УДК 004.42:510.69

О.С. Шкільняк

ПОБУДОВА СЕКВЕНЦІЙНИХ ЧИСЛЕНЬ МУЛЬТИМОДАЛЬНИХ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК

Досліджено першопорядкові композиційно-номінативні мультимодальні логіки кванторно-еквацiйного рівня. Для цих логік побудовано числення секвенційного типу. Для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

Вступ

Розвиток програмування та пов'язана з цим поява нових задач і проблем характеризуються виникненням нових розділів математичної логіки, які мають велике практичне значення. Важливе місце серед них посідають модальні логіки. Особливого значення такі логіки набувають у зв'язку зі створенням та розвитком сучасних інформаційних та програмних систем. Апарат темпоральних логік успішно застосовується для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. Для опису сучасних інтелектуальних систем, баз даних і баз знань використовуються епістемічні логіки (див., напр., [1]). Можливості традиційних модальних логік і композиційно-номінативних логік квазіарних часткових предикатів [2] поєднують композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ). Центральним поняттям КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). На основі спеціального уточнення цього поняття збудовано та досліджено [3–5] нові класи КНМЛ реномінативного та першопорядкових рівнів. Важливим класом КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС), які відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей, описуючи переходи від одного стану світу до іншого. Традиційні модальні логіки (алетичні, темпоральні, епістемічні) можуть природним чином розглядатися в межах транзиційних КНМЛ.

Під ТМС розумітимемо об'єкти вигляду $((\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C), Fm, Jm)$. Тут $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу; $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на станах вигляду $\mathrm{R} \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$, Pr – множина предикатів на даних станів світу; C – множина композицій на Pr, C визначається базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня та базовими модальними композиціями; Fm – множина формул мови; Jm – відображення інтерпретації формул у станах світу.

Нові класи ТМС – мультимодальні транзиційні системи (ММС) – запропоновано в [6, 7]. ММС – це ТМС із множиною відношень $\boldsymbol{R} = \{\triangleright_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями $\mathbf{K}_i$, $i \in I$, у яких кожному $\triangleright_i$ зіставлено відповідну $\mathbf{K}_i$.

Для КНМЛ номінативних рівнів $\boldsymbol{S}$ конкретизуємо як множину неокласичних алгебраїчних систем вигляду $\alpha = \left(A_\alpha, Pr_\alpha\right)$, де Pr_α – множина еквітонних предикатів вигляду ${}^{V}\!A_\alpha \to \{T, F\}$.

Тоді $Pr = \bigcup\limits_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ – множина предикатів усіх станів, $A = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$ – множина усіх базових даних світу.

Окремим випадком ММС є загальні ТМС, для них $\boldsymbol{R} = \{\triangleright\}$ та маємо єдину базову модальну композицію $\Box$.

Мета даної роботи – дослідження мультимодальних логік (ММЛ) еквітонних предикатів кванторного-еквацiйного рівня та побудова для них числень секвенційного типу. Для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

Невизначені тут поняття тлумачимо в сенсі робіт [2, 4, 8].

1. Семантичні властивості мультимодальних логік

На кванторному-екваційному рівні базовими загальнологічними композиціями є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$ та спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за іменами предикати рівності $=_{xy}$, вони задають слабку (з точністю до визначеності) рівність компонентів даного з іменами x та y.

Опишемо мову ММС кванторного-еквацийного рівня. Алфавіт мови: множини V предметних імен та Ps предикатних символів; символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $=_{xy}$; множина $Ms=\{K_i \mid i\in I\}$ символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множина Fm формул мови визначається індуктивно:

FA) кожний $p\in Ps$ та кожний $=_{xy}$ є формулою; такі формули – атомарні;

FP) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формула;

FR) нехай Φ – формула; тоді $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – формула;

F$\exists$) нехай Φ – формула; тоді $\exists x\,\Phi$ – формула;

FM) нехай Φ – формула, $K_i\in Ms$; тоді $K_i\,\Phi$ – формула.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на станах світу $Im: Ps\times S\to Pr$, при цьому $Im(p,\alpha)\in Pr_\alpha$ та $Im(=_{xy})=\ =_{xy}$ для всіх $x,y\in V$. Продовжимо Im до відображення інтерпретації формул на станах $Jm: Fm\times S\to Pr$. При цьому маємо $Jm(\Phi,\alpha)\in Pr_\alpha$.

IA) $Jm(p,\alpha)=Im(p,\alpha)$ для кожного $p\in Ps$; $Jm(=_{xy},\alpha)=Im(=_{xy},\alpha)$ для всіх $x,y\in V$;

IP) $Jm(\neg\Phi,\alpha)=\neg(Jm(\Phi,\alpha))$;

$Jm(\vee\Phi\Psi,\alpha)=\vee(Jm(\Phi,\alpha),\ Jm(\Psi,\alpha))$;

IR) $Jm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi,\alpha)=\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Jm(\Phi,\alpha))$;

I$\exists$) $Jm(\exists x\Phi,\alpha)(d)=$

$$=\begin{cases} T, & \text{якщо існує } a\in A_\alpha : Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=T,\\ F, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=T \text{ для всіх } a\in A_\alpha \text{ невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

IM) $Jm(K_i\,\Phi,\alpha)(d)=$

$$=\begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх всіх } \delta\in S:\alpha\rhd_i\delta,\\ F, & \text{якщо існує } \delta\in S \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)= =F, \text{ невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Якщо для стану α не існує такого β, що $\alpha\rhd_i\beta$, то вважаємо $Jm(K_i\,\Phi,\alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in {}^VA$.

