УДК 517.9

**С. П. Дегтярев**

# О гладком решении квазилинейного эллиптико-параболического уравнения

*(Представлено академиком НАН Украины А. М. Ковалевым)*

*Рассмотрена задача с неизвестной границей раздела областей параболичности и эллиптичности квазилинейного эллиптико-параболического уравнения. Такая задача моделирует фильтрацию в частично насыщенной пористой среде. Локально по времени доказано существование гладкого решения задачи, включая гладкость неизвестной границы.*

Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Пусть, далее, $g(x,t)$, $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$, $u_0(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, $f(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$ — заданные функции и пусть заданная функция $c(u)$, $u \in \mathbb{R}^1$ — такова, что $c(u) \equiv 0$ при $u \leqslant 0$ и $c'(u) > 0$ при $u \geqslant 0$. Рассмотрим в области $\Omega_T$ следующую начально-краевую задачу для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}c(u) - \Delta u = 0, \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$c(u(x,0)) = c(u_0(x)), \tag{2}$$

$$u(x,t) = g(x,t), \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \tag{3}$$

Задача подобного типа возникает, в частности, в теории фильтрации (см. [1–11] и имеющуюся там библиогр.), а также в некоторых других областях. Так как в той области, где $u > 0$, уравнение (1) является параболическим, а в области, где $u < 0$, оно эллиптично, то задача (1)–(3) представляет собой эллиптико-параболическую задачу. При этом уравнение (1) естественным образом порождает задачу со свободной границей — ключевыми неизвестными в рассматриваемой задаче являются сами области, где $u < 0$ или $u > 0$, а также граница раздела между ними, которая и представляет собой свободную (неизвестную) границу.

В случае одной пространственной переменной, когда $\Omega$ представляет собой отрезок прямой, $\Omega = (a,b)$, задача вида (1)–(3) изучалась в [2–9], где при определенных предположениях на данную задачу было получено существование слабого решения, а также существование регулярной функции $x = s(t) \in (a,b)$, разделяющей области $u > 0$ и $u < 0$. В работе [10] рассматриваемая задача изучалась в случае двумерной фильтрации, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, и при некоторых условиях типа монотонности на данную задачу было установлено, что свободная граница является непрерывной.

В многомерном же случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, уравнение (1) и задача (1)–(3) в обобщенной постановке исследовались, в частности, в [1, 11], причем в [11] задача рассматривалась в терминах вязких решений и была доказана корректность задачи в такой обобщенной постановке.

Классические решения многомерной задачи (1)–(3), включающие гладкость свободной границы, рассматривались в работе [12]. При этом в указанной работе решение уравнения (1) и неизвестная поверхность раздела изучались в классах гладких функций, являющихся модификациями анизотропных пространств Гельдера. В этих пространствах для всех производных рассматриваемых функций предполагались конечными двойные полунормы вида (16). Кроме того, в эллиптической области уравнения (1) не доказывалась гладкость производной по времени от решения.

Целью данной работы является рассмотреть задачу (1)–(3) в общей многомерной постановке, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, причем не в обобщенной постановке, а в классических терминах гладких решений. При этом мы будем рассматривать квазилинейное уравнение (1) и задачу (1)–(3) как задачу со свободной границей и сконцентрируем внимание на самой свободной границе. Важным является то, что, в отличие от работы [12], мы покажем, что свободная граница и решение в параболической области принадлежат обычным анизотропным пространствам Гельдера $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}$ (без дополнительной "экзотики"), а в эллиптической области решение принадлежит "почти" классу $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}$ — оно имеет в этой области производную по времени из класса Гельдера. Мы считаем эти обстоятельства достаточно важными, так как применяемая в данной работе техника сопряжения эллиптической и параболической частей задачи позволяет рассмотреть и другие эллиптико-параболические задачи в стандартных пространствах Гельдера.

Таким образом, мы покажем, что при достаточно гладких начальных данных рассматриваемая нелинейная задача локально по времени (на некотором интервале $[0,T]$) имеет классическое гладкое решение, при этом граница раздела "фаз" является гладкой поверхностью, задаваемой функцией, имеющей производные из класса Гельдера.

