

Функціональна ідентифікація градієнтними методами та інтегральними перетвореннями параметрів задач дифузії в неоднорідних наномультікомпозиціях

Розглянуто питання ідентифікації градієнтними методами параметрів дифузійної моделі дифузії Fe/Dy в багатошарових наноплівках та застосування інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа для отримання розв'язків прямих і спряжених задач. Проведено числові експерименти.

Дослідження дифузійної кінетики в багатошарових наноконпозиціях і тонких наноплівках відкриває перспективи створення на базі матеріалів з відомими властивостями матеріалів та середовищ з новими властивостями (з новими явищами провідності, дифузійно-адсорбційними ефектами тощо), виникнення яких пов'язано зі структурними змінами середовищ при агрегуванні наночастинок з різними властивостями [1, 2]. В цій роботі на прикладі задач дифузії в згущених (Fe/Dy) магнітних багатошарових наноплівках, утворених агрегацією наночастинок з високопровідними і низькопровідними матеріалами (ферромагнетиками і рідкісноземельні елементи — диспрозіум, тербій), на основі теорії оптимального керування станами багатокомпонентних систем (ОКСБС) [3], інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа [4] розроблена методика функціональної ідентифікації параметрів дифузії для неоднорідних наномультікомпозицій. Отримано аналітичні вирази градієнтів функціоналів-нев'язок, зроблено відновлення коефіцієнтів дифузії за даними спостережень на різних поверхнях та виконано моделювання процесу дифузії.

Математична модель двосторонніх градієнтних взаємодій в елементах мультікомпозиції. Враховуючи [1, 2], для мультікомпозиції з n подвійних наночастинок двох середовищ з різними властивостями, для яких дифузія атомів компонентів 1 (Fe) і 2 (Dy) між суміжними наночастинами викликана наявністю змінних в часі градієнтів концентрацій на межах їх контакту.

На областях $\Omega_{kT} = (0, T) \times \Omega_k (\Omega_k = (l_{k-1}, l_k), k = \overline{1, n+1}, l_0 = 0 < l_1 < \dots < l_{n+1} = l < \infty)$ концентрації $U_{1k}(t, z), U_{2k}(t, z)$ з урахуванням [2] задовольняють систему рівнянь у частинних похідних

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{1k}(t, z) = D_{11k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{1k} - D_{12k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{2k}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{2k}(t, z) = -D_{21k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{1k} + D_{22k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{2k}.$$

Початкові умови такі:

$$U_{1k}(t, z)|_{t=0} \equiv U_{01k} = \begin{cases} 0, & z \in \theta_{1k}, \\ 1, & z \in \theta_{2k}, \end{cases} \quad U_{2k}(t, z)|_{t=0} \equiv U_{02k} = \begin{cases} 1, & z \in \theta_{1k}, \\ 0, & z \in \theta_{2k}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\theta_{1k} = \{z \in (l_{k-1}, l_k), k = 2i + 1; i = \overline{0, [n/2]}\},$$

$$\theta_{2k} = \{z \in (l_k, l_{k+1}), k = 2i + 2; i = \overline{0, [n/2] - 2}\}.$$

Крайові та спряжені умови між тонкими шарами за z мають вигляд

$$D_1 \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} U_{1_1}(t, z) \\ U_{2_1}(t, z) \end{bmatrix} \Big|_{z=0} = 0, \quad D_{n+1} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} U_{1_{n+1}}(t, z) \\ U_{2_{n+1}}(t, z) \end{bmatrix} \Big|_{z=l} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$[U_{s_k}(t, z) - U_{s_{k+1}}(t, z)] \Big|_{z=l_k} = 0, \quad s = 1, 2,$$

$$\left(D_{S_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} U_{1_{s_1}}(t, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} U_{2_{s_1}}(t, z) \end{bmatrix} - D_{S_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} U_{1_{s_2}}(t, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} U_{2_{s_2}}(t, z) \end{bmatrix} \right) \Big|_{z=l_k} = 0, \quad (4)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} D_{11_k} & -D_{12_k} \\ -D_{21_k} & D_{22_k} \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, n},$$

де

$$\begin{cases} s_1 = k, & s_2 = k + 1; & k = 2i + 1; & i = \overline{0, [n/2]}, \\ s_1 = k + 1, & s_2 = k; & k = 2i + 2; & i = \overline{0, [n/2] - 2}. \end{cases}$$

З позиції практичних застосувань важливими є випадки, коли $D_{12_k} = 0$ або $D_{21_k} = 0$, що відповідає кінетиці взаємодії двох елементів з протилежними показниками параметрів: “активної” (високий) і “пасивної” компоненти (низький) і приводить до нових фізичних ефектів [1]. Дифузія в такій системі взаємодій “активний елемент” (Fe) — “пасивний елемент” (Du) визначатиметься обмеженою проникністю “пасивного” елемента в зону “активного” та значною проникністю “активного” елемента в зону “пасивного”.

