УДК 519.21

Т.В. Пепеляева, Л.Б. Вовк, И.Ю. Демченко

Об одной задаче многономенклатурной модели теории запасов

Рассмотрена задача управления марковскими процессами с дискретным временем. Найдены условия существования оптимальной стратегии для многомерных пространства фазовых состояний и пространства принятия решений. На основе полученных результатов исследована многономенклатурная модель теории запасов. Доказано существование оптимальной (s, S)-стратегии управления запасами.

The control problem for Markov processes with the discrete time is considered. The existence conditions for the optimal strategy in the case of multidimensional phase and decision spaces are found. Based on the obtained results, the multi-task model in inventory control is investigated. The existence of the optimal (s, S)-strategy in inventory control is proved.

Розглянуто задачу керування марковськими процесами з дискретним часом. Знайдено умови існування оптимальної стратегії для випадку багатовимірних простору фазових станів та простору прийняття рішень. На основі отриманих результатів досліджено багатономенклатурну модель теорії запасів. Доведено існування оптимальної (s, S)-стратегії керування запасами.

Введение. В настоящей статье исследуется многономенклатурная модель теории управления запасами, описываемая с помощью (управляемых) марковских процессов с дискретным временем. В дискретные моменты времени наблюдается уровень запасов и принимается решение о его пополнении или непополнении. Уровень запаса каждого продукта, а также величина дозаказов принимают значения в R_+, причем уровень запасов каждого продукта системы ограничен сверху. Цель работы – поиск условий оптимальности (s,S)-стратегии для многономенклатурной модели управления запасами с функцией стоимости, определяемой издержками хранения запасов, стоимостью заказа продукции, а также с издержками, вызванными их дефицитом.

Общая теория управляемых марковских процессов с дискретным временем берет свое начало в работах [1, 2] по последовательному анализу, [3], в которой заложены основы теории динамического программирования, [4] по последовательным правилам принятия оптимальных решений. Дальнейшее развитие теория управляемых случайных процессов с дискретным временем получила благодаря работам [5–8] и других, когда фактически была создана теория управляемых случайных процессов для конечного множества состояний управлений. В дальнейшем задача оптимального управления для случая компактных фазового пространства и множества управлений изучалась в работах [9–11] и многих других. Представляет интерес применение достаточно развитой теории управляемых случайных процессов для поиска оптимальных стратегий при решении различных прикладных задач. Одна из таких – задача управления запасами, для которой актуально нахождение условий оптимальности широко известной в теории запасов (s, S)-стратегии. Для однономенклатурных задач теории запасов эта проблема рассмотрена в работах [12, 13] и ряде других.

Предварительные сведения из теории управляемых случайных процессов

Приведем некоторые сведения из теории управления случайными процессами, которые будут использоваться в данной статье. Рассмотрим управляемую систему со случайными воздействиями с дискретным временем. Фазовое пространство (пространство состояний) стохастического процесса $(X_n : n \in \mathrm{N})$, которое описывает развитие системы во времени, обозначим X, а пространство принимаемых решений – A. Пространства X и A – сепарабельные метрические пространства с борелевскими σ-алгебрами $\aleph$ и $\Im$ соответственно. Если в момент времени $n \in \mathrm{N}$ система находится в состоянии $x \in X$, принимается решение $D_n = a$, $a \in A_x \in \Im$, где A_x – набор допустимых дей-

Ключевые слова: марковские процессы, управление запасами, (s, S)-стратегия, критерий оптимальности, оптимальная стратегия.

ствий в состоянии x. Обозначим $A: X \to \Im$, $x \to A_x$ отображение, связывающее допустимый набор действий с данным состоянием системы. Примем, что $\Delta = \{(x,a),\ x \in X,\ a \in A_x\} \in \in (\aleph \times \Im)$ – борелевские подмножества пространства $X \times A$.

Случайная эволюция системы управляется множеством переходных вероятностей

$$P\{B \mid x_n, a_n\} = P\{X_{n+1} \in B \mid X_0 = x_0,\\ D_0 = a_0, ..., X_n = x_n, D_n = a_n\},$$

где $B \in \aleph$, $(x_k, a_k) \in \Delta$ и x_k – состояние системы в момент времени k, a_k – выбранное управление в момент времени k, $k \le n$.