Введем теперь некоторые обозначения, функциональные пространства и сформулируем задачу (1)–(3) в эквивалентной формулировке, традиционной для задач со свободной границей.

Во-первых, пусть для простоты (для нас на самом деле важно лишь, что $c'(u) > 0$ при $u \geqslant 0$)

$$c(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ u, & u \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть, далее, $\Omega$ — двусвязная область в $\mathbb{R}^N$ с границей, состоящей из двух непересекающихся поверхностей $\Gamma^+$ и $\Gamma^-$, $\partial\Omega = \Gamma^+ \bigcup \Gamma^-$. Пусть $\Gamma \subset \Omega$ — гладкая поверхность, лежащая строго между $\Gamma^+$ и $\Gamma^-$ и разделяющая область $\Omega$ на две подобласти $\Omega^+$ и $\Omega^-$ с границами соответственно $\partial\Omega^+ = \Gamma^+ \bigcup \Gamma$ и $\partial\Omega^- = \Gamma^- \bigcup \Gamma$. Мы обозначаем для $T > 0$: $\Omega_T \equiv \Omega \times [0,T]$, $\Gamma_T \equiv \Gamma \times [0,T]$, $\Gamma_T^\pm \equiv \Gamma^\pm \times [0,T]$.

Пусть в областях $\Omega^\pm$ заданы функции $u_0^\pm(x)$ такие, что

$$u_0^+ > 0 \quad \text{в} \quad \Omega^+, \qquad u_0^- < 0 \quad \text{в} \quad \Omega^-, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial n} = \frac{\partial u_0^-}{\partial n} \geqslant \gamma > 0, \qquad u_0^\pm(x) = 0, \qquad x \in \Gamma; \qquad \Delta u_0^-(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{6}$$

где $\vec{n}$ — нормаль к $\Gamma$, направленная в сторону $\Omega^+$, а через $\gamma$, $\nu$, $\mu$ и $C$ будем обозначать все встречающиеся абсолютные константы либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных данных задачи. Функции $u_0^\pm(x)$ — начальные данные для нашей задачи, а поверхность $\Gamma$ — начальное положение свободной границы, которую мы также будем называть границей раздела фаз.

Введем теперь функцию, параметризующую неизвестную поверхность раздела фаз в моменты времени $t > 0$, как это сделано в [13]. Для этого, предполагая $\Gamma$ достаточно гладкой (точное требование сформулировано ниже), введем в достаточно малой окрестности $\mathcal{N}$ поверхности $\Gamma$ координаты $(\omega, \lambda)$, где $\omega$ — локальные координаты на поверхности $\Gamma$, $\lambda \in R$, $|\lambda| \leqslant \lambda_0$, так что, если $x \in \mathcal{N}$, то при фиксированном выборе локальных координат $\omega$ единственным образом

$$x = x_\Gamma(\omega) + \lambda \vec{n}(\omega) = x(\omega, \lambda), \qquad |\lambda| \leqslant \lambda_0, \tag{7}$$

где $x_\Gamma(\omega) \in \Gamma$, а $\lambda$ — отклонение точки $x$ от поверхности $\Gamma$ по нормали $\vec{n}$ к $\Gamma$, направленной, напомним, внутрь $\Omega^+$.

Пусть $\rho(x,t)$ — достаточно малая функция, определенная на $\Gamma_T = \Gamma \times [0,T]$, $\rho(x,0) \equiv \equiv 0$. Так как мы будем использовать локальные координаты $\omega$ на $\Gamma$, то каждым таким локальным координатам $\omega$ и функции $\rho(x,t)$ естественным образом соответствует функция $\rho(\omega,t)$, за которой мы сохраняем то же самое обозначение $\rho$. Тогда параметризация

$$x = x_\Gamma(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,t)$$

при каждом $t \in [0,T]$ задает некоторую поверхность $\Gamma_\rho(t)$, разделяющую область $\Omega$ на две подобласти — $\Omega^+_\rho$ и $\Omega^-_\rho$. Отметим, что эта поверхность не зависит от того или иного выбора локальных координат $\omega$, а определяется только значениями функции $\rho(x,t)$ на поверхности $\Gamma_T$. Обозначим поверхность в $\Omega_T \equiv \Omega \times [0,T]$ через $\Gamma_{\rho,T} \equiv \bigcup_{t\in[0,T]} \Gamma_\rho(t) \times \{t\}$. Обозначим также через $\Omega^\pm_{\rho,T}$ те области, на которые поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ разбивает область $\Omega_T$.