Предикат $Jm(\Phi,\alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_α.

Φ істинна в ММС $\boldsymbol{M}$ якщо предикат Φ_α є істинним для кожного $\alpha\in\boldsymbol{S}$.

Це позначаємо $\boldsymbol{M}\models\Phi$.

Φ всюди істинна (позначаємо $\models\Phi$), якщо $\boldsymbol{M}\models\Phi$ для всіх ММС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

ММС номінативних рівнів скорочено позначаємо також як $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Im)$.

Замість $=_{xy}$ будемо в традиційному вигляді писати $x=y$.

Залежно від того, як задати $\Phi_\delta(d)$ при умові $d\notin {}^VA_\delta$, можна виділити [5] ММС із сильною умовою визначеності на станах, названі *St*-ММС, та ММС із загальною умовою визначеності на станах, названі *Gn*-ММС. Для *St*-ММС при умові $d\notin {}^VA_\delta$ вважаємо $\Phi_\delta(d)\uparrow$. Для *Gn*-ММС при умові $d\notin {}^VA_\delta$ вважаємо $\Phi_\delta(d)=\Phi_\delta(d_\delta)$, де d_δ – скорочене позначення даного (іменної множини) $[v\mapsto a\in d \mid a\in A_\delta]$. Така умова видається більш природною. У випадку *Gn*-ММС маємо $\Phi_\delta(d)=\Phi_\delta(d_\delta)$ для всіх $d\in {}^VA$.

Базові композиції *Gn*-ММС зберігають еквітонність предикатів, водночас базові модальні композиції *St*-ММС зберігають лише слабку еквітонність, а еквітонність вони не зберігають (див. [3, 4]). Тому в даній роботі основну увагу приділимо дослідженню *Gn*-ММС.

Властивості відношень $\triangleright_i$ індукують різні класи ММС. Найчастіше розглядають випадки, коли ці відношення можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними. Якщо всі $\triangleright_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо *R*; якщо всі $\triangleright_i$ транзитивні, то пишемо *T*; якщо всі $\triangleright_i$ симетричні, то пишемо *S*.

Таким чином, маємо наступні чисті типи ММС: *R*-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

Можна розглядати складніші, змішані типи ММС, коли різні відношення $\triangleright_i$ мають різні властивості.

ММС із скінченними множинами однотипних відношень $\triangleright_i$ названо [6–8] епістемічними, або ММС епістемічного типу. Такі ММС тісно пов'язані з базовими системами традиційної епістемічної логіки знання.

Зокрема, *R*-ММС, *RT*-ММС, *RTS*-ММС є узагальненнями відомих [1] епістемічних $T_{(n)}$, $S4_{(n)}$, $S5_{(n)}$-систем.

Теорема 1. Для довільних $K_i \in Ms$ маємо такі властивості:

1) $|= R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, K_i\, \Phi \leftrightarrow K_i\, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\, \Phi$;

2) $|= \exists x\, K_i\, \Phi \to K_i\, \exists x \Phi$ та $|= K_i\, \forall x \Phi \to \forall x\, K_i\, \Phi$;

3) $|= x = y \leftrightarrow \mathrm{K}_i\, x = y$.

Отже, модальні композиції можна проносити через реномінації, водночас взаємодія модальних композицій та кванторів істотно складніша: формули вигляду $\forall x\, \mathrm{K}_i\, \Phi \to \mathrm{K}_i\, \forall x \Phi$ та $\mathrm{K}_i\, \exists x \Phi \to \exists x\, \mathrm{K}_i\, \Phi$ не є [6 – 8] всюди істинними.

Властивість п. 3 зумовлена тим, що трактування рівності базових даних як їх тотожності веде до того, що для одного і того ж даного d неможлива ситуація, коли в одному стані $d(x)\downarrow = d(y)\downarrow$, а в іншому стані $d(x)\downarrow \neq d(y)\downarrow$.

Поняття логічного наслідку для множин специфікованих станами формул вводимо так.

$\boldsymbol{\Delta}$ є логічним наслідком $\boldsymbol{\Gamma}$ в ММС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$), якщо для всіх $d \in {}^V A$ із того, що $\Phi_\alpha(d) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \boldsymbol{\Gamma}$, випливає: неможливо $\Psi_\beta(d) = F$ для всіх $\Psi^\beta \in \boldsymbol{\Delta}$.

$\boldsymbol{\Delta}$ є логічним наслідком $\boldsymbol{\Gamma}$ (позначаємо $\boldsymbol{\Gamma} \models \boldsymbol{\Delta}$), якщо $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$ для всіх ММС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу.

