

Н. О. Ярецька

Вплив початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружного циліндричного штампа та пружного шару

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

У рамках лінеаризованої теорії пружності наведено віссиметричну задачу про тиск пружного циліндричного штампа на шар з початковими напруженнями. Дослідження подано в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Загальну просторову задачу про тиск пружного штампа довільного поперечного перетину на пружний півпростір без урахування сил тертя наведено у роботі [1]. Контактним задачам про тиск без тертя жорсткого кругового штампа на шар з початковими напруженнями присвячені роботи [2, 3], у яких використовуються загальні розв'язки просторових лінеаризованих осесиметричних задач. Детальний огляд задач контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями поданий у [4, 5].

Нижче у рамках лінеаризованої теорії пружності [6] наведено розв'язок осесиметричної задачі про тиск пружного циліндричного штампа скінченної довжини на пружний шар з початковими напруженнями. Розглянуто випадки, коли шар лежить на жорсткій основі без тертя, і шар закріплений на основі після виникнення там початкового деформівного стану. Дослідження виконані у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Припускаємо, що пружні потенціали — двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [6], а початкові деформовані стани у шарі та штампі однорідні та однакові. Крім того, дія штампа викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0, \quad S_0^{33} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3,$$

де λ_i ($i = \overline{1,3}$) — коефіцієнти видовження.

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану Oy_i , які пов'язані з лагранжевими координатами x_i співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1,3}$).

Величини, які відносяться до пружного штампа, будемо записувати у позначеннях [6] з верхнім індексом (1), а величини, які відносяться до пружного шару, — з індексом (2).

Постановка задачі й основні співвідношення. Нехай пружний циліндр радіусом R і висотою H з початковими напруженнями втискається у пружний шар під дією сили P після виникнення там початкового деформованого стану. H_1 — товщина шару в початковому деформованому стані, яка пов'язана з товщиною H_2 у недеформованому стані відношенням $H_1 = \lambda_3 H_2$. Збурення під дією сили P , що прикладена до вільного торця циліндричного штампа, викликають його зміщення у напрямку осі Oy_3 на сталу величину ϵ . Вважатимемо, що поверхні поза областю контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил.

У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = y_3/v_i$ ($i = \overline{1,2}$), $v_i = \sqrt{n_i}$, n_i — корені рівняння [6, (2.12)], даній постановці відповідають граничні умови та умова рівноваги [7, (1)–(6)].

Вважаємо, що напруження і переміщення у шарі й півпросторі при $|y_3| \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ спадають, а на границі контактної взаємодії циліндра і шару — необмежені.