Пусть еще на поверхностях $\Gamma^\pm_T \equiv \Gamma^\pm \times [0,T]$ заданы функции $g^\pm(x,t)$ такие, что

$$g^+(x,t) > \nu > 0 \qquad \text{и} \qquad g^-(x,t) < -\nu < 0 \qquad \text{при} \qquad (x,t) \in \Gamma^\pm_T \tag{8}$$

соответственно.

Рассмотрим задачу определения неизвестной функции $\rho(\omega,\tau)$, определенной на $\Gamma_T$, и функций $u^\pm(y,\tau)$, определенных в $\Omega_{\rho,T}$ из соотношений

$$L^+_0 u^+(y,\tau) \equiv \frac{\partial u^+(y,\tau)}{\partial \tau} - \Delta u^+(y,\tau) = 0, \qquad (y,\tau) \in \Omega^+_{\rho,T}, \tag{9}$$

$$L^-_0 u^-(y,\tau) \equiv -\Delta u^+(y,\tau) = 0, \qquad (y,\tau) \in \Omega^-_{\rho,T}, \tag{10}$$

$$u^\pm(y,0) = u^\pm_0(y), y \in \overline{\Omega^\pm}; \qquad \rho(\omega,0) = 0, \qquad \omega \in \Gamma, \tag{11}$$

$$u^\pm(y,\tau) = g^\pm(y,\tau), \qquad (y,\tau) \in \Gamma^\pm_T, \tag{12}$$

$$u^+(y,\tau) = u^-(y,\tau) = 0, \qquad (y,\tau) \in \Gamma_{\rho,T}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial u^+(y,\tau)}{\partial \nu_\tau} = \frac{\partial u^-(y,\tau)}{\partial \nu_\tau}, \qquad (y,\tau) \in \Gamma_{\rho,T}, \tag{14}$$

где $\nu_\tau$ — нормаль к $\Gamma_\rho(\tau)$, направленная в сторону $\Omega^+_{\rho,T}$.

Нетрудно видеть, что в силу условий (13) и (14), а также в силу условий на $g^\pm(y,\tau)$ и принципа максимума задача (9)–(14) полностью эквивалентна задаче (1)–(3) для квазилинейного уравнения (1) с определенной в (4) функцией $c(u)$, причем функция $u(y,\tau) \equiv \equiv u^\pm(y,\tau)$, $(y,\tau) \in \Omega^\pm_{\rho,T}$, удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле (благодаря непрерывности самой функции и ее градиента при переходе через поверхность раздела фаз).

Определим теперь нужные нам пространства гладких функций. Для $l > 0$ нецелого $H^l(\overline{\Omega}) \equiv C^l(\overline{\Omega})$ означает стандартное пространство функций $u(x)$, непрерывных в $\overline{\Omega}$ по Гельдеру с показателем $\alpha = l - [l]$ вместе со своими частными производными до порядка $[l]$ включительно с нормой $|u|_{\overline{\Omega}}^{(l)}$, $H^{l,l/2}(\overline{\Omega_T}) \equiv C^{l,l/2}(\overline{\Omega_T})$ — аналогичное пространство гладких функций $u(x,t)$ с гладкостью до порядка $l$ по переменным $x$ и с гладкостью до порядка $l/2$ по переменной $t$ с нормой $|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(l)}$ (см. определение этих пространств, например, в [14]).

