УДК 004.942

Я. А. Калиновский
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Исследование симметрий оператора изоморфизма гиперкомплексных числовых систем и их использование для синтеза алгоритмов быстрого вычисления циклической свертки

Представлены результаты исследований симметрий оператора изоморфизма гиперкомплексных числовых систем. Использование этих изоморфизмов позволило синтезировать алгоритмы быстрого вычисления циклической свертки числовых массивов длиной 2^n с пониженным количеством вещественных операций.

Ключевые слова: *циклическая свертка, гиперкомплексная числовая система, изоморфизм, базис, количество операций.*

Введение и постановка задачи

Циклическая свертка дискретных сигналов, наряду с линейной, является наиболее общей вычислительной процедурой в области цифровой обработки сигналов. Методы построения алгоритмов вычисления циклической свертки больших числовых массивов основаны на многоуровневой декомпозиции задачи на совокупность задач вычисления свертки очень коротких массивов. Поэтому весьма актуальной является задача снижения количества вещественных операций именно в случаях свертки коротких массивов, что является целью данной работы. Представленные исследования являются продолжением исследований, выполненных в работах [4, 5].

В данной работе используются те же обозначения, что и в [4, 5]. Особенно это касается обозначений различных гиперкомплексных числовых систем (ГЧС), используемых для построения алгоритмов быстрого вычисления циклической свертки, а также циклически сдвинутым элементам числового массива Y. Здесь, как и в [5], ведем следующие обозначения:

— $Y^{(\nu)} \in W^{(n)}(e,2^n)$ — гиперкомплексное число, соответствующее сдвинутому на ν отсчетов числовому массиву;

— $Y_1^{(\nu)} \in W_1^{(n)}(f,2^n)$ — его образ в $W_1^{(n)}(f,2^n)$;

— $Y_1^{(\nu)}[k]$ — k-й компонент образа.

Симметрии оператора изоморфизма систем $W^{(n)}(e,2^n)$ в $W_1^{(n)}(f,2^n)$ при циклическом сдвиге преобразуемого числа

Симметрии, существующие в операторе изоморфизма систем $W^{(n)}(e,2^n)$ в $W_1^{(n)}(f,2^n)$, позволяют уменьшить количество операций при вычислении циклической свертки числовых последовательностей.

Для их выявления рассмотрим процесс построения оператора изоморфизма $L(\{e\},\{f\})$ базисов систем $W^{(n)}(e,2^n)$ и $W_1^{(n)}(f,2^n)$. Оператор изоморфизма $L^{(n)}(\{e\},\{f\})$, который строится на *n*-м этапе удвоения, представляет собой процесс рекуррентного построчного умножения оператора

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1 + f \\ e_2 = f_1 - f_2 \end{cases} \tag{1}$$

на оператор, полученный на предыдущем этапе. Символически это можно представить так:

$$L^{(n)} = \begin{Bmatrix} (e_0+e_1)\cdot L^{(n-1)} \\ (e_0-e_1)\cdot L^{(n-1)} \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Такое рекуррентное построение оператора преобразования базиса вносит определенные закономерности в его структуру в смысле чередования знаков в каждой строке. При этом следует учесть, что гиперкомплексные числа в системах $W^{(n)}(e,2^n)$ и $W_1^{(n)}(f,2^n)$ преобразуются по таким же законам. Будем при умножении в (2) придерживаться такого правила: сначала умножается строка оператора на первое слагаемое, потом на второе, и линейно нумеруются полученные элементы удвоенного базиса.

