл 3. Собственные значения для колебаний суперэллиптической пластинки, антисимметричных по $x$ и $y$ ($p=10$, $M=24$)

| $N$ | $\lambda_1,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2,\ \sigma^2_{\min}$ |
|---|---|---|
| 18 | $4.46970893, 0.93\cdot10^{-9}$ | $5.84092294, 0.50\cdot10^{-8}$ |
| 19 | $4.46970894, 0.54\cdot10^{-10}$ | $5.84092248, 0.38\cdot10^{-9}$ |
| 20 | $4.46970885, 0.38\cdot10^{-10}$ | $5.84092290, 0.33\cdot10^{-9}$ |
| $N$ | $\lambda_3,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4,\ \sigma^2_{\min}$ |
| 18 | $7.38116493, 0.11\cdot10^{-7}$ | $7.59565053, 0.37\cdot10^{-7}$ |
| 19 | $7.38116630, 0.77\cdot10^{-8}$ | $7.59565031, 0.38\cdot10^{-8}$ |
| 20 | $7.38116572, 0.49\cdot10^{-8}$ | $7.59565035, 0.25\cdot10^{-8}$ |
| $N$ | $\lambda_5,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6,\ \sigma^2_{\min}$ |
| 18 | $8.25794908, 0.64\cdot10^{-7}$ | $9.55885163, 0.81\cdot10^{-6}$ |
| 19 | $8.25794741, 0.52\cdot10^{-7}$ | $9.55885003, 0.30\cdot10^{-6}$ |
| 20 | $8.25794812, 0.26\cdot10^{-7}$ | $9.55884912, 0.72\cdot10^{-7}$ |

Табл 4. Собственные значения для колебаний суперэллиптической пластинки, антисимметричных по $x$ и симметричных по $y$ ($p=10$, $M=24$)

| $N$ | $\lambda_1,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2,\ \sigma^2_{\min}$ |
|---|---|---|
| 18 | $2.59855910, 0.31\cdot10^{-10}$ | $4.07967578, 0.44\cdot10^{-9}$ |
| 19 | $2.59855912, 0.22\cdot10^{-11}$ | $4.07967578, 0.18\cdot10^{-9}$ |
| 20 | $2.59855908, 0.25\cdot10^{-11}$ | $4.07967569, 0.99\cdot10^{-10}$ |
| $N$ | $\lambda_3,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4,\ \sigma^2_{\min}$ |
| 18 | $5.59834322, 0.13\cdot10^{-8}$ | $6.00685464, 0.47\cdot10^{-8}$ |
| 19 | $5.59834318, 0.14\cdot10^{-8}$ | $6.00685445, 0.23\cdot10^{-8}$ |
| 20 | $5.59834333, 0.50\cdot10^{-9}$ | $6.00685470, 0.39\cdot10^{-9}$ |
| $N$ | $\lambda_5,\ \sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6,\ \sigma^2_{\min}$ |
| 18 | $6.35996348, 0.26\cdot10^{-7}$ | $7.67856116, 0.13\cdot10^{-6}$ |
| 19 | $6.35996328, 0.25\cdot10^{-7}$ | $7.67856134, 0.13\cdot10^{-6}$ |
| 20 | $6.35996282, 0.73\cdot10^{-8}$ | $7.67856121, 0.26\cdot10^{-7}$ |

$$\sigma_j = c(\lambda_1 - s)^2 + d, \qquad j = 1,2,3. \qquad (28)$$

Тогда

$$\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1} = \frac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_2-2s)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_1-2s)},$$

откуда следует

$$s = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)g_1 - (\lambda_2+\lambda_3)g_2}{2(g_1+g_2)},$$

$$g_1 = \frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}; \qquad g_2 = \frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Мы получили точку вершины параболы. Далее определяем значение $\sigma_{\min}(s)$. Если окажется, что $\lambda_1<s<\lambda_2$, то переопределяем точки следующим образом:

$$\begin{gathered}\lambda_1=\lambda_1, \qquad \lambda_2=s, \qquad \lambda_3=\lambda_2,\\ \sigma_1=\sigma_1, \quad \sigma_2=\sigma_{\min}(s), \quad \sigma_3=\sigma_2,\end{gathered} \qquad (29)$$

и проводим через них снова параболу. Если окажется, что $\lambda_1>s>\lambda_2$, то переопределяем точки таким образом:

$$\begin{gathered}\lambda_1=\lambda_2, \qquad \lambda_2=s, \qquad \lambda_3=\lambda_3,\\ \sigma_1=\sigma_2, \quad \sigma_2=\sigma_{\min}(s), \quad \sigma_3=\sigma_3,\end{gathered} \qquad (30)$$

а далее действуем аналогично.