Для произвольной функции $f(x,t)$ и для двух точек $(x,t)$, $(y,\tau)$ обозначим

$$\Delta_{x,y} f(x,t) = f(x,t) - f(y,t), \qquad \Delta_{t,\tau} f(x,t) = f(x,t) - f(x,\tau) \quad - \tag{15}$$

разности от функции $f(x,t)$ по переменным $x$ и $t$ соответственно. Следуя работе [15], введем следующую полунорму для $\alpha, \beta \in (0,1)$ и функции $u(x,t)$:

$$[u]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,\beta)} = \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{\Omega_T}} \frac{|u(x,t) - u(y,t) - u(x,\tau) + u(y,\tau)|}{|x-y|^{\alpha}|t-\tau|^{\beta}} =$$

$$= \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{\Omega_T}} \frac{|\Delta_{t,\tau}\Delta_{x,y} u(x,t)|}{|x-y|^{\alpha}|t-\tau|^{\beta}}. \tag{16}$$

Определим банахово пространство гладких функций $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ как пространство, в котором конечна норма ($\alpha \in (0,1)$):

$$|u|_{\overline{\Omega}_T}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \equiv |u|_{C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})} \equiv |u|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} + \sum_{|s|=1} |D_x^s u|_{\overline{\Omega}_T}^{(2+\alpha)} + \sum_{|s|=2} |D_x^s u|_{\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha)} +$$

$$+ \sum_{|s|=3} |D_x^s u|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} + |u_t|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} + \sum_{|s|=1} |D_x^s u_t|_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha)} + \langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(1/2)} + [u_t]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)}, \tag{17}$$

где

$$\langle v\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(\gamma)} \equiv \sup_{(x,t),(x,\overline{t})\in\overline{\Omega}_T} \frac{|v(x,t) - v(x,\overline{t})|}{|t-\overline{t}|^{\gamma}}, \qquad \langle v\rangle_{x,\overline{\Omega}_T}^{(\gamma)} \equiv \sup_{(x,t),(\overline{x},t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{|v(x,t) - v(\overline{x},t)|}{|x-\overline{x}|^{\gamma}} \; -$$

константы Гельдера от функции $v(x,t)$ по переменным $t$ и $x$ соответственно. Мы используем также обозначение

$$|v|_{\overline{\Omega}_T}^{(0)} = \max_{\overline{\Omega}_T} |v(x,t)|.$$

Отметим, что пространство $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ шире пространства $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\overline{\Omega_T})$. Оно отличается от пространства $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\overline{\Omega_T})$ тем, что не содержит $\langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(1+\alpha)/2}$ с показателем $(1+\alpha)/2$, а содержит только $\langle u_t\rangle_{t,\overline{\Omega}_T}^{(1/2)}$ с показателем $1/2$, но вместо этого дополнительно содержит $[u_t]_{\overline{\Omega}_T}^{(\alpha,1/2)}$ (для функций из пространства $C^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\overline{\Omega_T})$ последняя полунорма также конечна).

Аналогично, стандартным образом с использованием локальной параметризации определяются поверхности классов $C^{l,l/2}$ и $C^{3+\alpha;3/2,\alpha}$ и соответствующие классы функций, определенных на этих поверхностях.

Относительно заданных функций в (9)–(14) мы, кроме условий (6) и (8), предполагаем следующее.

Пусть $\alpha \in (0,1)$ фиксировано. Поверхности $\Gamma$, $\Gamma^{\pm}$ и функции $u_0^{\pm}$, $g^{\pm}$ принадлежат классам

$$\Gamma, \Gamma^{\pm} \in C^{6+\alpha}, \qquad u_0^{\pm}(y) \in C^{6+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm}), \qquad g^{\pm}(y,\tau) \in C^{6+\alpha}(\Gamma_T^{\pm}). \tag{18}$$

Кроме условий гладкости данных задачи, ввиду того, что мы хотим получить гладкое решение, предполагаем выполненными стандартные условия согласования граничных и начальных условий до первого порядка включительно при $\tau = 0$, $y \in \Gamma$, $\Gamma^{\pm}$. Опишем эти условия.