При таком удвоении оператора первые четыре компоненты 2^n-мерного оператора будут иметь вид:

$$\begin{aligned} e_1 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{2^n-4} + f_{2^n-3} + f_{2^n-2} + f_{2^n-1}, \\ e_2 &= f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \ldots + f_{2^n-4} - f_{2^n-3} + f_{2^n-2} - f_{2^n-1}, \\ e_3 &= f_0 + f_1 - f_2 - f_3 + \ldots + f_{2^n-4} + f_{2^n-3} - f_{2^n-2} - f_{2^n-1}, \\ e_4 &= f_0 - f_1 - f_2 + f_3 + \ldots + f_{2^n-4} + f_{2^n-3} - f_{2^n-2} - f_{2^n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Из (3) можно записать, например, такие соотношения для сдвинутых числовых последовательностей:

$$Y_1^{(v)}[0] = Y_1^{(0)}[0], \tag{4}$$

где $Y_1^{(0)}[0]$ — компонент образа числа, соответствующий несдвинутой последовательности (нулевой сдвиг):

$$Y_1^{(\nu)}[1] = (-1)^{\nu} Y_1^{(0)}[0], \tag{5}$$

$$Y_1^{(\nu=2k)}[2] = Y_1^{(0)}[2], \tag{6}$$

$$Y_1^{(\nu=2k)}[3] = Y_1^{(0)}[3]. \tag{7}$$

Соотношений такого типа может быть и гораздо больше, но проследить этот процесс в общем виде достаточно тяжело. Гораздо проще это проделать для конкретных размерностей, что приведено ниже.

Ценность соотношений типа (4)–(7) заключается в том, что если $Y_1^{(\nu)}[i] = Y_1^{(\mu)}[i]$, $\iota > \mu$, то $X_1[i]\cdot Y_1^{(\nu)}[i] = X_1[i]\cdot Y_1^{(\mu)}[i]$, то есть произведение $X_1[i]\cdot Y_1^{(\nu)}[i]$ уже вычислено для одного из предыдущих сдвигов, то это умножение не требуется.

Алгоритм циклической свертки с использованием симметрии оператора изоморфизма в случае $2^n = 4$

Рассмотрим случай циклической свертки числовых последовательностей длиной $2^n = 4$. Будем рассматривать элементы последовательностей $X = \{x[0], x[1], x[2], x[3]\}$ и $Y = \{y[0], y[1], y[2], y[3]\}$ как компоненты гиперкомплексных чисел ГЧС $W^{(2)}(e,4)$:

$$X = x[0]e_0 + x[1]e_1 + x[2]e_2 + x[3]e_3,$$
$$Y = y[0]e_0 + y[1]e_1 + y[2]e_2 + y[3]e_3.$$

Тогда в соответствии с таблицей умножения ГЧС

$$XY = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i e_i,$$

а компоненты α_i:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= x[0]y[0] + x[1]y[1] + x[2]y[2] + x[3]y[3],\\
\alpha_1 &= x[0]y[1] + x[1]y[0] + x[2]y[3] + x[3]y[2],\\
\alpha_2 &= x[0]y[2] + x[1]y[3] + x[2]y[0] + x[3]y[1],\\
\alpha_3 &= x[0]y[3] + x[1]y[2] + x[2]y[1] + x[3]y[0].
\end{aligned} \tag{8}$$

Циклическая свертка этих числовых последовательностей будет иметь четыре отсчета [3]:

$$\begin{aligned} z[0] &= x[0]y[0] + x[1]y[1] + x[2]y[2] + x[3]y[3], \\ z[1] &= x[0]y[1] + x[1]y[2] + x[2]y[3] + x[3]y[0], \\ z[2] &= x[0]y[2] + x[1]y[3] + x[2]y[0] + x[3]y[1], \\ z[3] &= x[0]y[3] + x[1]y[0] + x[2]y[1] + x[3]y[2]. \end{aligned} \tag{9}$$

Сравнивая (8) и (9), можно установить, что два отсчета свертки совпадают с компонентами произведения (8), а именно:

$$z[0] = \alpha_0, \; z[2] = \alpha_2 . \tag{10}$$

Но для их вычисления требуется 4 умножения и 8 сложений, а, кроме того, еще необходимо вычислить оставшиеся два отсчета.