Будем уточнять точку минимума до тех пор, пока выполняется условие $|\lambda_2-s|<\varepsilon$, где $\varepsilon$ – напе-

Табл 5. Собственные значения для колебаний суперэллиптической пластинки, симметричных по $x$ и $y$ ($p=10$, $M=24$)

| $N$ | $\lambda_1$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2$, $\sigma^2_{\min}$ |
|---|---|---|
| 18 | $4.06667490, 0.43\cdot10^{-9}$ | $5.08328128, 0.78\cdot10^{-8}$ |
| 19 | $4.06667495, 0.50\cdot10^{-10}$ | $5.08328121, 0.52\cdot10^{-9}$ |
| 20 | $4.06667492, 0.54\cdot10^{-11}$ | $5.08328127, 0.13\cdot10^{-9}$ |
| $N$ | $\lambda_3$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4$, $\sigma^2_{\min}$ |
| 18 | $6.68938896, 0.48\cdot10^{-7}$ | $7.14809029, 0.94\cdot10^{-8}$ |
| 19 | $6.68938881, 0.71\cdot10^{-9}$ | $7.14809019, 0.13\cdot10^{-8}$ |
| 20 | $6.68938921, 0.10\cdot10^{-8}$ | $7.14809113, 0.15\cdot10^{-8}$ |
| $N$ | $\lambda_5$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6$, $\sigma^2_{\min}$ |
| 18 | $7.75769090, 0.11\cdot10^{-6}$ | $8.53666727, 0.35\cdot10^{-6}$ |
| 19 | $7.75769093, 0.19\cdot10^{-7}$ | $8.53666932, 0.21\cdot10^{-7}$ |
| 20 | $7.75769133, 0.19\cdot10^{-7}$ | $8.53666641, 0.87\cdot10^{-8}$ |

Табл 6. Собственные значения для колебаний эллиптической пластинки, симметричных по $x$ и антисимметричных по $y$ ($a=1$, $b=1.5$, $N=15$)

| $M$ | $\lambda_1$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2$, $\sigma^2_{\min}$ |
|---|---|---|
| 10 | $3.55726340, 0.18\cdot10^{-13}$ | $5.36787046, 0.70\cdot10^{-12}$ |
| 11 | $3.55726342, 0.21\cdot10^{-13}$ | $5.36787046, 0.30\cdot10^{-12}$ |
| 12 | $3.55726341, 0.32\cdot10^{-13}$ | $5.36787044, 0.39\cdot10^{-12}$ |
| $M$ | $\lambda_3$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4$, $\sigma^2_{\min}$ |
| 10 | $6.59952327, 0.14\cdot10^{-11}$ | $7.26517579, 0.89\cdot10^{-10}$ |
| 11 | $6.59952336, 0.84\cdot10^{-13}$ | $7.26517583, 0.16\cdot10^{-11}$ |
| 12 | $6.59952326, 0.12\cdot10^{-11}$ | $7.26517578, 0.45\cdot10^{-11}$ |
| $M$ | $\lambda_5$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6$, $\sigma^2_{\min}$ |
| 10 | $8.19747599, 0.11\cdot10^{-8}$ | $9.15462467, 0.16\cdot10^{-5}$ |
| 11 | $8.19747588, 0.19\cdot10^{-11}$ | $9.15462461, 0.11\cdot10^{-7}$ |
| 12 | $8.19747577, 0.34\cdot10^{-10}$ | $9.15462476, 0.16\cdot10^{-9}$ |

ред заданная точность ее определения. Как только оно перестает выполняться, запоминаем значения определенного корня и продолжаем цикл дальше: увеличиваем значение $\lambda$ и определяем следующий локальный минимум, а следовательно, собственные значения и собственные функции задачи (1), (2).

В качестве примера в табл. 1 – 5 приведены результаты расчета первых шести (из каждой серии по признаку симметрии относительно осей симметрии области) собственных значений задачи для суперэллиптической области при $p=10$.

В табл. 1 и 2 даны собственные значения для симметричных по $x$ и антисимметричных по $y$ собственных колебаний пластинки. При составлении табл. 1 использовано $N=15$ функций $f_k$ и разное количество $w_k$. Здесь и далее через запятую приведены собственное число $\lambda_j$ и соответствующий квадрат наименьшего собственного значения вспомогательной задачи (16), т. е. фактически точность удовлетворения ее краевого условия в среднеквадратичном смысле. Величины, приведенные в табл. 2, получены при большем числе учтенных координатных функций: как $w_k$ ($M=24$), так и $f_k$. Это дало возможность уточнить искомые собственные значения задачи и значительно повысить точность удовлетворения граничного условия.