Во-первых, должны выполняться условия согласования нулевого порядка:

$$u^{\pm}(y,0)|_{\Gamma^{\pm}} = u_0^{\pm}(y)|_{\Gamma^{\pm}} = g^{\pm}(y,0), \qquad u^{\pm}(y,0)|_{\Gamma} = u_0^{\pm}(y)|_{\Gamma} = 0. \tag{19}$$

Заметим, далее, что из задачи (9)–(14) определяются начальные значения производных по времени от функций $u^+$, $u^-$ и $\rho$, которые мы обозначим соответственно

$$u^{(1)+}(y) = \frac{\partial u^+}{\partial \tau}(y,0), \qquad u^{(1)-}(y) = \frac{\partial u^-}{\partial \tau}(y,0), \qquad \rho^{(1)}(y) = \frac{\partial \rho}{\partial \tau}(y,0).$$

Функция $u^{(1)+}(y)$ определяется из уравнения (9):

$$u^{(1)+}(y) = \frac{\partial u^+}{\partial \tau}(y,0) = \Delta u^+(y,0) = \Delta u_0^+(y) \in C^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^+).$$

Эта функция должна удовлетворять условию на $\Gamma^+$

$$u^{(1)+}(y)|_{y\in\Gamma^+} = \frac{\partial u^+}{\partial \tau}(y,0)|_{y\in\Gamma^+} = \frac{\partial g^+}{\partial \tau}(y,0). \tag{20}$$

Определим теперь функцию $\rho^{(1)}(x) = \rho^{(1)}(\omega)$. Из условия (13) следует, что при $\tau \geqslant 0$ и при $(y,\tau) \in \Gamma_{\rho,T}$, т. е. при $y = y(\omega,\tau) = y(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,\tau)$, выполнено

$$u^+(y(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,\tau),\tau) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по $\tau$ при $\tau = 0$, ввиду определения функций $u^{(1)+}$ и $\rho^{(1)}(x)$, получаем

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial \vec{n}}\rho^{(1)}(x) + u^{(1)+}(x) = 0, \qquad x \in \Gamma.$$

Отсюда

$$\rho^{(1)}(x) = -\frac{u^{(1)+}(x)}{\dfrac{\partial u_0^+}{\partial \vec{n}}} \in C^4(\Gamma). \tag{21}$$

Рассмотрим функцию $u^{(1)-}(x)$. По условию задачи, функция $u^-(y,\tau)$ при $\tau \geqslant 0$ удовлетворяет задаче

$$-\triangle u^-(y,\tau) = 0, \qquad (y,\tau) \in \Omega^-_{\rho,T},$$

$$u^-(y,\tau)|_{\Gamma_T^-} = g^-(y,\tau), \qquad u^-(y,\tau)|_{\Gamma_{\rho,T}} = 0. \tag{22}$$

Дифференцируя первые два из этих соотношений по $\tau$ при $\tau = 0$, причем понимая производную от уравнения Лапласа в смысле распределений, получаем соотношения

$$-\triangle u_\tau^-(y,0) = 0, \qquad y \in \Omega^-, \tag{23}$$

$$u_\tau^-(y,0)|_{\Gamma^-} = g_\tau^-(y,0), \tag{24}$$

где уравнение понимается в обобщенном смысле. Так как при $(y,\tau) \in \Gamma_{\rho,T}$ выполнено $y = y(\omega,\tau) = y(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,\tau)$, то третье условие в (22) имеет вид

$$u^-(y(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,\tau),\tau) = 0.$$

Дифференцируя это соотношение по $\tau$, получаем

$$\langle \nabla_y u^-(y(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,\tau),\tau)\rho_\tau(\omega,\tau), \vec{n}(\omega)\rangle + u_\tau^-(y(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,\tau),\tau) = 0. \tag{25}$$

Полагая в этом соотношении $\tau = 0$, имеем

$$u_\tau^-(y,0)|_\Gamma = -\frac{\partial u_0^-(y)}{\partial \vec{n}}\rho_\tau(\omega,0) = -\frac{\partial u_0^-(y)}{\partial \vec{n}}\rho^{(1)}(\omega). \tag{26}$$

Таким образом, функция $u^{(1)-}(y) = u_\tau^-(y,0)$ однозначно определяется из задачи (23), (24), (26), причем, ввиду наших предположений о гладкости данных задачи, $u^{(1)-}(y) \in C^{4+\alpha}(\overline{\Omega}^-)$.