Перейдем из ГЧС $W^{(2)}(e,4)$ в изоморфную диагональную ГЧС $W_1^{(2)}(f,4)$. Для этого запишем изоморфные преобразования в матричной форме:

$$X_1 = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{vmatrix}, \quad Y_1^{(0)} = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1^{(0)}[0] \\ Y_1^{(0)}[1] \\ Y_1^{(0)}[2] \\ Y_1^{(0)}[3] \end{vmatrix},$$

перемножим покомпонентно, как это следует из таблицы умножения ГЧС $W_1^{(2)}(f,4)$, и получим матрицу-столбец:

$$A^{(0)} = \begin{vmatrix} A^{(0)}[0] \\ A^{(0)}[1] \\ A^{(0)}[2] \\ A^{(0)}[3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1[0] \cdot Y_1^{(0)}[0] \\ X_1[1] \cdot Y_1^{(0)}[1] \\ X_1[2] \cdot Y_1^{(0)}[2] \\ X_1[3] \cdot Y_1^{(0)}[3] \end{vmatrix} . \tag{11}$$

Совершая обратный переход от $W_1^{(2)}(f,4)$ к $W^{(2)}(e,4)$ и не выписывая короткие операции, получим с учетом (10):

$$\begin{aligned} z[0] &= (X_1[0] \cdot Y_1^{(0)}[0] + X_1[1] \cdot Y_1^{(0)}[1]) + (X_1[2] \cdot Y_1^{(0)}[2] + X_1[3] \cdot Y_1^{(0)}[3]), \\ z[2] &= (X_1[0] \cdot Y_1^{(0)}[0] + X_1[1] \cdot Y_1^{(0)}[1]) - (X_1[2] \cdot Y_1^{(0)}[2] + X_1[3] \cdot Y_1^{(0)}[3]). \end{aligned} \tag{12}$$

На эти вычисления требуется 4 умножения и 4 сложения.

Преобразуем числовую последовательность Y путем циклического сдвига в последовательность $Y^{(1)} = \{y[1], y[2], y[3], y[0]\}$. Тогда (8) примет вид:

$$\begin{aligned}\alpha_0^{(1)} &= x[0]y[1] + x[1]y[2] + x[2]y[3] + x[3]y[0],\\ \alpha_1^{(1)} &= x[0]y[2] + x[1]y[1] + x[2]y[0] + x[3]y[3],\\ \alpha_2^{(1)} &= x[0]y[3] + x[1]y[0] + x[2]y[1] + x[3]y[2],\\ \alpha_3^{(1)} &= x[0]y[0] + x[1]y[3] + x[2]y[2] + x[3]y[1].\end{aligned} \tag{13}$$

Сравнивая (9) и (13), можно установить, что два отсчета свертки совпадают с компонентами произведения (13), а именно:

$$z[1] = \alpha_0^{(1)}, \quad z[3] = \alpha_2^{(1)}. \tag{14}$$

Таким образом, нужно найти компоненты $\alpha_0^{(1)}, \alpha_2^{(1)}$ произведения $XY^{(1)}$. Ищем его, как и в предыдущем случае:

$$Y_1^{(1)} = \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1^{(1)}[0] \\ Y_1^{(1)}[1] \\ Y_1^{(1)}[2] \\ Y_1^{(1)}[3] \end{vmatrix}.$$

Но из симметричности оператора изоморфизма следует (сравните с (4) и (5)):

$$Y_1^{(1)}[0] = Y_1^{(0)}[0]; \quad Y_1^{(1)}[1] = -Y_1^{(0)}[1]; \quad Y_1^{(1)}[2] = -Y_1^{(0)}[3]; \quad Y_1^{(1)}[3] = Y_1^{(0)}[2].$$

Поэтому равенство (11) примет вид:

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} A^{(1)}[0] \\ A^{(1)}[1] \\ A^{(1)}[2] \\ A^{(1)}[3] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1[0] \cdot Y_1^{(0)}[0] \\ -X_1[1] \cdot Y_1^{(0)}[1] \\ -X_1[3] \cdot Y_1^{(0)}[3] \\ X_1[2] \cdot Y_1^{(0)}[2] \end{vmatrix}.$$