Через $r(x,a)$ обозначим ожидаемые издержки (затраты) за один период, если система находится в состоянии x в начале периода и принимается решение $a \in A_x$. Положим, что функция $r(x,a)$ – ограниченная измеримая функция на Δ, $|r(x,a)| \le C < \infty$, $(x,a) \in \Delta$, для некоторого $0 < C < \infty$. Общей допустимой стратегией управления системой будет последовательность $\delta = \{\delta_0, \delta_1, ..., \delta_n, ...\}$ переходных вероятностей такая, что вероятностная мера $\delta_n(\cdot \mid x_0, a_0, ..., x_n)$ на $(A, \Im)$ сосредоточена на A_{x_n}.

Стратегия δ называется стационарной марковской, если $\delta_n(\cdot \mid x_0, a_0, ..., x_n) = \delta(\cdot \mid x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Стационарная марковская стратегия будет детерминированной, если мера $\delta(\cdot \mid x)$ сосредоточена в точке для любого $x \in X$. Обозначим через $\delta(x)$ точку концентрации массы $\delta(\cdot \mid x)$.

Пусть $\Re$ – класс допустимых стратегий и $\Re_1$ – класс стационарных марковских детерминированных стратегий. Для оценивания выбранной стратегии запишем критерий оптимальности как средние ожидаемые издержки стратегии δ

$$\varphi(x,\delta) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^{\delta} \sum_{k=0}^{n} r(X_k, D_k).$$

Стратегия δ^* оптимальна (φ-оптимальна [9]) относительно этого критерия, если $\varphi(x,\delta^*) = = \inf_{\delta\in\Re} \varphi(x,\delta)$.

Обозначим $\Xi(X)$ банахово пространство ограниченных измеримых по Борелю функций на X с нормой $\|u\| = \sup_{x\in X} |u(x)|$. В дальнейшем понадобится следующий результат [9].

Теорема 1. Пусть пространство действий A компактно и отображение $A: X \to \Im$, $x \to A_x$ полунепрерывно сверху. Пусть существует мера μ на $(X, \aleph)$, $\mu(X) > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$P\{B \mid x\} \ge \mu(B),\ (x,a) \in \Delta,\ B \in \aleph.$$

Пусть также на множестве Δ выполнены условия:

1) функция стоимости $r(x,a)$ полунепрерывна снизу на (x,a);

2) вероятность перехода $P(\cdot \mid x,a)$ слабо непрерывна в (x,a).

Тогда в классе $\Re_1$ существует стационарная детерминированная φ-оптимальная стратегия с минимальной стоимостью

$$W = \int V(x)\mu(dx),$$

где $V(x)$ – единственная в $\Xi(X)$ и определяется решением уравнения оптимальности

$$V(x) = \inf_{a\in A_x} \left\{ r(x,a) + \int V(x) P'(dy \mid x,a) \right\},\ x \in X,$$

где $P'(B \mid x,a) = P(B \mid x,a) - \mu(B)$, $B \in \aleph$.

Замечание 1. Данная теорема уместна для функций издержек со значениями в $[0,\infty)$, которые необходимо минимизировать. В [9] приведены условия максимизации вознаграждения (дохода) $r(x,a)$ за один период, если система находится в состоянии x, и принято решение $a \in A_x$. Здесь теорема 1 переформулирована с использованием отрицательной $r_1(x,a) = -r(x,a)$.

Управление системой с многомерными фазовым пространством и пространством принятия решений

Рассмотрим модель управления системой, у которой пространство состояний – декартово произведение m множеств, т.е. $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \ldots \times X_m$. Пространство принимаемых решений $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$.

Для каждой пары $x_i \in X_i$, $a_i \in A_i$ обозначим $r_i(x_i, a_i)$ – ожидаемые издержки (затраты) за один период, если *i*-я подсистема находится в состоянии x_i в начале периода, и принимается решение $a_i \in A_i$.