Приведем, наконец, еще одно условие согласования на поверхности $\Gamma$ при $\tau = 0$, которое является необходимым следствием условия (14). Полагая в этом условии, как и выше, $y = y(\omega,\tau) = y(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega,\tau)$, дифференцируя полученное соотношение по $\tau$ при $\tau = 0$, используя условие (6) (благодаря которому сокращаются слагаемые с $\partial\nu_\tau/\partial\tau$), ввиду определения функций $u^{(1)+}$, $u^{(1)-}$ и $\rho^{(1)}$, получаем

$$\left(\frac{\partial^2 u_0^-}{\partial \vec{n}^2} - \frac{\partial^2 u_0^+}{\partial \vec{n}^2}\right)\rho^{(1)}(x) + \left(\frac{\partial u^{(1)-}}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial u^{(1)+}}{\partial \vec{n}}\right) \equiv 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{27}$$

Сформулируем теперь основной результат.

**Теорема 1.** *Пусть в задаче* (9)–(14) *выполнены условия* (5), (6), (8), (18), (19), (20), (27). *Тогда для некоторого $T > 0$ задача* (9)–(14) *(а тем самым и задача* (1)–(3)*) имеет единственное гладкое решение для $\tau \in [0,T]$, причем*

$$|\rho|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha)} + |u^+|_{\overline{\Omega}_{\rho,T}^+}^{(3+\alpha)} + |u^-|_{\overline{\Omega}_{\rho,T}^-}^{(3+\alpha;3/2,\alpha)} \leqslant C_0(T),$$

*т. е., в частности, граница раздела фаз является гладкой поверхностью.*

Доказательство этой теоремы базируется на методе, изложенном в [12].

Общая схема применяемого нами метода такова. С помощью некоторой описанной ниже замены переменных, зависящей от неизвестной функции $\rho$, задача (9)–(14) сводится к задаче в известных фиксированных областях для неизвестной тройки $\psi = (u^+, u^-, \rho)$. При этом вся задача может быть представлена в виде уравнения в некоторых банаховых пространствах

$$A(\psi) = F \tag{28}$$

с некоторым гладким по $\psi$ нелинейным оператором $A$ (точные определения будут даны ниже). Далее определяется элемент $\psi_0 = (w^+, w^-, \sigma)$ как продолжение в область $t > 0$ начальных значений задачи (9)–(14) таким образом, что, кроме того, $\partial w^\pm/\partial t = \partial u^\pm/\partial t$, $\partial\sigma/\partial t = \partial\rho/\partial t$ при $t = 0$. При этом, ввиду требований повышенной гладкости начальных данных, элемент $\psi_0$ является более гладким, чем произвольный элемент $\psi$ из рассматриваемого пространства. Затем уравнение (28) представляется в виде

$$A'(\psi_0)\varphi = [F - A(\psi_0)] - [A(\psi_0 + \varphi) - A(\psi_0) - A'(\psi_0)\varphi] \equiv F_0 + R(\varphi), \tag{29}$$

где $\varphi = \psi - \psi_0$, $A'(\psi_0)$ — линейный оператор, представляющий собой производную Фреше оператора $A(\psi)$ в точке $\psi_0$, т. е. главная линейная часть оператора $A(\psi)$ в точке $\psi_0$. Ввиду повышенной гладкости элементов $F$ и $A(\psi_0)$, а также ввиду гладкости оператора $A(\psi)$ по $\psi$, для правой части (29) при достаточно малых $T$ и $\varphi$ справедливы оценки (так как оператор $R(\varphi)$ содержит только "квадратичные" по $\varphi$ слагаемые)

$$\|F_0\| \leqslant CT^\delta, \qquad \|R(\varphi)\| \leqslant C\|\varphi\|^2, \qquad \|R(\varphi_2) - R(\varphi_1)\| \leqslant C\max_i \|\varphi_i\| \|\varphi_2 - \varphi_1\|. \tag{30}$$