Розглянемо властивості відношення $\models$ на кванторно-екваційному рівні. Спочатку наведемо немодалізовані властивості (вони фактично успадковані від композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів [2]):

C) якщо $\boldsymbol{\Gamma} \cap \boldsymbol{\Delta} \neq \varnothing$, то $\boldsymbol{\Gamma} \models \boldsymbol{\Delta}$;

U) нехай $\boldsymbol{\Gamma} \subseteq \boldsymbol{\Lambda}$ та $\boldsymbol{\Delta} \subseteq \boldsymbol{\Sigma}$, тоді $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta} \Rightarrow \boldsymbol{\Lambda} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Sigma}$;

$\neg$) $\neg\, \Phi^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, \Phi^\alpha$;

$\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, \neg\, \Phi^\alpha \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$;

$\vee$) $\Phi \vee \Psi^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Phi^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$ та $\Psi^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$;

$\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, \quad \Phi \vee \Psi^\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$;

ΦN) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}\, (\Phi)^\alpha\, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$;

$\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$

(тут $y \in \mu(\Phi)$);

RT) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$;

$\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$;

R$\neg$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg\, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$;

$\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, \neg\, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$;

R$\vee$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$;

$\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)^\alpha$;

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)^\alpha, \boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$;

$\Gamma \,|\!\!=_M \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))^{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)^{\alpha}$;

R∃) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi)^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \exists y\, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta$;

$\Gamma \,|\!\!=_M \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$;

R∃∃) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi)^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{z}^{y} (\Phi)^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta$;

$\Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{z}^{y} (\Phi)^{\alpha}$.

Для R∃ умова $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, для R∃∃ – умова $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

∃) $\exists x \Phi^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!= \Delta \Leftrightarrow R_{y}^{x}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!= \Delta$,

де $y \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x \Phi)$ та y тотально неістотне;

$\Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; R_{y}^{x}(\Phi)^{\alpha}, \; \exists x \Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; \exists x \Phi^{\alpha}$.

Із рівністю пов'язані властивості:

SmE) $x = y^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\; x = y^{\alpha}, \;\; y = x^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta$;

TrE) $x = y^{\alpha}, \; y = z^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\; x = y^{\alpha}, \; y = z^{\alpha}, \; s = r^{\alpha}, \; x = z^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta$;

EФ) $y = x^{\alpha}, \; R_{y,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\; y = x^{\alpha}, R_{y,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(\Phi)^{\alpha}, R_{x,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(\Phi)^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta$;

$y = x^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, R_{y,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(\Phi)^{\alpha} \;\;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; y = x^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; R_{y,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(\Phi)^{\alpha}, R_{x,\bar{v}}^{z,\bar{u}}(\Phi)^{\alpha}$;

ER) $x = y^{\alpha}, \; \Phi^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; x = y^{\alpha}, \; \Phi^{\alpha}, R_{y}^{x}\, \Phi^{\alpha}, R_{x}^{y} \Phi^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta$;

$x = y^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; \Phi^{\alpha} \;\;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\; x = y^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; \Phi^{\alpha}, \; R_{y}^{x}\, \Phi^{\alpha}, \; R_{x}^{y} \Phi^{\alpha}$.

Наведемо властивості, пов'язані з модальними композиціями:

RK$_i$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i \Phi)^{\alpha} \,|\!\!=_M \Delta \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \Gamma, \; \mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha} \,|\!\!=_M \Delta$;

$\Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i \Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$;

K$_i$) $\mathrm{K}_i \Phi^{\alpha}, \Gamma \,|\!\!=_M \Delta \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd_i \beta\}$ и$\cup \Gamma \,|\!\!=_M \Delta$;

$\Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; \mathrm{K}_i \Phi^{\alpha} \;\;\Leftrightarrow \; \Gamma \,|\!\!=_M \Delta, \; \Phi^{\beta}$ для всіх β: $\alpha \rhd_i \beta$.

2. Секвенційні числення мультимодальних логік еквітонних предикатів

Пропоновані числення композиційно-номінативних ММЛ індуковані реляційною семантикою цих логік.

Специфікацією стану називають [3] слово вигляду α|– чи α–|, де α – префікс стану світу. В такому префіксі вказується стан світу, в якому розглядається специфікована формула. Спеціальний символ ∗ вказує на довільний стан, пов'язаний із даним станом відношенням досяжності. Використання ∗ уточнюється [3, 4] залежно від виду модальної логіки. Стани світу будемо іменувати натуральними числами.

Секвенції збагачуємо збудованими на даний момент виведення множиною ***S*** станів світу та множиною ***R*** відношень на ***S***. Секвенційні форми повинні враховувати можливість зміни носіїв станів світу (форма $_{|-}$∃, в окремих випадках форми $_{|-}$R∃∃ та $_{-|}$R∃∃), тому для кожного із станів $\alpha \in \boldsymbol{S}$ треба вказувати збудовану на даний момент множину його базових даних A_{α}. Тому збагачені секвенції будемо записувати як **Σ** // $\alpha\{A_{\alpha}\}$, $\beta\{A_{\beta}\}$, … // *M*, скорочено як **Σ** // *St* // *M*. Тут **Σ** – множина специфікованих формул; *St* – збудована на даний момент множина імен станів; $\alpha\{A_{\alpha}\}$, $\beta\{A_{\beta}\}$, … – побудовані на даний момент стани із множинами їх базових даних; *M* – схема моделі світу, тобто побудоване на даний момент відношення досяжності, записане для імен станів.