Задачі ідентифікації та чисельно-аналітичний алгоритм їх розв’язання. Вважаємо, що коефіцієнти дифузії D_{sp} , $s, p = 1, 2$, задачі (1)–(4) є невідомими. Однак на проміжках $\gamma_k \subset \Omega_k$, $k = \overline{1, n+1}$, неоднорідного середовища відомі сліди розв’язку (концентрацій)

$$U_{s_k}(t, z) \Big|_{\gamma_k} = f_{s_k}(t, z) \Big|_{\gamma_k}. \quad (5)$$

Використовуючи дані експериментальних спостережень для шаруватих наноплівок (Fe/Du), проведених у лабораторії фізики матеріалів Університету м. Руан (Франція) [1], задачу (1)–(5) можемо розв’язати шляхом її декомпозиції.

Задача (1)–(5) трансформується в систему задач ідентифікації для послідовних досить тонких $\gamma_{k_l} = [z_{k_{l-1}}, z_{k_l}]$ сегментів відрізка $\overline{\Omega}_k$, $l = \overline{1, N_k}$, з крайовими умовами

$$U_{s_{k_{l-1}}}(t, z) \Big|_{z=l_{k_{l-1}}} = \overline{U}_{s_{k_{l-1}}}; \quad U_{s_{k_l}}(t, z) \Big|_{z=l_{k_l}} = \overline{U}_{s_{k_{l-1}}}, \quad s = 1, 2. \quad (6)$$

Функціонал-нев’язка на $\gamma_{k_l} = \Omega_{k_l}$ запишеться у вигляді

$$J_{k_l}(D_{sp_{k_l}}) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{l_{k_{l-1}}}^{l_{k_l}} ((U_{1_{k_l}}(t, z, D_{sp_{k_l}}) - f_{1_{k_l}})^2 + (U_{2_{k_l}}(t, z, D_{sp_{k_l}}) - f_{2_{k_l}})^2) dz dt. \quad (7)$$

Тим самим отримали серію задач, що полягають в ідентифікації коефіцієнтів дифузії на кожному елементарному проміжку $\overline{\Omega}_{k_l}$, $l = \overline{1, N_k}$, на якому стан системи описується системою рівнянь у частинних похідних (1), початковими умовами (2) та крайовими умовами (6).

Кожну з цих задач з функціоналом-нев'язкою (7), слідуючи [5, 6], будемо розв'язувати за допомогою градієнтних методів О. М. Аліфанова:

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \quad n = 0, 1, \dots, n^*, \quad (8)$$

починаючи з деякого початкового наближення $u_0 \in U$, де напрям спуску p_n та коефіцієнт β_n визначимо за допомогою виразів для методу мінімальних похибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}.$$

Враховуючи [6], для кожного елементарного відрізка $\overline{\Omega}_{kl}$ на кожному кроці ітераційного процесу (8) спряжену задачу визначимо так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{1k}(t, z) + D_{11k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{1k}(t, z) - D_{21k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{2k}(t, z) &= -(U_{1k}^n - f_{1k}), & (t, z) \in \Omega_{lT}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi_{2k}(t, z) - D_{12k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{1k}(t, z) + D_{22k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi_{2k}(t, z) &= -(U_{2k}^n - f_{2k}), & (t, z) \in \Omega_{lT}, \\ \phi_k(t, z)|_{t=T} &= 0, & z \in \Omega_{ki}, \\ \phi_{sk}(t, z)|_{z \in \partial\Omega_{ki}} &= 0, & s = 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\partial\Omega_{kl}$ — границя області Ω_{kl} , тобто це кінці елементарного відрізка $\overline{\Omega}_{kl}$.