Для визначення напружено-деформованого стану у пружному циліндрі використовуємо лінеаризовані рівняння [6]. Загальний розв'язок $\chi = \chi_1 + z_1\chi_2$ для випадку рівних коренів $n_1 = n_2$ будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned}
\chi &= z_1(1 + z_1)(A_0 + C_0(3r^2 - 2z_1^2)) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} ((A_k + z_1 B_k)I_0(\gamma_k v_1 r)S_1 + J_0(\alpha_k r)(S_2 + z_1)S_2), \\
U_r^{(1)} &= -6C_0 r \left(\frac{1}{v_1} + 2z_1 \right) - \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k v_1 I_1(\gamma_k v_1 r) ((A_k + v_1 z_1 B_k) \gamma_k S_6 + B_k S_1)) - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k J_1(\alpha_k r) \left(\frac{\alpha_k}{v_1} (S_4 + v_1 z_1 S_5) - S_3 \right) \right), \\
U_3^{(1)} &= \frac{12C_0 m_1 z_1}{v_1} \left(\frac{1}{v_1} + z_1 \right) + \frac{1 - m_2}{v_1} (A_0 + 3C_0(r^2 - 2z_1^2)) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) ((A_k + v_1 z_1 B_k) \gamma_k m_1 S_1 + (1 - m_2) B_k S_6)) - \\
&- \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{n_1} J_0(\alpha_k r) (\alpha_k m_1 (S_2 + v_1 z_1 S_3) + (m_2 - 1) v_1 S_5) \right), \\
\tilde{Q}_{33}^{(1)} &= 12C_{44} C_0 \left[(1 + m_1) l_1 \left(\frac{1}{v_1} + z_1 \right) + (1 + m_2) l_2 z_1 \right] + \\
&+ C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k^2 v_1^2 I_0(\gamma_k v_1 r) ((1 + m_1) \gamma_k l_1 (A_k + v_1 z_1 B_k) S_6 + (1 + m_2) B_k l_2 S_1)) - \\
&- C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k^2 J_0(\alpha_k r) \left(\frac{\alpha_k (1 + m_1) l_1}{v_1} (S_4 + v_1 z_1 S_5) + (m_2 + 1) l_2 S_3 \right) \right), \\
\tilde{Q}_{3r}^{(1)} &= -\frac{6C_{44} C_0 r (1 + m_2)}{v_1} + \\
&+ C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k^2 v_1 I_1(\gamma_k v_1 r) ((1 + m_1) \gamma_k (A_k + v_1 z_1 B_k) S_1 - (1 + m_2) B_k S_6)) + \\
&+ C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k^2}{v_1} J_1(\alpha_k r) (\alpha_k (1 + m_1) (S_2 + v_1 z_1 S_3) + (m_2 + 1) S_5) \right), \\
\tilde{Q}_{rr}^{(1)} &= -6D_{44} C_0 \left[\frac{1}{v_1} (1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1) + (3 + \tilde{c}_0 - 4\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2) z_1 \right] -
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& - D_{44} \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k v_1 (\gamma_k v_1 I_0(\gamma_k v_1 r)) ((\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) \gamma_k (A_k + v_1 z_1 B_k) S_6 + (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) B_k S_1)) + \\
& + D_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - \tilde{c}_0) I_1(\gamma_k v_1 r)}{r} (\gamma_k (A_k + v_1 z_1 B_k) S_6 + B_k S_1) \right) - \\
& - D_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k (\alpha_k J_0(\alpha_k r)) \left(\frac{\alpha_k}{v_1} (\tilde{c}_0 S_4 - \tilde{c}_1 S_2) + (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) S_3 \right) \right) + \\
& + D_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(1 - \tilde{c}_0) J_1(\alpha_k r)}{r} \left[\frac{\alpha_k}{v_k} S_4 + S_3 \right] \right),
\end{aligned}$$

де $J_v(x)$, $I_v(x)$ – функції Бесселя дійсного та уявного аргументу; $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_6 = D_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + C_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_4 = F_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + E_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_5 = M_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + N_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$.

Напружено-деформований стан у пружному шарі з початковими напруженнями визначений у [7, (7), (8)] через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля.

Метод розв’язання. Використовуючи розв’язки для циліндра (1) та задовольняючи умови [7, третю (2), другу (4)], знайдемо власні значення:

$$\gamma_k = \frac{2\pi k}{H}, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \text{де} \quad J_1(\mu_k) = 0. \quad (2)$$

Інші умови приводять до рекурентних співвідношень між довільними сталими та невідомими χ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), а з [7, (2), (3)] можна визначити невідому функцію $F(\eta)$ із парних інтегральних рівнянь для рівних коренів:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta \rho) d\eta = f(\rho) \quad (\rho > 1). \\
& \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1).
\end{aligned} \quad (3)$$

Застосування формули звернення до (3) призводить до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно функції $F(\eta)$

$$\frac{F(\eta)}{\eta} = -\frac{2p(\eta)}{\pi\theta_2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(u)}{u} G(uh)\psi_0(\eta u) du, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned}
p(\eta) = & \varepsilon \left((1 - \chi_0) \psi_0(\eta, 0) - \frac{2(m_2 - 1)R^2}{\theta_2} \chi_0 \psi_1(\eta, 0) + \theta_4 \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \psi_0(\eta, \mu_k) \right) + \\
& + \varepsilon \left(\frac{(m_2 - 1)R^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_1^{(k)} \chi_k \psi_0(\eta, i\gamma_k v_1 R) \right),
\end{aligned}$$

$$\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos ytdt, \quad \psi_0(x, y) = \frac{x \sin x \cos y - y \sin y \cos x}{x^2 - y^2},$$

$$\theta_2 = E \left(\frac{8m_1(1+H)}{n_1} - \frac{4H}{v_1} + \frac{(1-m_2)R^2}{H} \right), \quad \theta_4 = \frac{v_1(m_2-1) - m_1s_0}{n_1}.$$