Опишемо базові секвенційні форми числень ММЛ еквітонних предикатів кванторних рівнів.

Спочатку наведемо форми, аналогічні відповідним формам числень логіки еквітонних квазіарних предикатів [2].

Вони не змінюють схему моделі світу, але форми $\vdash\exists$ (в окремих випадках також $\dashv$R∃∃ і $\vdash$R∃∃) змінюють стани.

Спочатку наведемо форми, аналогічні відповідним формам числень логіки еквітонних квазіарних предикатів [2]. Вони не змінюють схему моделі світу, але форми $\vdash\exists$ (в окремих випадках $\dashv$R∃∃ і $\vdash$R∃∃) змінюють стани.

$\vdash\neg$ $\dfrac{\alpha\dashv A,\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash\neg A,\Sigma\ //St//M}$;

$\dashv\neg$ $\dfrac{\alpha\vdash A,\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv\neg A,\Sigma\ //St//M}$;

$\vdash\vee$ $\dfrac{\alpha\vdash A,\Sigma\ //St//M \quad \alpha\vdash B,\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash A\vee B,\Sigma\ //St//M}$;

$\dashv\vee$ $\dfrac{\alpha\dashv A, \alpha\dashv B,\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv A\vee B,\Sigma\ //St//M}$;

$\vdash$RT $\dfrac{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}$;

$\dashv$RT $\dfrac{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}$;

$\vdash$RR $\dfrac{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma\ //St//M}$;

$\dashv$RR $\dfrac{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma\ //St//M}$;

$\vdash$R¬ $\dfrac{\alpha\vdash\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //St//M}$;

$\dashv$R¬ $\dfrac{\alpha\dashv\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //St//M}$;

$\vdash$R∨ $\dfrac{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //St//M}$;

$\dashv$R∨ $\dfrac{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //St//M}$;

$\vdash$ΦN $\dfrac{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma\ //St//M}$ при $y\in\mu(A)$;

$\dashv$ΦN $\dfrac{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{\alpha\dashv R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}$ при $y\in\mu(A)$;

$\vdash$R∃ $\dfrac{\alpha\vdash\exists y R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\exists yA),\Sigma\ //St//M}$ при $y\notin\{\bar v,\bar x\}$;

$\dashv$R∃ $\dfrac{\alpha\dashv\exists y R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\exists yA),\Sigma\ //St//M}$ при $y\notin\{\bar v,\bar x\}$;

$\vdash$R∃∃ $\dfrac{\alpha\vdash\exists z R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{y}_{z}(A),\Sigma\ //St'//M}{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\exists yA),\Sigma\ //St//M}$;

$\dashv$R∃∃ $\dfrac{\alpha\dashv\exists z R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{y}_{z}(A),\Sigma\ //St'//M}{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\exists yA),\Sigma\ //St//M}$.

Для $\vdash$R∃∃ та $\dashv$R∃∃ умови: $y\in\{\bar v,\bar x\}$, z тотально неістотне та $z\notin nm\left(R^{\bar v}_{\bar x}(A)\right)$.

При умові $y\notin\{\bar v,\bar x\}$ використовуємо $\vdash$R∃ та $\dashv$R∃; якщо $y\in\{\bar v,\bar x\}$, то використовуємо $\vdash$R∃∃ та $\dashv$R∃∃.

Форми елімінації кванторів:

$\vdash\exists$ $\dfrac{\alpha\vdash R^{x}_{y}(A),\Sigma\ //St'//M}{\alpha\vdash\exists xA,\Sigma\ //St//M}$;

$\dashv\exists$ $\dfrac{\alpha\dashv\exists xA, \alpha\dashv R^{x}_{z}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv\exists xA,\Sigma\ //St//M}$.

Для $\vdash\exists$ ім'я y тотально неістотне та $y\notin nm(\mathbf{\Sigma}, A)$. При цьому до носія A_α стану α додається новий елемент y.

До вищенаведених форм додаємо базові форми для модальних операторів $\vdash$RK$_i$, $\dashv$RK$_i$, $\vdash\mathbf{K}_i$, $\dashv\mathbf{K}_i$, де $i\in I$:

$\vdash$RK$_i$ $\dfrac{\alpha\vdash K_i R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(K_i A),\Sigma\ //St//M}$, де $i\in I$;

$\dashv$RK$_i$ $\dfrac{\alpha\dashv K_i R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{\alpha\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(K_i A),\Sigma\ //St//M}$, де $i\in I$.

Секвенційні форми елімінації модальних операторів $\vdash\mathbf{K}_i$ та $\dashv\mathbf{K}_i$ записуються по-різному залежно від властивостей відношень досяжності $\rhd_i$, $i\in I$. При цьому форми $\vdash\mathbf{K}_i$ зазвичай не змінюють (див. далі) множини базових даних станів і схему моделі світу, форма $\dashv\mathbf{K}_i$ для стану α вводить новий стан β такий, що $\alpha \rhd_i \beta$ та $A_\beta = A_\alpha$.

Розглянемо як приклад три випадки.