Совершая обратный переход от системы $W_1^{(2)}(f,4)$ к $W^{(2)}(e,4)$, с учетом (14) получим:

$$\begin{aligned} z[1] &= (X_1[0] \cdot Y_1^{(0)}[0] - X_1[1] \cdot Y_1^{(0)}[1]) - (X_1[2] \cdot Y_1^{(0)}[3] - X_1[3] \cdot Y_1^{(0)}{}_1[2]),\\ z[3] &= (X_1[0] \cdot Y_1^{(0)}[0] - X_1[1] \cdot Y_1^{(0)}[1]) + (X_1[2] \cdot Y_1^{(0)}[3] - X_1[3] \cdot Y_1^{(0)}[2]).\end{aligned}$$

Здесь первые два слагаемых в каждой формуле вычислены на этапе (12). Поэтому требуется всего 2 умножения и 4 сложения. Всего для определения всех отсчетов свертки с учетом переходов из $W_1^{(2)}(f,4)$ в $W^{(2)}(e,4)$ и обратно требуется 6 умножений и 24 сложения.

Алгоритм циклической свертки с использованием симметрии оператора изоморфизма в случае $2^n = 8$

Для упрощения вида выкладок и экономии места будем использовать индексную форму записи суммы парных произведений, которая заключается в том, что вместо произведения $x[i]y[j]$ будем записывать только индексы сомножителей через запятую. Для обозначения индексной записи будем ее брать в круглые скобки, а вместо знака равенства ставить значки $\triangleright$ и $\triangleleft$, как показано ниже:

$$\beta = x[0]y[1] + x[2]y[3] \triangleright (0,1+2,3)\,; \quad (1,2+3,0) \triangleleft x[1]y[2] + x[3]y[0]\,.$$

При такой двухзначной индексации запись приобретает необходимое в данном случае свойство непозиционности, а, значит, и возможность перестановки слагаемых.

Циклическая свертка числовых последовательностей длиной 8 $\{x[0],...,x[7]\}$ и $\{y[0],...,y[7]\}$ будет иметь 8 отсчетов и в индексной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}
z[0] &\triangleright (0,0+1,1+2,2+3,3+4,4+5,5+6,6+7,7),\\
z[1] &\triangleright (0,1+1,2+2,3+3,4+4,5+5,6+6,7+7,0),\\
z[2] &\triangleright (0,2+1,3+2,4+3,5+4,6+5,7+6,0+7,1),\\
z[3] &\triangleright (0,3+1,4+2,5+3,6+4,7+5,0+6,1+7,2),\\
z[4] &\triangleright (0,4+1,5+2,6+3,7+4,0+5,1+6,2+7,3),\\
z[5] &\triangleright (0,5+1,6+2,7+3,0+4,1+5,2+6,3+7,4),\\
z[6] &\triangleright (0,6+1,7+2,0+3,1+4,2+5,3+6,4+7,5),\\
z[7] &\triangleright (0,7+1,0+2,1+3,2+4,3+5,4+6,5+7,6).
\end{aligned} \tag{15}$$

Представим числовые последовательности $\{x[0],...,x[7]\}$ и $\{y[0],...,y[7]\}$ в виде гиперкомплексных чисел из системы $W^{(3)}(e,8)$:

$$X = \sum_{i=0}^{7} x[i]e_i\,; \quad Y = \sum_{i=0}^{7} y[i]e_i.$$

Тогда в соответствии с таблицей умножения ГЧС $W^{(2)}(e,4)$ произведение XY запишем как

$$XY = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i\,,$$

где компоненты α_i имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 \triangleright (0,0+1,1+2,2+3,3+4,4+5,5+6,6+7,7),\\
&\alpha_1 \triangleright (0,1+1,0+2,3+3,2+4,5+5,4+6,7+7,6),\\
&\alpha_2 \triangleright (0,2+1,3+2,0+3,1+4,6+5,7+6,4+7,5),\\
&\alpha_3 \triangleright (0,3+1,2+2,1+3,0+4,7+5,6+6,5+7,4),\\
&\alpha_4 \triangleright (0,4+1,5+2,6+3,7+4,0+5,1+6,2+7,3),\\
&\alpha_5 \triangleright (0,5+1,4+2,7+3,6+4,1+5,0+6,3+7,2),\\
&\alpha_6 \triangleright (0,6+1,7+2,4+3,5+4,2+5,3+6,0+7,1),\\
&\alpha_7 \triangleright (0,7+1,6+2,5+3,4+4,3+5,2+6,1+7,0).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Для их вычислений необходимо выполнить 64 умножения и 56 сложений.