Розв'язок (4), який шукаємо методом послідовних наближень, запишемо

$$F(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(\eta), \quad (5)$$

де

$$\frac{F^{(0)}(\eta)}{\eta} = -\frac{2\theta_3}{\pi} p(\eta), \quad \frac{F^{(k)}(\eta)}{\eta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F^{(k-1)}(u)}{u} G(uh) \psi_0(\eta, u) du.$$

Відзначимо, що процес послідовних наближень (5) збіжний при $h > 1$, але внаслідок громіздкості доведення воно тут не наводиться.

Для визначення сталих χ_i отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\vartheta_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{kn} \chi_n = \varpi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

коефіцієнти якої можна подати у вигляді

$$\vartheta_0 = \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{(m_2-1)R^2}{\theta_2} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\psi_0 + \frac{2(m_2-1)R^2}{\theta_2} \psi_1 \right) G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du \right),$$

$$\varpi_0 = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \psi_0(u, 0) G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du \right),$$

$$\vartheta_{0n} = \frac{\theta_4}{\pi} (\psi_0(0, \mu_n) + N\psi_0(0, i\gamma_n v_1 R)) +$$

$$+ \frac{2\theta_4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (\psi_0(u, \mu_n) + N\psi_0(0, i\gamma_n v_1 R)) G(hu) \psi_{j-1}(u, 0) du,$$

$$\vartheta_{00} = \frac{2E}{\kappa\theta_2\theta_3 l R}, \quad \varpi_k = \frac{2}{\pi} \psi_0(0, \mu_k), \quad \vartheta_k = \frac{\mu_k J_0^2(\mu_k)}{2\theta_3 \kappa R} \left(\frac{\mu_k}{Rv_1} E^{(k)} - sM^{(k)} \right), \quad (7)$$

$$\vartheta_{k0} = \frac{2}{\pi} \left(\psi_0(0, \mu_k) + \frac{2(m_2-1)R^2 \sin \mu_k}{\theta_2 \mu_k} \right) +$$

$$+ \frac{4\theta_4}{\pi^2 \varepsilon \theta_3} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{\psi_{j-1}(u, \mu_k)}{u} + N\psi_{j-1}(u, i\gamma_k v_1 R) \right) G(uh) \psi_{j-1}(u, \mu_k) du,$$

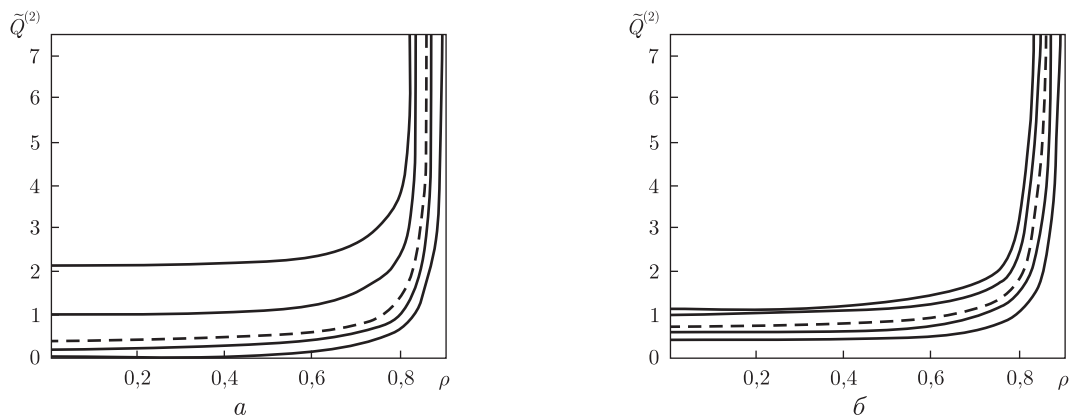


Рис. 1

$$\vartheta_{kn} = -\frac{2}{\pi} \left(\theta_4 \psi_0(\mu_k, \mu_n) + \frac{(m_2 - 1)R^2}{2} b_1^{(n)} \psi_0(\mu_k, i\gamma_n v_1 R) \right) -$$