Загальний випадок. Якщо на $\rhd_i$ не накладені умови, то маємо такі форми.

$$\vdash \mathbf{K}_i \ \frac{{}_{\alpha*|-}A,\ {}_{\beta_1|-}A, ...,\ {}_{\beta_n|-}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A, \Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Тут ${}_{\alpha*|-}A$ – допоміжна специфікована формула, яка конкретизується в даній секвенції через специфіковані ${}_{\beta_1|-}A, \ldots$ ..., ${}_{\beta_n|-}A$ для всіх наявних в даний момент станів $\beta_1, ..., \beta_n$ таких, що $\alpha \rhd_i \beta_1, \ldots$ $\ldots, \alpha \rhd_i \beta_n$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha \rhd_i \beta$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковану формулу ${}_{\beta|-}A$.

$$-| \mathbf{K}_i \ \frac{\Xi, \Sigma\ //\ St'//\ M \cup \{\alpha \rhd_i \beta\}}{{}_{\alpha-|}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //M},$$

де Ξ – це ${}_{\beta|-}A,\ {}_{\beta|-}B_1, ...,\ {}_{\beta|-}B_m$.

Тут β – новий стан, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують в допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*|-}B_j$, породжених формулами ${}_{\alpha|-}K_i B_j$ (якщо **Σ** містить такі формули). Це означає, що при появі нового стану β, досяжного із α, для допоміжних формул вигляду ${}_{\alpha*|-}B_j$ треба записати нові специфіковані формули ${}_{\beta|-}B_j$. До схеми моделі світу M додаємо $\alpha \rhd_i \beta$, для введеного нового стану β задаємо $A_\beta = A_\alpha$.

Відношення $\rhd_i$ *транзитивне та рефлексивне.* Тоді маємо такі форми.

$$\vdash \mathbf{K}_i \ \frac{\Xi,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M},$$

де Ξ – це ${}_{\alpha*|-}A, {}_{\alpha|-}A, {}_{\beta_1|-}A, \ldots, {}_{\beta_n|-}A,$ ${}_{\beta_1|-}\mathrm{K}_i A, \ldots, {}_{\beta_n|-}\mathrm{K}_i A$.

Допоміжна ${}_{\alpha*|-}A$ конкретизується через ${}_{\beta_1|-}A, \ldots, {}_{\beta_n|-}A$ та ${}_{\beta_1|-}\mathrm{K}_i A, \ldots, {}_{\beta_n|-}\mathrm{K}_i A$ для всіх наявних в даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha \rhd_i \beta_1, \ldots, \alpha \rhd_i \beta_n$. Специфіковані формули ${}_{\beta_1|-}\mathrm{K}_i A, \ldots$ $\ldots, {}_{\beta_n|-}\mathrm{K}_i A$ тут необхідні через транзитивність відношення $\rhd_i$. Явне виділення ${}_{\alpha|-}A$ необхідне через рефлексивність відношення $\rhd_i$.

$$-| \mathbf{K}_i \ \frac{\Xi,\ \Sigma\ //\ St'\ //\ M \cup \{\alpha \rhd_i \beta\}}{{}_{\alpha-|}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M},$$ де Ξ – це ${}_{\beta|-}A, {}_{\beta|-}B_1, ..., {}_{\beta|-}B_m, {}_{\beta|-}\mathrm{K}_i B_1, ..., {}_{\beta|-}\mathrm{K}_i B_m$.

Тут β – новий стан, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують в допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*|-}B_j$, породжених формулами ${}_{\alpha|-}\mathrm{K}_i B_j$ (якщо **Σ** їх містить). Специфіковані ${}_{\beta|-}\mathrm{K}_i B_j$ необхідні через транзитивність $\rhd_i$. До схеми моделі світу M додаємо $\alpha \rhd_i \beta$, для введеного нового стану β задаємо $A_\beta = A_\alpha$ (зауважимо, що нові елементи даних стану можуть далі з'являтися, наприклад, за рахунок $\vdash\exists$-форм, як в A_α, так і в A_β).

Відношення $\rhd_i$ *транзитивне, рефлексивне та симетричне.* Маємо такі форми.

$$\vdash \mathbf{K}_i \ \frac{\Xi,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M},$$

де Ξ – це ${}_{*\alpha*|-}A, {}_{\alpha|-}A, {}_{\beta_1|-}A, \ldots$ $\ldots, {}_{\beta_n|-}A, {}_{\beta_1|-}\mathrm{K}_i A, \ldots, {}_{\beta_n|-}\mathrm{K}_i A$.

Допоміжна ${}_{*\alpha*-|}A$ конкретизується через специфіковані формули ${}_{\beta_1|-}A, \ldots$ $\ldots, {}_{\beta_n|-}A$ та ${}_{\beta_1|-}\mathrm{K}_i A, \ldots, {}_{\beta_n|-}\mathrm{K}_i A$ для всіх наявних в даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha \rhd_i \beta_1, \ldots, \alpha \rhd_i \beta_n$ чи $\beta_1 \rhd_i \alpha, \ldots$ $\ldots, \beta_n \rhd_i \alpha$.

$$-| \mathbf{K}_i \ \frac{\Xi,\ \Sigma\ //\ St'//\ M \cup \{\alpha \rhd_i \beta, \beta \rhd_i \alpha\}}{{}_{\alpha-|}\mathrm{K}_i A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M},$$

де Ξ – це ${}_{\beta|-}A, {}_{\beta|-}B_1, \ldots, {}_{\beta|-}B_m, {}_{\beta|-}\mathrm{K}_i B_1, \ldots$ $\ldots, {}_{\beta|-}\mathrm{K}_i B_m$.