Аналітичні вирази для компонентів градієнтів функціонала-нев'язки (7) у припущенні залежності лише від часу на $\overline{\Omega}_{kl}$ коефіцієнтів дифузії мають вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla J_{D_{11k_l}}(t) &= \int_{l_{k_l-1}}^{l_{k_l}} \phi_{1k_l}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{1k_l}(t, z) dz, \\ \nabla J_{D_{12k_l}}(t) &= - \int_{l_{k_l-1}}^{l_{k_l}} \phi_{1k_l}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{2k_l}(t, z) dz, \\ \nabla J_{D_{22k_l}}(t) &= \int_{l_{k_l-1}}^{l_{k_l}} \phi_{2k_l}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{2k_l}(t, z) dz, \\ \nabla J_{D_{21k_l}}(t) &= - \int_{l_{k_l-1}}^{l_{k_l}} \phi_{1k_l}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{2k_l}(t, z) dz, \quad l = \overline{1, N_k + 1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Регуляризаційний вираз для $(n+1)$ -го кроку визначення функціональної залежності компоненти коефіцієнта дифузії $D_{spk_l}^{n+1}$ від часу, для методу мінімальних похибок, для кожного γ_{k_l} мають вигляд:

$$\begin{aligned} D_{spk_l}^{n+1}(t) &= D_{spk_l}^n(t) - \nabla J_{D_{spk_l}}^n(t) \frac{\|U_{sk_l}(t, \gamma_{k_l}, D_{spk_l}) - f_{sk_l}\|^2}{\|\nabla J_{D_{spk_l}}^n(t)\|^2}, \quad t \in (0, T), \\ s, p &= 1, 2; \quad k_l = \overline{1, N_l}. \end{aligned} \quad (11)$$

Реалізація регуляризаційної процедури (8) полягає в послідовному ітераційному відновленні компонентів коефіцієнтів дифузії $D_{11k_l}^{n+1}(t)$, $D_{12k_l}^{n+1}(t)$, $D_{22k_l}^{n+1}(t)$ для кожної з поверхонь спостереження γ_{k_l} , $k_l = \overline{1, N_k}$.

Аналітичні розв'язки прямої і спряженої задач ідентифікації. В [6] встановлені умови розв'язності задач (1)–(5) і побудовані методом функцій впливу Коші з використанням інтегрального перетворення Фур'є та інтегрального перетворення Лапласа загальні аналітичні їх розв'язки. Єдиний розв'язок прямої задачі (1), (2), (5), (6) має вигляд:

$$\begin{aligned}
 U_{s_k}(t, z) = & \int_0^t (\mathcal{H}_{11k}^s(t - \tau, z, l_{k-1})U_{1l_{k-1}} - \mathcal{H}_{12k}^s(t - \tau, z, l_k)U_{1l_k} - \\
 & - \mathcal{H}_{21k}^s(t - \tau, z, l_{k-1})U_{2l_{k-1}} + \mathcal{H}_{22k}^s(t - \tau, z, l_k)U_{2l_k}) d\tau + \\
 & + \int_0^t \int_{l_{k-1}}^{l_k} (\mathcal{K}_{2i_k}(t - \tau, z, \xi)U_{01_k} + \mathcal{K}_{1i_k}(t - \tau, z, \xi)U_{02_k}) d\xi d\tau.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{i1}^s(t, z, l_{k-1}) &= \frac{2}{\Delta l} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \mathcal{H}_{is_{km}}(t) \sin \beta_m(z - l_{k-1}), \\
 \mathcal{H}_{i2}^s(t, z, l_k) &= \frac{2}{\Delta l} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m (-1)^m \mathcal{H}_{is_{km}}(t) \sin \beta_m(z - l_{k-1}), \quad s, i = 1, 2, \\
 \mathcal{K}_{ij}(t, z, \xi) &= \frac{2}{\Delta l} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_{ijk_m}(t) \sin \beta_m(z - l_{k-1}) \sin \beta_m(\xi - l_{k-1}), \\
 \mathcal{K}_{ii_{kn}}(t) &= L^{-1} \left[\frac{p + D_{ssk} \beta_m^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \right] = \frac{1}{(p_1 - p_2)} [(p_1 + D_{ssk} \beta_m^2) e^{p_1 t} - (p_2 + D_{ssk} \beta_m^2) e^{p_2 t}], \\
 s &= \begin{cases} 1, & i = 2 \\ 2, & i = 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \\
 \mathcal{K}_{12_{km}}(t) &= \frac{D_{12k} \beta_m^2}{p_1 - p_2} [e^{p_1 t} - e^{p_2 t}]; \quad \mathcal{K}_{21_{km}}(t) = \frac{D_{21k} \beta_m^2}{p_1 - p_2} [e^{p_1 t} - e^{p_2 t}]; \\
 \mathcal{H}_{is_{km}}(t) D_{1i_k} \mathcal{K}_{s1_{km}}(t) &- D_{2i_k} \mathcal{K}_{s2_{km}}(t), \quad i = 1, 2,
 \end{aligned}$$