Пусть ожидаемые издержки всей системы за один период $r(x,a)$, где $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$, – сепарабельна, т.е. имеет вид

$$r(x,a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i, a_i).$$

Далее будем считать, что пространства X_i, A_i, $i = 1,...,m$ и функции $r_i(x_i, a_i)$ удовлетворяют соответствующим условиям из предыдущего раздела.

Тогда критерий φ-оптимальности данной стратегии запишем так:

$$\varphi(x, \delta) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^{\delta} \sum_{k=0}^{n} r(X_k, D_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^{\delta} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i^k, d_i^k),$$

где $X_k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_m^k)$ – состояние системы в момент времени k, $D_k = (d_1^k, d_2^k, ..., d_m^k)$ – выбранное управление в момент времени k.

Обозначим $\Xi_1(X)$ – банахово пространство ограниченных измеримых по Борелю функций на X с нормой $v(x) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x_i \in X_i} |v_i(x_i)|$.

Теорема 2. Пусть A – компактное пространство и отображение $A: X \to 2^A$ полунепрерывно сверху, пусть существует

$$\mu_i(X_i) > 0 \text{ на } (X, \aleph),\ i = \overline{1,m}:$$

$$\mu_i(X_i) \le Q_i(B_i / x_i, a_i),\ B_i \in \aleph,\ i = \overline{1,m}.$$

Пусть также выполнены следующие условия:

1) функции $r_i(x_i, a_i)$ полунепрерывны снизу на (x_i, a_i);

2) переходные вероятности $Q_i(B_i / x_i, a_i)$ слабо непрерывны на (x_i, a_i).

Тогда в классе стационарных марковских детерминированных стратегий существует оптимальная стратегия с минимальной стоимостью

$$W = \int V(x)\mu(dx),$$

где $V = \inf_{a\in A}\left\{ r(x,a) + \int_X V(y) Q'(dy / x,a) \right\} =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \inf_{a_i \in A_i} \{ r_i(x_i, a_i) + \int_{X_i} V_i(y_i) [Q_i(dy_i / x_i, a_i) -$$

$$- \mu_i(dy_i) \prod_{j=1, j\ne i}^{m} \mu_j(x_j)]\}.$$

Доказательство. Из условия 1) теоремы вытекает, что $r(x, a)$, – полунепрерывна на (x, a) как сумма полунепрерывных снизу функций. Из условия 2) теоремы вытекает, что $Q = Q_1 \times \times Q_2 \times \ldots \ldots \times Q_m$ – слабо непрерывна.

Тогда условие теоремы 1 выполняется и φ-оптимальная стратегия существует с минимальной стоимостью

$$W = \int V(x)\mu(dx),$$

где $V = \inf_{a\in A}\left\{ r(x,a) + \int_X V(y) Q'(dy / x,a) \right\}$, $x \in X$,

когда $Q'(B / x,a) = Q(B / x,a) - \mu(B)$, $B \in \aleph$.

Условия 1) и 2) теоремы дают выполнение условий теоремы 1 для каждой *i*-й подсистемы, согласно которой существует оптимальная стратегия для каждой *i*-й подсистемы ($i = 1, \ldots, m$) с минимальной стоимостью $W_i = \int V_i(x)\mu_i(dx)$, $i = \overline{1,m}$, где

$$V_i(x_i) = \inf_{a_i\in A_i}\left\{ r_i(x_i, a_i) + \int_{X_i} V_i(y) Q_i'(dy_i / x_i, a_i) \right\} =$$

$$= \inf_{a_i\in A_i} \{ r_i(x_i, a_i) +$$

$$+ \int_{X_i} V_i(y_i) \left[Q_i(dy_i / x_i, a_i) - \mu_i(dy_i) \prod_{j=1, j\ne i}^{m} \mu_j(x_j) \right] \Big\},$$

$$x_i \in X_i.$$

В силу сепарабельности функций $r(x, a)$, $x \in X$, $a \in A$ имеем

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} \sup V_i(x_i) = \sum_{i=1}^{m} \inf_{a_i\in A_i} \{ r_i(x_i, a_i) +$$

$$+ \int_{X_i} V_i(y_i) \left[Q_i(dy_i / x_i, a_i) - \mu_i(dy_i) \prod_{j=1, j\ne i}^{m} \mu_j(x_j) \right] \Big\}.$$

Теорема доказана.