Тут симетричність $\rhd_i$ врахована додаванням $\alpha \rhd_i \beta$ та $\beta \rhd_i \alpha$ до M.

Вищенаведені форми задають числення кванторного рівня. Числення ММЛ кванторно-еквацийного рівня можна розглядати як прикладні секвенційні числення

ММЛ кванторного рівня. Виведення в цих численнях – це виведення секвенцій з доданими аксіомами для рівності (рефлексивності, симетричності, транзитивності, заміни рівних). Це означає: для кожного наявного в секвенції стану α в ній мусять бути:

$$_{\alpha|-}\forall x\left(x=x\right),\ _{\alpha|-}\forall x\,\forall y\left(x=y\to y=x\right),$$

$$_{\alpha|-}\forall x\,\forall y\,\forall z\left(x=y\to y=z\to x=z\right)$$

(тут x, y, z – тотально неістотні);

$$_{\alpha|-}\forall x\,\forall y\left(x=y\to\left(R_{x,\bar v}^{z,\bar u}\left(p\right)\leftrightarrow R_{y,\bar v}^{z,\bar u}\left(p\right)\right)\right)$$

для всіх $p\in Ps,\ z,\bar u,\bar v$ (тут x,y – тотально неістотні, відмінні від $z,\bar u,\bar v$).

Поява нового стану α веде до виписування усіх таких формул. Проте можна явно не вносити ці аксіоми до секвенції, а враховувати їх за потребою, подібно випадку загальних ТМС функціонально-екваційного рівня (див. [5]). Це означає модифікацію процедури побудови дерева.

Для врахування аксіом симетричності, транзитивності та заміни рівних вводимо допоміжні форми:

ESm $\dfrac{_{\alpha|-}x=y,\ _{\alpha|-}y=x,\ \Sigma//St//M}{_{\alpha|-}x=y,\ \Sigma//St//M}$;

ETr $\dfrac{_{\alpha|-}x=y,\ _{\alpha|-}y=z,\ _{\alpha|-}x=z,\ \Sigma//St//M}{_{\alpha|-}x=y,\ _{\alpha|-}y=z,\ \Sigma//St//M}$;

$_{|-}$EPs

$$\frac{_{\alpha|-}x=y,\ _{\alpha|-}R_{x,\bar v}^{z,\bar u}(p),\ _{\alpha|-}R_{y,\bar v}^{z,\bar u}(p),\Sigma\ //St//M}{_{\alpha|-}x=y,\ _{\alpha|-}R_{x,\bar v}^{z,\bar u}(p),\Sigma\ //St//M};$$

$_{-|}$EPs

$$\frac{_{\alpha|-}x=y,\ _{\alpha-|}R_{x,\bar v}^{z,\bar u}(p),\ _{\alpha-|}R_{y,\bar v}^{z,\bar u}(p),\Sigma\ //St//M}{_{\alpha|-}x=y,\ _{\alpha-|}R_{x,\bar v}^{z,\bar u}(p),\Sigma\ //St//M}.$$

Замкненість секвенції **Σ** визначається виконанням однієї з наступних умов:

С) існують формула Φ та префікс стану α такі, що $_{\alpha|-}\Phi\in\mathbf{\Sigma}$ та $_{\alpha-|}\Phi\in\mathbf{\Sigma}$;

CRf) $_{\alpha-|}x=x\in\mathbf{\Sigma}$ для деяких $x\in V$ та префіксу стану α;

CE) $_{\alpha|-}x=y\in\mathbf{\Sigma},\ _{\alpha-|}\mathrm{K}_i x=y\in\mathbf{\Sigma}$ або $_{\alpha-|}x=y\in\mathbf{\Sigma},\ _{\alpha|-}\mathrm{K}_i x=y\in\mathbf{\Sigma}$ для деяких $x,y\in V$, $\mathrm{K}_i\in Ms$ та префіксу стану α.

Умова CRf індукована аксіомою рефлексивності, умова CE індукована властивістю $\models x=y\leftrightarrow\mathrm{K}_i\ x=y$.

Процедура побудови секвенційного дерева для числень ММЛ кванторно-екваційного рівня в основних рисах аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень логік квазіарних предикатів [2], але побудова дерева ведеться паралельно із побудовою схем моделей світу. При застосуванні секвенційних форм схема моделі світу залишається незмінною, окрім випадку $_{-|}$**K**$_i$-форм (інколи $_{|-}$**K**$_i$-форм), які додають нові стани, що дає розширення моделі світу.

Побудова дерева розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул.

Спочатку виконуємо $_{-|}$**K**$_i$-форми, які додають нові стани, далі $_{-|}$**K**$_i$-форми. Потім виконуємо всі $_{|-}\exists$-форми, після цього – всі R∃∃-форми, далі – усі інші форми. При цьому $_{-|}\exists$-форма до $_{\alpha-|}\exists xA$ застосовується багатократно – для усіх імен доступних формул секвенції $_{\alpha-|}\exists xA,\mathbf{\Sigma}$ та її наступників. За необхідності також робимо додаткові кроки для продукування нових формул-рівностей і додавання відповідних "копій" формул вигляду $_{\alpha|-}R_{y,\bar v}^{z,\bar u}\left(p\right)$ чи $_{\alpha-|}R_{y,\bar v}^{z,\bar u}\left(p\right)$. Це робимо так.