$$-\frac{4\theta_4}{\pi^2 \varepsilon \theta_3} \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\frac{\psi_{j-1}(u, \mu_k)}{u} + N \frac{\psi_{j-1}(u, i\gamma_n v_1 R)}{u} \right) G(hu) \psi_{j-1}(u, \mu_n) du -$$

$$-\frac{l}{\pi \kappa \theta_3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_m^2 v_1^2 J_0(\mu_k) b_1^{(n)} (\gamma_m v_1 R I_1(\gamma_m v_1 R) + s_0 (1 - I_0(\gamma_m v_1 R)))}{\mu_k^2 + \gamma_m^2 v_1^2 R^2},$$

де

$$\psi_j(\eta, \mu_n) = \frac{2}{\pi} \eta \int_0^1 \cos \eta t dt \int_0^{\infty} \frac{\psi_{j-1}(u, \mu_n)}{u} G(hu) \cos ut du, \quad \theta_3 = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{v_1};$$

$$N = \frac{(m_2 - 1)R^2}{2\theta_4} b_1^{(k)};$$

$M^k, E^k, b_1^{(k)}$ — виражаються із граничних умов [7].

При обчисленні (5) і (7) більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються через складність q_i ($i = \overline{1, 2}$). Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаються у ряди за степенями h^{-1} , що дозволить обчислити (7) наближено.

Зв'язок між осадом торця штампта та рівнодіючою навантаження P буде таким:

$$P = \frac{8\pi \varepsilon E \theta_1}{\kappa \theta_2 l R} \chi_0.$$

Визначивши невідомі сталі χ_i із (6), можна обчислити напружено-деформований стан циліндра та шару за формулами (1), [7, (7)] (5).

Чисельний аналіз. Система (6) розв'язана методом редукції при: $k = n = 16$; $l = 10$; $\lambda_1 = 0,7; 0,9; 1; 1,2; 1,3$; $h = 1,6; 4,0$. На рис. 1 наведено розподіл напружень для стисливих тіл (гармонічний потенціал) у циліндрі на границі шару в області контакту: штрихові лінії — для шару без початкових напружень, суцільні — для шару з початковими напруженнями ($Q^{(2)} = -(\pi R^2/P)\tilde{Q}_{33}$), що і відповідають λ_1 знизу вверх за зростанням λ_1 .

Таким чином, в даній роботі отримано аналітичні залежності, що відображають вплив початкових напружень на напружено-деформований стан системи пружних циліндра та шару з початковими (залишковими) напруженнями. Цей вплив є істотним як для стисливих, так і нестисливих тіл та повинен враховуватися при розрахунках на міцність деталей машин і конструкцій.

1. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полу-пространство с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 8. – С. 3–11.
2. Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. К вопросу контактной задачи для предварительно напряженного слоя // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 5. – С. 110–112.
3. Гузь А. Н., Бабич С. Ю. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1983. – **273**, № 6. – С. 1329–1332.
4. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (упругие штампы) (обзор) // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 9. – С. 3–28.
5. Guz A. N., Babich S. Y., Rudnitsky V. B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**. – P. 343–371.
6. Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницький: ПП Мельник, 2006. – 710 с.
7. Yaretska N. Contact interaction of resilient and cylindrical dies with initial (residual) tension // Czasopismo techniczne: zeszyt 3/2008. – (ROK 105). – Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej. Mechanika, z. 3. – M/2008. – P. 213–216.

Хмельницький національний університет

Надійшло до редакції 30.05.2013

Н. А. Ярецкая

Влияние начальных (остаточных) напряжений на контактное взаимодействие упругого цилиндрического штампа и упругого слоя

В рамках линеаризованной теории упругости представлена осесимметричная задача о давлении упругого цилиндрического штампа на слой с начальными напряжениями. Исследования приведены в общем виде для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

N. A. Iaretska

Influence of initial (residual) stresses on the contact interaction of an elastic cylindrical punch and the elastic layer

The article deals with the coaxial type problem of the pressure of an elastic cylinder on the layer with initial stresses within the linearized theory of elasticity. In general, the research was carried out for the theory of finite (large) deformations and two versions of the theory of small initial deformations with the elastic potential having an arbitrary form.