Многономенклатурные модели управления запасами

Рассмотрим систему управления запасами m продуктов, каждый из которых может непрерывно пополнятся. Предположим Q_i – максимальный уровень запаса i-го продукта, тогда запас его принимает значение на $[0, Q_i]$.

В дискретные моменты времени N проверяется состояние запасов каждого продукта и принимаются соответствующие решения о пополнении складов следующим образом.

Если уровень запасов i-го продукта в момент времени $n \in N$ $X_i^n = x_i \in [0, Q_i]$, то поступает заказ этого продукта $D_i^n \in A_i^x$, $A_i^x := [0, Q_i - x_i]$.

Тогда пространство состояний системы, описывающее развитие системы во времени, обозначим $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$, $X_i = [0, Q_i]$, $X = (X^n : n \in \mathrm{N})$. Пространство принимаемых решений обозначим $A = A_1^x \times A_2^x \times ... \times A_m^x$.

В момент времени $(n+)$ по каждому i-му продукту поступает случайное требование ξ_i^n и $\xi_i = (\xi_i^n : n \in \mathrm{N})$, $i = \overline{1, m}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения $G_i(x)$, $x \geq 0$, $i = \overline{1, m}$.

Обозначим $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$, будем считать, что $\xi_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_m^n)$, $n \in N$ не зависят от истории системы до момента времени n включительно и что $G_i(x) < 0$, $G(x) = G_1(Q_1) \times \ldots \times G_m(Q_m)$, $Q = (Q_1, ..., Q_m)$, а также $G_i(\cdot)$ непрерывны.

Требование по i-му товару, поступившее в момент времени $(n+)$, удовлетворяется (если это возможно) из запаса этого продукта $X_i^n + D_i^n$, который имеется в конце интервала времени $[n, n+1)$. Система такова, что дефицит или частичный дефицит какого-либо из m продуктов приводит к потере, а не откладыванию требования.

Итак, следующее уравнение описывает эволюцию процесса запаса системы

$$X^{n+1} = (X^n + D^n - \xi^n)_+, \; n \in \mathrm{N},$$

где $(a)_+ = \max(a, 0)$ – положительная часть $a \in R_+$, или по каждому i-му продукту $(i = \overline{1, m})$

$$X_i^{n+1} = (X_i^n + D_i^n - \xi_i^n)_+, \; n \in \mathrm{N}, \; i = \overline{1, m}.$$

Модель управления запасами системы учитывает стоимость запаса (которая может включать в себя издержки производства), стоимость хранения и дефицит для каждого i-го продукта. Издержки хранения уровня запаса x_i i-го продукта в единицу времени составляют $C_i^1(x_i)$, $C_i^1 : [0, Q_i] \to \mathrm{R}_+$, а стоимость заказа продукции в размере x_i для i-го товара составляет $C_i^2(x_i)$, $C_i^2 : [0, Q_i] \to \mathrm{R}_+$, издержки, вызванные дефицитом, составляют $C_i^3(x_i)$, если требования x_i не могут быть выполнены $x \geq 0$, $G_i : R_+ \to R_+$.

Предположим:

- C_i^1, C_i^2, C_i^3, $i = \overline{1, m}$ – монотонные неубывающие неотрицательные функции;
- $C_i^3(x_i)$, $x_i \in [0, \infty)$ удовлетворяет $C_i^3(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$, $\int_0^\infty C_i^3(y) dG_i(y) < \infty$.

Для системы, находящейся в состоянии x в начале периода, при принятии решения $a \in A$ ожидаемые издержки за один период составляют $r(x, a) = \sum_{i=1}^m r_i(x_i, a_i)$, где $r_i(x_i, a_i)$ – ожидаемые издержки по i-му продукту за один временной период, если состояние данного продукта равно x_i, и в начале периода принято решение d^{a_i}:

$$r_i(x_i, d^0) = C_i^1(x_i) + \int_{x_i}^\infty C_i^3(y - x_i) dG_i(y), \; i = \overline{1, m},$$