Нехай на попередньому кроці була отримана (або стала доступною на початку етапу) формула $_{\alpha|-}s=t$. Тоді, згідно ESm, додаємо $_{\alpha|-}t=s$. Далі, згідно $_{|-}$EPs та $_{-|}$EPs, для кожної з наявних доступних формул вигляду $_{\alpha|-}R_{s,\bar v}^{z,\bar u}\left(p\right)$ чи $_{\alpha-|}R_{s,\bar v}^{z,\bar u}\left(p\right)$ додаємо відповідно $_{\alpha|-}R_{t,\bar v}^{z,\bar u}\left(p\right)$ чи $_{\alpha-|}R_{t,\bar v}^{z,\bar u}\left(p\right)$.

Нехай після попереднього кроку маємо (або доступні на початку етапу) $_{\alpha|-}s=t$ та $_{\alpha|-}t=s$. Згідно ETr, додаємо $_{\alpha|-}s=r$. Враховуючи ESm, далі отримуємо $_{\alpha|-}s=t$, $_{\alpha|-}t=s$, $_{\alpha|-}t=r$, $_{\alpha|-}r=t$, $_{\alpha|-}s=r$, $_{\alpha|-}r=s$.

Нехай на попередньому кроці була отримана (або стала доступною на початку етапу) формула вигляду ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{u}}_{s,\bar{v}}(p)$ чи вигляду ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{u}}_{s,\bar{v}}(p)$, причому серед доступних формул секвенції маємо ${}_{\alpha|-}s=t$ та ${}_{\alpha|-}t=s$. Згідно $_{|-}$EPs і $_{-|}$EPs, для кожної з наявних доступних формул вигляду ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{u}}_{s,\bar{v}}(p)$ та ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{u}}_{s,\bar{v}}(p)$ додаємо відповідно ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{u}}_{t,\bar{v}}(p)$ та ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{u}}_{t,\bar{v}}(p)$. Таких додаткових кроків може бути декілька, згідно наявності різних доступних формул вигляду ${}_{\alpha|-}s=t$.

Враховуючи вищенаведені властивості відношення |=, отримуємо:

Теорема 2. Нехай $\dfrac{{}_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}\ \ //St'//M'}{{}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta\ \ //St//M}$ та $\dfrac{{}_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}\ \ //St//M \qquad {}_{|-}\mathrm{X}_{-|}Z\ \ //St//M}{{}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta\ \ //St//M}$ – секвенційні форми. Тоді:

– з умови $\mathbf{\Lambda} \mid= \mathbf{K}$ випливає $\mathbf{\Gamma} \mid= \mathbf{\Delta}$;

– з умови $\mathbf{\Lambda} \mid= \mathbf{K}$ та $\mathbf{X} \mid= \mathbf{Z}$ випливає $\mathbf{\Gamma} \mid= \mathbf{\Delta}$.

3. Теореми коректності та повноти

Теорема коректності для секвенційних числень ММЛ формулюється традиційним чином.

Теорема 3. Нехай секвенція ${}_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}\mathbf{\Delta}$ вивідна. Тоді $\mathbf{\Gamma} \mid= \mathbf{\Delta}$.

Доведення проводиться індукцією за побудовою замкненого секвенційного дерева для секвенції ${}_{|-}\mathbf{\Gamma}_{-|}\mathbf{\Delta}$, воно аналогічне доведенню відповідної теореми для секвенційних числень загальних ТМЛ [3].

Для доведення повноти секвенційних числень ММЛ кванторно-еквакційного рівня використаємо метод систем модельних множин [9, 3]. Розглядаємо тут більш загальний випадок *Gn*-ММС.

Система модельних множин – це пара $(\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}, \boldsymbol{R})$, де $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу, $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на $\boldsymbol{S}$. Системи модельних множин записуємо також як $(\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}, M)$ де M – схема моделей світу, яка задається множиною $\boldsymbol{R}$.

Множина $\boldsymbol{H}_\alpha$ специфікованих формул із $W_\alpha = nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$ – модельна множина стану α, якщо виконуються такі умови:

MC) для кожної формули Φ лише одна з специфікованих формул ${}_{\alpha|-}\Phi$ чи ${}_{\alpha-|}\Phi$ може належати до $\boldsymbol{H}_\alpha$;

RfC) жодна специфікована формула вигляду ${}_{\alpha-|}x=x$, де $x\in nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$, не може належати до $\boldsymbol{H}_\alpha$;

EC) для кожної пари специфікованих формул вигляду ${}_{\alpha|-}x=y$, ${}_{\alpha-|}\mathrm{K}_i x=y$ чи вигляду ${}_{\alpha-|}x=y$, ${}_{\alpha|-}\mathrm{K}_i x=y$, де $x, y\in nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$, лише одна з формул пари може належати до $\boldsymbol{H}_\alpha$;

MSm) якщо ${}_{\alpha|-}x=y\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}y=x\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