де L^{-1} – інтегральний оператор оберненого перетворення Лапласа, $\beta_m = m\pi$, $m = \overline{0, \infty}$; $p_{1,2} = -\frac{D_{11k} + D_{22k}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(D_{11k} + D_{22k})^2 - 4(D_{11k} D_{22k} - D_{12k} D_{21k}) \beta_m^4}$ – корені рівняння $p^2 + (D_{11k} + D_{22k}) \beta_m^2 p + (D_{11k} D_{22k} - D_{12k} D_{21k}) \beta_m^4 = 0$; p – комплекснозначний параметр інтегрального перетворення Лапласа.

Аналогічним чином отримано аналітичні розв'язки кожної зі спряжених часово-крайових задач ідентифікації.

Результати моделювання та ідентифікації для двох компонентів (Fe і Dy) з використанням запропонованої методики ідентифікації подані на рис. 1, 2 із загальною тривалі-

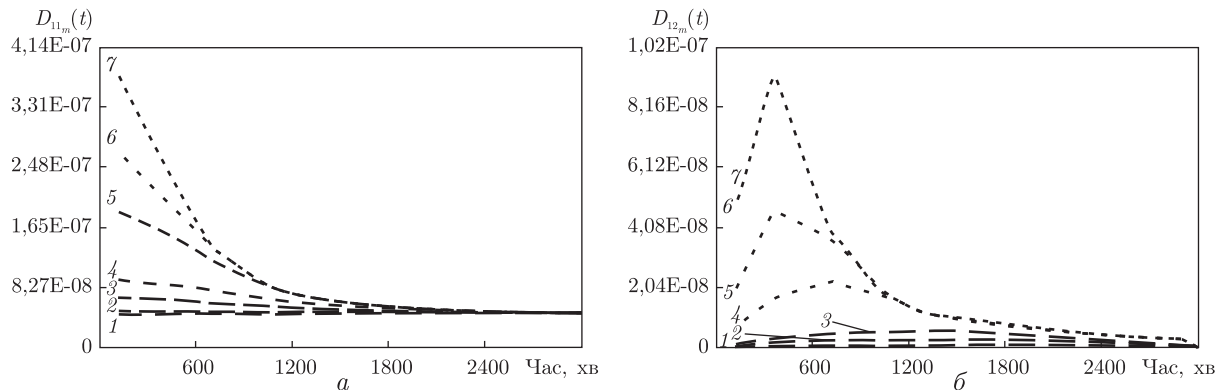


Рис. 1. Відновлення функціональної залежності компонентів D_{11_m}, D_{12_m} коефіцієнта дифузії від часу на кожній ітерації [$z = 7$ нм]:

1 — початкове наближення; 2 — 100-та; 3 — 500-та; 4 — 1000-та; 5 — 2500-та; 6 — 3500-та; 7 — 4500-та

стю спостереження 48 год та товщиною наномультиматеріалу 20 нм. Розглядалося чотири наночастиці по 5 нм кожен. Як дані експериментальних спостережень використовувалися результати для багатокомпонентних (Fe/Dy) наноплівки, отримані в лабораторії фізики матеріалів Університету м. Руан (Франція) [1].

Розглянуте наноматеріальне середовище за товщиною було розбите на 200 дифундуючих наночастиць товщиною 0,1 нм. Це дозволило реалізувати пошарову ідентифікацію компонентів коефіцієнтів дифузії, використовуючи результати спостережень покрокового атомно-томографічного аналізу зразка для усіх розглянутих поверхонь спостережень.

На першому циклі регуляризації здійснюється аналіз значень функціонала-нев'язки для завершальної групи ітерацій при різних комбінаціях початкових наближень відтвореної групи коефіцієнтів дифузії (в нашому випадку, зокрема, розглядалася група з компонентів D_{11}, D_{12}). Для кожної із відтворених компонентів задаються початкові можливі діапазони зміни їх значень, зокрема для D_{11}^0 взято діапазон $1,00e-08 \div 1,00e-06$, для D_{12}^0 — діапазон $1,00e-10 \div 1,00e-08$. Кожен з цих діапазонів розбивається на m_1 (для D_{11}) і m_2 (для D_{12}) проміжних наближень. Отримали мінімальне значення $J(D_{11}, D_{12})_{\min} = 0,00074$, що відповідає відновленим значенням $D_{11} = 1,00e-07$ та $D_{12} = 1,00e-09$.