Далее нашей задачей будет показать, что линейный оператор $A'(\psi_0)$ имеет ограниченный обратный и, следовательно, уравнение (29) может быть записано в виде

$$\varphi = [A'(\psi_0)]^{-1}F_0 + [A'(\psi_0)]^{-1}R(\varphi) \equiv K(\varphi). \tag{31}$$

В силу соотношений (30) легко проверить, что при достаточно малом $T > 0$ оператор $K(\varphi)$ в правой части последнего соотношения переводит достаточно малый шар $\mathcal{B}_r = \{\varphi : \|\varphi\| \leqslant \leqslant r\}$ в себя и является там сжимающим, т. е. имеет в $\mathcal{B}_r$ единственную неподвижную точку, что и дает решение уравнения (28), а тем самым и задачи (9)–(14).


1. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**, No 1. – P. 311–341.
2. *Van Duyn C. J., Peletier L. A.* Nonstationary filtration in partially saturated porous media // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1982. – **78**, No 2. – P. 173–198.
3. *Bertsch M., Hulshof J.* Regularity results for an elliptic-parabolic free boundary problem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1986. – **297**, No 1. – P. 337–350.
4. *Di Benedetto E., Gariepy R.* Local behavior of solutions of an elliptic-parabolic equation // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1987. – **97**, No 1. – P. 1–17.
5. *Fasano A., Primicerio M.* Nonstationary filtration in partially saturated porous media // J. Inst. Math. Appl. – 1979. – **23**, No 4. – P. 503–517.
6. *Hulshof J.* An elliptic-parabolic free boundary problem: continuity of the interface // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – 1987. – **106A**, No 3. – P. 327–339.
7. *Hulshof J., Peletier L. A.* An elliptic-parabolic free boundary problem // Nonlinear Anal: Theory, Meth. Appl. – 1986. – **10**, No 12. – P. 1327–1346.
8. *Van Duyn C. J.* Nonstationary filtration in partially saturated porous media: continuity of the free boundary // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1982. – **79**, No 3. – P. 261–265.
9. *Gianni R., Mannucci P.* A free boundary problem for a degenerate parabolic equation: Regularity of the solution // Adv. Math. Sci. Appl. – 1999. – **9**, No 1. – P. 557–569.
10. *Chen X., Friedman A., Kimura T.* Nonstationary filtration in partially saturated porous media // Eur. J. Appl. Math. – 1994. – **5**, No 3. – P. 405–429.
11. *Mannucci P., Vazquez J. L.* Viscosity solutions for elliptic-parabolic problem // Nonlinear Different. Equal. Appl. – 2007. – **14**, No 1–2. – P. 75–90.
12. *Bazaliy B. V., Degtyarev S. P.* Classical solutions of many-dimensional elliptic-parabolic free boundary problems // Ibid. – 2009. – **16**, No 4. – P. 421–443.

13. *Hanzawa E.-I.* Classical solutions of the Stefan problem // Tohoku Math. J. – 1981. – **33**. – P. 297–335.
14. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
15. *Солонников В. А.* Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 6. – P. 1388–1424.



*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк*



*Поступило в редакцию 26.04.2013*



**С. П. Дегтярьов**


## Про гладкий розв'язок квазілінійного еліптико-параболічного рівняння


*Розглянуто задачу з невідомою межею розділу областей параболічності та еліптичності квазілінійного еліптико-параболічного рівняння. Ця задача моделює фільтрацію в частково насиченому пористому середовищі. Локально за часом доведено існування гладкого розв'язку задачі, у тому числі гладкість невідомої межі.*



**S. P. Degtyarev**


## On a smooth solution of a quasilinear elliptic-parabolic equation


*We consider the free boundary problem with unknown boundary between the domains of ellipticity and parabolicity of a quasilinear elliptic-parabolic equation. The problem models the filtration in a partially saturated porous medium. We prove locally in time the existence of a smooth solution of the problem including the smoothness of the free boundary.*