Из сравнения (15) и (16) видно, что два отсчета свертки определяются непосредственно, а именно:

$$
z[0] = \alpha_0, \quad z[4] = \alpha_4. \tag{17}
$$

Но для их вычисления требуется 8 умножений 56 сложений, а, кроме того, еще необходимо вычислить оставшиеся отсчеты.

Перейдем из ГЧС $W^{(3)}(e,8)$ в изоморфную диагональную ГЧС $W_1^{(3)}(f,8)$. Для этого запишем преобразования изоморфизма в матричной форме. Оператор изоморфизма имеет вид [6]

$$
L = \begin{vmatrix}
+1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1\\
+1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1\\
+1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1\\
+1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1\\
+1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
+1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1\\
+1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1\\
+1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1
\end{vmatrix},
$$

а числа преобразуются так [6]:

$$
\begin{gathered}
X_1 = L \cdot (x[0],\dots,x[7])^T,\\
Y_1^{(0)} = L \cdot (y[0],\dots,y[7])^T = (Y_1^{(0)}[0],\dots,Y_1^{(0)}[7])^T.
\end{gathered}
$$

Перемножим их покомпонентно, как это следует из таблицы умножения ГЧС $W_1^{(3)}(f,8)$ [6], и получим матрицу-столбец:

$$
A^{(0)} = (A^{(0)}[0], A^{(0)}[1],\dots,A^{(0)}[7])^T = (X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0] + X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1] + \dots + X_1[7]\cdot Y_1^{(0)}[7])^T. \tag{18}
$$

Совершая обратный переход от $W_1^{(3)}(f,8)$ к $W^{(3)}(e,8)$ и не выписывая короткие операции, получим с учетом (17):

$$\begin{aligned}
z[0] &= (X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0] + X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1] + X_1[2]\cdot Y_1^{(0)}[2] + X_1[3]\cdot Y_1^{(0)}[3]) + \\
&\quad + (X_1[4]\cdot Y_1^{(0)}[4] + X_1[5]\cdot Y_1^{(0)}[5] + X_1[6]\cdot Y_1^{(0)}[6] + X_1[7]\cdot Y_1^{(0)}[7]), \\
z[4] &= (X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0] + X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1] + X_1[2]\cdot Y_1^{(0)}[2] + X_1[3]\cdot Y_1^{(0)}[3]) - \\
&\quad - (X_1[4]\cdot Y_1^{(0)}[4] + X_1[5]\cdot Y_1^{(0)}[5] + X_1[6]\cdot Y_1^{(0)}[6] + X_1[7]\cdot Y_1^{(0)}[7]).
\end{aligned} \tag{19}$$

На эти вычисления требуется 8 умножений и 8 сложений.

Преобразуем числовую последовательность Y путем циклического сдвига в последовательность $Y^{(1)} = \{y[1], y[2], y[3], y[0]\}$. Тогда:

$$\begin{aligned}
z[0] &\triangleright (0{,}0 + 1{,}1 + 2{,}2 + 3{,}3 + 4{,}4 + 5{,}5 + 6{,}6 + 7{,}7), \\
z[1] &\triangleright (0{,}1 + 1{,}2 + 2{,}3 + 3{,}4 + 4{,}5 + 5{,}6 + 6{,}7 + 7{,}0), \\
z[2] &\triangleright (0{,}2 + 1{,}3 + 2{,}4 + 3{,}5 + 4{,}6 + 5{,}7 + 6{,}0 + 7{,}1), \\
z[3] &\triangleright (0{,}3 + 1{,}4 + 2{,}5 + 3{,}6 + 4{,}7 + 5{,}0 + 6{,}1 + 7{,}2), \\
z[4] &\triangleright (0{,}4 + 1{,}5 + 2{,}6 + 3{,}7 + 4{,}0 + 5{,}1 + 6{,}2 + 7{,}3), \\
z[5] &\triangleright (0{,}5 + 1{,}6 + 2{,}7 + 3{,}0 + 4{,}1 + 5{,}2 + 6{,}3 + 7{,}4), \\
z[6] &\triangleright (0{,}6 + 1{,}7 + 2{,}0 + 3{,}1 + 4{,}2 + 5{,}3 + 6{,}4 + 7{,}5), \\
z[7] &\triangleright (0{,}7 + 1{,}0 + 2{,}1 + 3{,}2 + 4{,}3 + 5{,}4 + 6{,}5 + 7{,}6).
\end{aligned} \tag{20}$$

Сравнивая (15) и (20), можно установить, что два отсчета свертки совпадают с компонентами произведения (13), а именно:

$$z[1] = \alpha_0^{(1)}, \;\; z[5] = \alpha_4^{(1)}.$$

Перейдем из ГЧС $W^{(3)}(e,8)$ в изоморфную диагональную ГЧС $W_1^{(3)}(f,8)$:

$$Y_1^{(1)} = L\cdot(y[1], y[2], \ldots, y[7], y[0])^T = (Y_1^{(1)}[0], \ldots, Y_1^{(1)}[7])^T.$$

Но из структуры оператора L вытекают следующие равенства:

$$Y_1^{(1)}[0] = Y_1^{(0)}[0];\; Y_1^{(1)}[1] = -Y_1^{(0)}[1];\; Y_1^{(1)}[2] = -Y_1^{(0)}[3];\; Y_1^{(1)}[3] = Y_1^{(0)}[2]. \tag{21}$$

Перемножая покомпонентно с X_1, в соответствии с таблицей умножения ГЧС $W_1^{(3)}(f,8)$, и совершая обратный переход от $W_1^{(3)}(f,8)$ к $W^{(3)}(e,8)$, получим с учетом (17):

$$z[1]=(X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0]-X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1]-X_1[2]\cdot Y_1^{(0)}[3]+X_1[3]\cdot Y_1^{(0)}[2])+\sum_{i=4}^{7}X_1[i]\cdot Y_1^{(1)}[i],$$
$$z[4]=(X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0]-X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1]-X_1[2]\cdot Y_1^{(0)}[3]+X_1[3]\cdot Y_1^{(0)}[2])-\sum_{i=4}^{7}X_1[i]\cdot Y_1^{(1)}[i].$$

На эти вычисления требуется уже на два умножения меньше — 6 умножений, так как первые два слагаемых в обоих отсчетах уже рассчитаны при нулевом сдвиге. В третьем и четвертом слагаемом умножение необходимо, но то, что значения вторых сомножителей рассчитаны тоже на предыдущем этапе, сокращает число сложений.

Выполняя еще два сдвига и действуя таким же образом, как и при нулевом и первом сдвигах, получим:

$$z[2]=\alpha_0^{(2)};z[6]=\alpha_4^{(2)},$$
$$z[3]=\alpha_0^{(3)};z[7]=\alpha_4^{(3)}.$$
$$Y_1^{(2)}[0]=Y_1^{(0)}[0];\quad Y_1^{(2)}[1]=Y_1^{(0)}[1];\quad Y_1^{(2)}[2]=-Y_1^{(0)}[3];\quad Y_1^{(2)}[3]=-Y_1^{(0)}[2];$$
$$Y_1^{(2)}[4]=-Y_1^{(0)}[7];\quad Y_1^{(2)}[6]=Y_1^{(0)}[4];\quad Y_1^{(2)}[7]=Y_1^{(0)}[5].$$
$$Y_1^{(3)}[0]=Y_1^{(0)}[0];\quad Y_1^{(3)}[1]=-Y_1^{(0)}[1];\quad Y_1^{(3)}[2]=Y_1^{(0)}[3];\quad Y_1^{(3)}[3]=-Y_1^{(0)}[2];$$
$$Y_1^{(3)}[4]=-Y_1^{(1)}[6];\quad Y_1^{(3)}[6]=-Y_1^{(1)}[4].$$