На другому циклі регуляризації здійснюється аналогічний аналіз значень функціонала-нев'язки $J(D_{11}, D_{12})$, де для D_{11} взято діапазон $0,80e-07 \div 2,00e-07$, а для D_{12} — діапазон $0,700e-09 \div 3,00e-09$. Кожен з цих діапазонів знову розбивається на ряд проміжних початкових наближень, як для першого циклу. Нові обчислені значення невязок при різних значеннях початкових наближень відновлених параметрів (D_{11}, D_{12}) аналогічно заносяться в таблицю. Парою наближень, що відповідає мінімальному значенню функціонала-нев'язки $J(D_{11}, D_{12})_{\min} = 0,00005$, для даного циклу регуляризації (цикл 2) відповідає відновленим значенням коефіцієнтів дифузії $D_{11}^0 = 1,50e-07$ та $D_{12}^0 = 1,00e-09$.

На третьому циклі регуляризації аналізуються значення функціонала-нев'язки $J(D_{11}, D_{12})$ для діапазонів початкових наближень відтворених параметрів, взято в околах їх оптимальних значень, отриманих на другому циклі регуляризації, тобто $D_{11}^0 = 1,50e-07$, $D_{12}^0 = 1,00e-09$. Для D_{11} взято діапазон $1,30e-07 \div 1,70e-07$, для D_{12} — $0,80e-09 \div 1,20e-09$, де кожен з них знову аналогічно попереднім циклам ще дрібніше розбивається на ряд проміжних початкових наближень. Нові обчислені значення невязок при різних значеннях початкових наближень відновлених параметрів (D_{11}, D_{12}) занесені в таблицю.

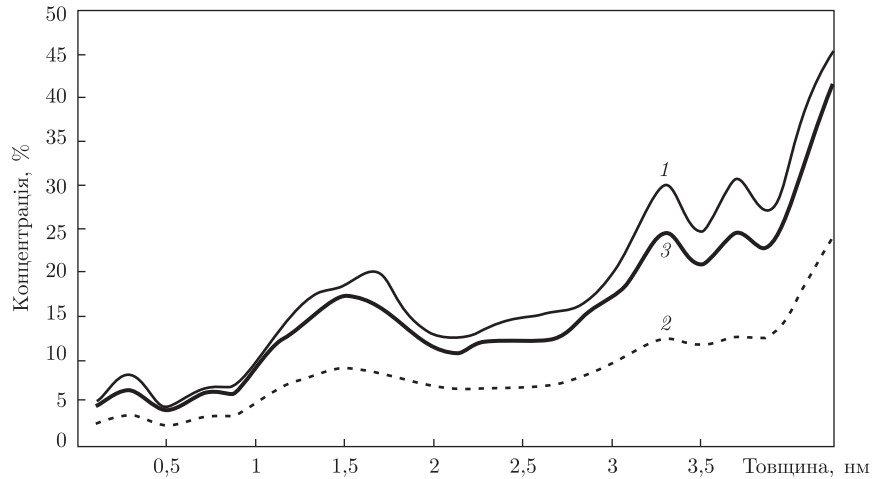


Рис. 2. Концентраційні Fe профілі вздовж координати товщини, побудовані за коефіцієнтами дифузії $D_{11,m}$ та $D_{22,m}$, відтвореними за процедурою функціональної ідентифікації (крива 1), за константними початковими значеннями (крива 2) та експериментальним слідом (крива 3)

Як видно з табл. 1, мінімальне значення функціонала-нев'язки для даного циклу регуляризації (цикл 3) становить те ж саме, що отримане на попередньому циклі регуляризації $J(D_{11}, D_{12})_{\min} = 0,00005$. Цьому мінімальному значенню функціонала відповідає та сама пара наближень, що і на попередньому циклі: $D_{11} = 1,50e-07$ та $D_{12} = 1,00e-09$.