Табл 7. Прочие собственные значения для колебаний эллиптической пластинки ($a=1$, $b=1.5$, $N=15$, $M=12$)

| антисимметричные по $x$ и симметричные по $y$ | |
|---|---|
| $\lambda_1$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $2.75918600, 0.19\cdot10^{-13}$ | $4.44170297, 0.10\cdot10^{-12}$ |
| $\lambda_3$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $5.86342728, 0.77\cdot10^{-12}$ | $6.31337881, 0.59\cdot10^{-13}$ |
| $\lambda_5$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $7.37961926, 0.62\cdot10^{-11}$ | $8.21440526, 0.14\cdot10^{-10}$ |
| антисимметричные по $x$ и $y$ | |
| $\lambda_1$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $5.03474568, 0.21\cdot10^{-12}$ | $6.66061523, 0.43\cdot10^{-11}$ |
| $\lambda_3$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $8.16601016, 0.34\cdot10^{-11}$ | $8.38676268, 0.68\cdot10^{-10}$ |
| $\lambda_5$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $9.72752868, -0.29\cdot10^{-10}$ | $10.14944236, 0.77\cdot10^{-9}$ |
| симметричные по $x$ и $y$ | |
| $\lambda_1$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_2$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $4.29402274, 0.81\cdot10^{-13}$ | $5.82934003, 0.85\cdot10^{-12}$ |
| $\lambda_3$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_4$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $7.43338331, -0.15\cdot10^{-11}$ | $7.51609942, -0.12\cdot10^{-10}$ |
| $\lambda_5$, $\sigma^2_{\min}$ | $\lambda_6$, $\sigma^2_{\min}$ |
| $8.93220891, 0.12\cdot10^{-10}$ | $9.26609345, 0.11\cdot10^{-9}$ |

Табл. 3 содержит собственные значения, соответствующие антисимметричным по обеим координатам колебаниям пластинки, в табл. 4 – антисимметричным по $x$ и симметричным по $y$, а в табл. 5 – симметричным по обеим координатам.

В табл. 6 представлены собственные значения задачи для эллиптической области с полуосями $a_0=1$ и $b_0=1.5$. Сравнивая данные табл. 1 и 6, легко заметить, что точность удовлетворения краевому условию в последней таблице значительно выше, хотя количество используемых координатных функций одинаково. Это можно объяснить большим значением кривизны границы суперэллиптической области. Не надо забывать, что в пределе, когда $p \to \infty$, суперэллиптическая область приближается к прямоугольной, для которой решения задачи (1), (2) имеют особенность в угловых точках.

Для полноты картины приведем результаты определения остальных собственных значений для этой же эллиптической области: табл. 7.

## ВЫВОДЫ

Как видно из приведенных таблиц, разработанный алгоритм дает возможность строить решения поставленной задачи с достаточно высокой степенью точности. Такая методика может быть применена для широкого класса односвязных областей, в том числе и для несимметричных. В последнем случае необходимо использовать в качестве системы координатных функций одновременно все подсистемы решений уравнений Гельмгольца. Преимуществом разработанной методики, наряду с высокой точностью построенных решений, является компактная аналитическая форма их представления. Таким образом, удается определить не только первые, но и более высокие собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи. Использование в качестве координатных функций других решений уравнений Гельмгольца даст возможность обобщить данную методику на более широкий класс форм упругих пластин.


1. *Ritz W.* Theorie der Transwersalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Ränden.– Paris: Gesammelte Werke, 1911.– 66 s.
2. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки.– М.: Гостехиздат, 1948.– 356 с.
3. *Altekin M.* Free linear vibration and buckling of super elliptical plates resting on symmetrically distributed point-supports on the diagonals // Thin-Wall. Struct.– 2008.– **46**.– P. 1066-1086.
4. *Liew K. M., Feng Z. C.* Three-dimensional free vibration analysis of perforated super elliptical plates via the p-Ritz method // Int. J. Mech. Sci.– 2001.– **43**.– P. 2613–2630.
5. *Zhou D., Lo S. H., Cheung Y. K., Au F. T. K.* 3-D vibration analysis of generalized super elliptical plates using Chebyshev – Ritz method // Int. J. Solids Struct.– 2004.– **41**.– P. 4697–4712.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.– М.: Наука, 1970.– 512 с.