И остальные отсчеты свертки будут:

$$\begin{aligned}z[2]=(X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0]+X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1]-X_1[2]\cdot Y_1^{(0)}[3]-X_1[3]\cdot Y_1^{(0)}[2])-\\-(X_1[4]\cdot Y_1^{(0)}[7]-X_1[5]\cdot Y_1^{(1)}[5]-X_1[6]\cdot Y_1^{(0)}[4]-X_1[7]\cdot Y_1^{(0)}[5]),\\z[6]=(X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0]+X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1]-X_1[2]\cdot Y_1^{(0)}[3]-X_1[3]\cdot Y_1^{(0)}[2])+\\+(X_1[4]\cdot Y_1^{(0)}[7]-X_1[5]\cdot Y_1^{(1)}[5]-X_1[6]\cdot Y_1^{(0)}[4]-X_1[7]\cdot Y_1^{(0)}[5]).\end{aligned}$$

На эти вычисления требуется еще меньше умножений – 4 умножения.

$$\begin{aligned}z[3]=(X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0]-X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1]+X_1[2]\cdot Y_1^{(0)}[3]-X_1[3]\cdot Y_1^{(0)}[2])-\\-(X_1[4]\cdot Y_1^{(1)}[6]-X_1[5]\cdot Y_1^{(3)}[5]+X_1[6]\cdot Y_1^{(1)}[4]-X_1[7]\cdot Y_1^{(3)}[7])\\z[7]=(X_1[0]\cdot Y_1^{(0)}[0]-X_1[1]\cdot Y_1^{(0)}[1]+X_1[2]\cdot Y_1^{(0)}[3]-X_1[3]\cdot Y_1^{(0)}[2])+\\+(X_1[4]\cdot Y_1^{(1)}[6]-X_1[5]\cdot Y_1^{(3)}[5]+X_1[6]\cdot Y_1^{(1)}[4]-X_1[7]\cdot Y_1^{(3)}[7]).\end{aligned}$$

На эти вычисления также требуется 4 умножения.

Таким образом, для вычисления отсчетов циклической свертки последовательностей длиной 8 членов с использованием симметрии оператора изоморфизма требуется 22 умножения.

Выводы

Проведенные исследования показали, что с помощью симметрий оператора изоморфизма гиперкомплексных числовых систем могут быть синтезированы алгоритмы вычисления циклической свертки с очень высокими показателями по количеству операций. Такие алгоритмы могут быть синтезированы и для больших длин сворачиваемых последовательностей. Они отличаются простотой структуры и легко формализуются.

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Р. Блейхут. — М.: Мир, 1989. — 449 с.

2. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток / Г. Нуссбаумер. — М.: Радио и связь, 1985. — 248 с.

3. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко. — СПб.: Питер, 2003. — 604 с.

4. *Калиновский Я.А.* Структура гиперкомплексного метода быстрого вычисления линейной свертки дискретных сигналов / Я.А. Калиновский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2013. — Т. 15, № 1. — С. 31–44.

5. *Калиновский Я.А.* Алгоритмы быстрого вычисления циклической свертки с представлением дискретных сигналов гиперкомплексными числами / Я.А. Калиновский, Т.С. Синькова // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2014. — Т. 16, № 1. — С. 9–19.

6. *Калиновский Я.А.* Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использованиедля повышения эффективности вычислений / Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К.: Инфодрук, 2012. — 183 с.

7. *Zhu C.* New Fast Algorithm for Hypercomplex Decomposition and Cross-Correlation / C. Zhu, Y. Shen and Q. Wang // Journal of Systems Engineering and Electronics. — 2010. — **21**(3). — P. 514–519.

Поступила в редакцию 22.05.2014