На рис. 1, а для координати $z = 7$ нм показано процес еволюції функціональної залежності в часі коефіцієнта дифузії D_{11,k_1}^n , відновлений згідно з регуляризаційною процедурою ідентифікації за формулою (11). Тут подані групи ітерацій, що найістотніше впливають на процес збіжності модельного розв'язку U_{1,k_1} до його експериментального сліду $f_{1,k_1}(t, \gamma_{k_1})$. Початкове наближення відтворюваної компоненти коефіцієнта дифузії взято $D_{11,m}^0(t) = 1,0 \cdot 10^{-8}$ м²/с. Виконано понад 2500 ітерацій, розбитих на групи.

Діаграми на рис. 1, б демонструють аналогічні результати ідентифікації, отримані щодо еволюції функціональної залежності в часі компонента коефіцієнта дифузії D_{12,k_1}^n (що визначає дифузію першої компоненти в присутності другої, $z = 7$ нм).

Рис. 2 ілюструє порівняльний аналіз побудованих концентраційних профілів (компонента Fe) вздовж координати товщини для окремого фрагмента мультикомполімеру в діапазоні $0 < z < 4,3$ нм, а саме, профілю концентрацій, побудованого з урахуванням відтворених коефіцієнтів дифузії $D_{11,m}$ та $D_{22,m}$ за процедурою функціональної ідентифікації (крива 1), профілю, побудованого за константними початковими значеннями відповідних коефіцієнтів

Таблиця 1. Залежності значень функціонала-нев'язки від початкових значень D_{11} , D_{12} (цикл 3)

для коефіцієнта дифузії D_{11}	Діапазони значень початкових наближень				
	для коефіцієнта дифузії D_{12}				
	0,80e-09	0,90e-09	1,00e-09	1,10e-09	1,20e-09
1,30e-07	0,00208	0,00097	0,00014	0,00126	0,00237
1,40e-07	0,00214	0,00103	0,00008	0,00118	0,00229
1,50e-07	0,00220	0,00111	0,00005	0,00105	0,00214
1,60e-07	0,00224	0,00119	0,00011	0,00098	0,00205
1,70e-07	0,00228	0,00123	0,00016	0,00092	0,00200

дифузії (крива 2), що, як правило, використовуються в традиційних наближених розрахунках та експериментальним слідом на цій ділянці (крива 3).

Як видно з рис. 2, концентраційна крива, отримана за допомогою ідентифікованих функціональних залежностей коефіцієнтів дифузії, істотно відрізняється (більше 20%) від профілю, побудованого за усередненими константними значеннями відповідних коефіцієнтів дифузії, взятими в початковий момент часу, та значно краще наближує експериментальний профіль (крива 3) вздовж всього досліджуваного діапазону.

1. Tamion A., Ott F., Berche P.-E. et al. Magnetization depth profile of (Fe/Dy) multilayers // J. of Magnetism and Magnetic Mat. – 2008. – **320**, Iss. 21. – P. 2650–2659.
2. Kärger J., Grinberg F., Heitjans P. Diffusion fundamentals. – Leipzig: Leipzig Univ., 2005. – 615 p.
3. Sergiyenko I. V., Deineka V. S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. – New York: Kluwer. – 2005. – 400 p.
4. Леньок М. П., Петрик М. Р. Интегральные перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах. – Київ: Наук. думка, 2000. – 372 с.
5. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. думка, 2009. – 640 с.
6. Дейнека В. С., Петрик М. Р. Параметрична ідентифікація кінетичних параметрів дифузії в багатошарових неоднорідних Fe/Dy-наномультікомпозиатах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: Зб. наук. праць, 2011. – Вип. 5. – С. 85–111.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Тернопільський національний технічний
університет ім. Івана Пулюя

Надійшло до редакції 09.07.2013

Академик НАН України **В. С. Дейнека, М. Р. Петрик**

Функциональная идентификация градиентными методами и интегральными преобразованиями параметров задач диффузии в неоднородных наномультікомпозиатах

Рассмотрен вопрос идентификации градиентными методами параметров диффузионной модели диффузии Fe/Dy в многослойных нанопленках и применения интегральных преобразований Фурье, Лапласа для получения решений прямых и сопряженных задач. Проведены численные эксперименты.

Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Deineka, M. R. Petryk**

Functional identification of parameters of the problems of diffusion in inhomogeneous nanomulticomposites by gradient methods and integral transformations

The questions of the identification of parameters of the diffusion models of diffusion of Fe/Dy with gradient methods in multilayer nanofilms and the application of the integral Fourier and Laplace transformations to the solution of direct and adjoint problems are considered. Numerical experiments are conducted.