и для $a_i > 0$

$$r_i(x_i, d^{a_i}) = C_i^1(x_i + a_i) + C_i^2(a_i) + \\ + \int_{x_i + a_i}^\infty C_i^3\big(y - (x_i + a_i)\big) dG_i(y), \; i = \overline{1, m}.$$

Вероятность перехода на X_i для любого борелевского подмножества $[0, Q_i]$ задается:

$$P\left(\left[y_i^1, y_i^2\right]/x_i, d^{a_i}\right) =$$
$$= G_i(x_i + a_i - y_i^1) - G_i(x_i + a_i - y_i^2),$$
$$a_i \in [0, Q_i - x_i],\ 0 \le y_i^1 \le y_i^2 \le x_i + a_i,$$
$$P\left(\{0\}/x_i, d^{a_i}\right) = 1 - G_i(x_i + a_i -),\ x_i \in [0, Q_i].$$

Вероятность перехода системы $P\left(B/x, d^a\right) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i/x_i, d^{a_i})$, где B_i – борелевские подмножества $[0, Q_i]$.

Теорема 3. Пусть функции $C_i^1, C_i^2, C_i^3, i = \overline{1,m}$ – полунепрерывны снизу. Тогда для модели управления в классе $\Re$ всех допустимых стратегий существует φ-оптимальная стратегия с минимальной стоимостью $W = \int V(x)\mu(dx)$.

Здесь $\mu(\cdot) = \mu_1(\cdot) \ldots \mu_m(\cdot)$, $\mu_i(\cdot)$ – мера, сконцентрированная в точке 0 с весом $\overline{G_i} = 1 - G(x)$, $i = \overline{1,m}$, $\overline{G} = \overline{G_1} ... \overline{G_m}$, а $V(x)$ – удовлетворяет уравнению оптимальности

$$V(x) = LV(x) = \sum_{i=1}^{m} \min_{a \in A} \Big\{ \Big[C_i^1(x_i) +$$
$$+ \int_{x_i}^{\infty} C_i^3(y - x_i) dG_i(y) + C_i^1(x_i + a_i) + C_i^2(a_i) +$$
$$+ \int_{x_i + a_i}^{\infty} C_i^3(y - (x_i + a_i)) dG_i(y) \Big] +$$
$$+ \int_{X_i} V_i(y_i)[P(dy_i/x_i, a_i) - \mu_i(dy_i) \prod_{j=1,\, j \ne i}^{m} \mu_j(x_j)] \Big\}.$$

Доказательство. Применим теорему 2 о существовании φ-оптимальной стратегии, принадлежащей классу детерминированных (марковских) стратегий, для которых достигается минимальное значение издержек $W = \int V(x)\mu(dx)$. Проверим выполнение предположений этой теоремы.

• Пусть $A : [0, Q_1] \times ... \times [0, Q_m] \to \Im$ – отображение, которое связывает с каждым состоянием x набор допустимых решений $A^* \in \Im$. Тогда A – полунепрерывна сверху. Действительно, если для x, $x^n \in X = [0, Q_1] \times ... \times [0, Q_m]$,

$$a^n = (a_1^n, ..., a_m^n) \in A^{x^n} = [0, Q_1 - x_1^n] \times ... \times [0, Q_m - x_m^n]$$
$$\lim_{x \to \infty} x^n = x = (x_1, ..., x_m),\ \lim_{a \to \infty} a^n = a = (a_1, ..., a_m),$$

тогда в пределе $(0,...,0) \le (a_1, ..., a_m) \le (Q_1 - x_1, ..., Q_m - x_m)$, т.е. $a \in A^x$. Поэтому A – полунепрерывна сверху.

• Докажем, что функции $r_i(x_i, a_i)$ полунепрерывны снизу. В соответствии с предположением, функции C_i^1, C_i^2, C_i^3, $i = \overline{1,m}$ – полунепрерывны снизу. Из определения для $r(\cdot,\cdot)$ достаточно доказать полунепрерывность снизу

$$\int_{x_i + a_i}^{\infty} C_i^3(y - (x_i + a_i)) dG_i(y) \text{ по } (x_i, a_i).$$

Введем случайный процесс

$$\eta_i(z_i) = \begin{cases} \xi_i - z_i, \xi_i > z_i \\ 0, \quad \xi_i \le z_i \end{cases}, \quad z_i \in [0, Q_i].$$

Тогда

$$u_i(x_i, a_i) =$$
$$= \int_{x_i + a_i}^{\infty} C_i^3\left(y - (x_i + a_i)\right) dG_i(y) = EC_i^3\left(\eta_i(x_i + a_i)\right).$$

Процесс $\eta_i(z_i)$ имеет непрерывную траекторию на $[0, Q_i]$. По лемме Фату получаем $\lim_{(x_i', a_i') \to (x_i', a_i')} \inf Eu_i(x_i', a_i') \ge E \lim_{(x_i', a_i') \to (x_i', a_i')} \inf Eu_i(x_i', a_i') \ge Eu_i(x_i, a_i)$ для любых $(x_i', a_i'), (x_i, a_i)$, то функция $\int_{x_i + a_i}^{\infty} C_i^3(y - (x_i + a_i)) dG_i(y)$, и, следовательно, функции $r_i(x_i, a_i)$, $i = \overline{1,m}$ полунепрерывны снизу.

• Слабая непрерывность вероятностей перехода $P_i(B_i/x_i, a_i)$ следует из их определения.

• Ограниченность выигрыша $r_i(x_i, a_i)$, $i = \overline{1,m}$ следует из ограниченности C_i^1, C_i^2, C_i^3, $i = \overline{1,m}$.

Теперь рассмотрим задачу определения структуры оптимальной стратегии при условиях теоремы 3, которые далее считаются выполненными. Известно, что для многих систем управления запасами оптимальна стратегия, для которой существует такой основной уровень запасов S, что после заказа оптимальный уровень запаса приближается к S. Так как есть возможность заказать любое количество продукта, то уровень S в точности достигается. Далее обычно доказывается оптимальность (s, S)-стратегии: заказ на пополнение продукта проводится только, когда уровень запаса меньше s.

Далее используем результаты, полученные в [13] для задачи управления запасами системы с одним видом продукции.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть для любого $x_i \in X_i$

$$L_i(a_i, x_i) = C_i^1(x_i + a_i) +$$

$$+ \int\limits_{x_i+a_i}^{\infty} C_i^3\big(y - (x_i + a_i)\big) dG_i(y) + C_i^2(a_i)$$

монотонно убывает по $a_i \in (0, Q_i - x_i]$. Тогда $V_i(x_i)$ монотонно убывает по $x_i \in X_i$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и леммы 1, и при этом

$$\tilde{L}_i(x) = C_i^1(x_i) + \int\limits_{x_i}^{\infty} C_i^3\big(y - x_i\big) dG_i(y) - C_i^2(Q_i - x_i),$$

$$x_i \in [0, Q_i),$$

монотонно убывает по $x_i \in [0, Q_i)$.

Тогда оптимальная стратегия $\delta_i^* \in \Re_i^1$ ($\Re_i^1$ – класс стационарных марковских детерминированных стратегий для i-го продукта) для задачи управления запасов имеет вид:

существует порог $x_i^* \in [0, Q_i)$ такой, что

$$\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i}, & x_i < x_i^*; \\ d_0 & , x_i \ge x_i^*. \end{cases}$$

Замечание 2. Лемма 1 и теорема 4 приведены в обозначениях настоящей статьи и с учетом того, что в данной модели вероятность выполнения заказа для каждого продукта равна единице.

Докажем для многономенклатурной системы запасов следующий результат.

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 3, а также следующие условия:

- $\forall x_i \in X_i \quad L_i(a_i, x_i) = C_i^1(x_i + a_i) \ +$

$$+ \int\limits_{x_i+a_i}^{\infty} C_i^3\big(y - (x_i + a_i)\big) dG_i(y) + C_i^2(a_i)$$

монотонно убывают по $a_i \in (0, Q_i - x_i]$;

- $\tilde{L}_i(x_i) = C_i^1(x_i) + \int\limits_{x_i}^{\infty} C_i^3\big(y - x_i\big) dG_i(y) -$

$$- C_i^2(Q_i - x_i), \ x_i \in [0, Q_i)$$

монотонно убывает по $x_i \in [0, Q_i)$.

Тогда φ-оптимальная стратегия $\delta^* \in \Re_1$ для задачи управления запасов имеет вид:

существует порог $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_m^*\right) \in [0, Q_1] \times \ldots$ $\ldots \times [0, Q_m]$ такой, что $\delta^* = (\delta_1^*, ..., \delta_m^*)$ и для $i = \overline{1, m}$ $\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i}, x_i < x_i^*; \\ d_0 \quad , x_i \ge x_i^*. \end{cases}$

Доказательство. Условия данной теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 4, которая задает структуру оптимальной стратегии δ_i^*, $i = \overline{1, m}$ по каждому i-му товару, т.е. $\varphi_i(x_i, \delta_i^*) = \inf\limits_{\delta_i \in \Re_i} \varphi_i(x_i, \delta_i)$, $\varphi_i(x_i, \delta_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup \dfrac{1}{n+1} \times$ $\times E_x^\delta \sum\limits_{k=0}^{n} r(x_i^k, d_i)$, где φ_i– средняя ожидаемая стоимость стратегии δ_i, $\Re_i$ – класс допустимых стратегий для i-го товара, $i = \overline{1, m}$.

Поскольку

$$\varphi(x, \delta) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} r(X_k, D_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n+1} E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i^k, d_i^k) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i, \delta_i),$$

$$\text{т.е. } \varphi(x, \delta^*) = \inf_{\delta\in\Re} \varphi_i(x, \delta) = \inf_{\delta\in\Re} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i, \delta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \inf_{\delta_i\in\Re_i} \varphi_i(x_i, \delta_i) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i, \delta_i^*),$$

то теорема доказана.

Заключение. Найдены условия существования оптимальной стратегии в классе стационарных марковских стратегий в случае многомерных фазового пространства и пространства принятия решений. Рассмотренная многономенклатурная модель управления запасами учитывает стоимость заказа продуктов, стоимость хранения и издержки, вызванные их дефицитом. Найдены условия существования оптимальной стратегии для данной модели. Также определена структура оптимальной стратегии при выполненных условиях оптимальности. Используемый при этом математический аппарат – теория управляемых марковских процессов с дискретным временем.

1. *Wald A*. Sequential analysis: – New York: Wiley, 1947. – 212 p.
2. *Wald A*. Statistical decision functions. – Ibid, 1950. – 179 p.
3. *Bellman R*. Dynamic Programming. – N. J., Princeton: Princeton Univ. Press, 1957. – 342 p.
4. *Михалевич В.С.* Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля // Теория вер. и ее применения. – 1956. – **1**, N 4. – С. 395–421.
5. *Fleming W*. Some Marcovian optimization problems. // J. Math. and Mech. – 1963. – **12**, N 1. – P. 131–140.
6. *Новард Р.А*. Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1964. – 192 с.
7. *Висков О.В*., *Ширяев А.Н*. Об управлениях, приводящих к оптимальным стационарным режимам// Тр. МИАН, Сб. ст. по теории вероятностей, 1964. – LXXI. – С. 35–45.
8. *Blackwell D*. Discounted dynamic programming // Ann. Math. Statist. – 1965. – **36**. – P. 226–235.
9. *Gubenko L.G*., *Statland E.S*. On controlled Markov processes in discrete time // Theory Probab. and Math. Statistics. – 1975. – **7**. – P. 47–61.
10. *Дынкин Е.Б*., *Юшкевич А.А*. Управляемые марковские процессы и их приложения. – М.: Наука, 1975. – 338 с.
11. *Höbner G*. Stochastische dynamische Optimierung // Lect. Notes: Fachbereich Math. – Hamburg: Univ. Hamburg, 1981. – 137 p.
12. *Veinott A.F*. On optimality of (*s*, *S*)-policiek. New conditions and new proof. // SIAM J. Appl. Math. – 1966. – **14**. – P. 1067–1083.
13. *Дадуна Г*., *Кнопов П.С*., *Тур Л.П*. Оптимальные стратегии для системы запасов с функциями стоимости общего вида // Кибернетика и системный анализ. – 1999. – № 4. – P. 106–123.

Поступила 23.12.2014

Тел. для справок: +38 044 526-1558 (Киев)

●