HTr) якщо ${}_{\alpha|-}x=y\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_{\alpha|-}y=z\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}x=z\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

EPs) якщо ${}_{\alpha|-}x=y\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha|-}x=y\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_{\alpha-|}R^{z,\bar{u}}_{y,\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R^{z,\bar{u}}_{x,\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

MN) якщо ${}_{\alpha|-}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha|-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha-|}R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha-|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

MT) якщо ${}_{\alpha|-}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha-|}R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

M¬) якщо ${}_{\alpha|-}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha-|}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

M∨) якщо ${}_{\alpha|-}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ або ${}_{\alpha|-}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha-|}\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_{\alpha-|}\Psi\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

MRR) якщо ${}_{\alpha|-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\left(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\right)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha|-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ{}^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha-|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\left(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\right)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\circ{}^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

MR¬) якщо $_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\alpha|-}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо $_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\alpha-|}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

MR∨) якщо $_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо $_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

MR∃) якщо $_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$, то $_{\alpha|-}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо $_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$, то $_{\alpha-|}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

MR∃S) нехай $z\notin nm\left(R_y^x(\Phi)\right)$ та z тотально неістотне, тоді:

якщо $_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то $_{\alpha|-}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_z^y(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо $_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ та $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то $_{\alpha-|}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ{}_z^y(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

MRK) якщо $_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\alpha|-}\mathrm{K}_iR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо $_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\alpha-|}\mathrm{K}_iR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ (тут $i\in I$);

M∃) якщо $_{\alpha|-}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то існує $y\in W_\alpha$ таке: $_{\alpha|-}R_y^x(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо $_{\alpha-|}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\alpha-|}R_y^x(\Phi)\in\boldsymbol{H}_\alpha$ для всіх $y\in W_\alpha$;

MK) якщо $_{\alpha|-}\mathrm{K}_i\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\beta|-}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для всіх $\beta\in\boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha\rhd_i\beta$;

якщо $_{\alpha-|}\mathrm{K}_i\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha$, то $_{\beta-|}\Phi\in\boldsymbol{H}_\beta$ для деякого $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd_i\beta$ (тут $i\in I$).

MC, RfC та EC – це умови коректності модельної множини стану. Вони індуковані відповідними умовами замкненості секвенції.

Процедура побудови секвенційного дерева може завершуватися або не завершуватися. Якщо процедура завершена позитивно, то маємо замкнене дерево. Якщо процедура завершена негативно або не завершується, то маємо скінченне чи нескінченне незамкнене дерево. Тоді в дереві існує скінченний або нескінченний незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Теорема 4. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях в секвенційному дереві, $\boldsymbol{H}_\alpha$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій шляху $\wp$ із специфікацією стану $_{\alpha|-}$ чи $_{\alpha-|}$, M – об'єднання усіх схем моделей світу секвенцій шляху. Тоді $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}=(\{\boldsymbol{H}_\alpha\mid\alpha\in\boldsymbol{S}\},M)$ – система модельних множин.

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм. Переходи згідно таких форм відповідають пунктам визначення системи модельних множин. Допоміжні специфіковані формули (їхній префікс містить ∗) для модельних множин не беремо до уваги. Кожна непримітивна формула на шляху $\wp$ рано чи пізно буде розкладена згідно відповідної секвенційної форми. Всі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконуються пункти MC, RfC, EC визначення системи модельних множин.

Теорема 5. Нехай $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}$ – система модельних множин, побудована за незамкненим шляхом в секвенційному дереві, нехай $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}=(\{\boldsymbol{H}_\alpha\mid\alpha\in\boldsymbol{S}\},M)$ та $W=nm(\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}})$. Тоді існують ММС $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R},A,Im)$ та $\delta\in{}^VA$ з $im(\delta)=W$ такі:

1) $_{\alpha|-}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha\Rightarrow\Phi_\alpha(\delta)=T$;

2) $_{\alpha-|}\Phi\in\boldsymbol{H}_\alpha\Rightarrow\Phi_\alpha(\delta)=F$.

Зауважимо, що $\Phi_\alpha(\delta)=\Phi_\alpha(\delta_\alpha)$ для всіх $\alpha\in\boldsymbol{S}$ (ми розглядаємо Gn-ММС).

Теорема 5 доводиться індукцією за складністю формули згідно побудови системи модельних множин.

Позначимо $W_\alpha=nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$. Рівність індукує на W_α відношення еквівалентності: $x\sim_\alpha y\Leftrightarrow{}_{\alpha|-}x=y\in\boldsymbol{H}_\alpha$.

Позначимо $[v]_\alpha=\{u\mid{}_{\alpha|-}v=u\in\boldsymbol{H}_\alpha\}=$ $=\{u\mid v\sim_\alpha u\}$. Тепер задамо $[v]=\bigcup_{\alpha\in S}[v_\alpha]=$ $=\{u\mid{}_{\alpha|-}v=u\in\boldsymbol{H}_\alpha$ для деякого $\alpha\in\boldsymbol{S}\}$.

Таке визначення коректне. Справді, для системи модельних множин $\mathbf{H}_M$, побудованої за незамкненим шляхом $\wp$ секвенційного дерева, неможливо $_{\alpha|-}x = y \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та $_{\beta-|}x = y \in \boldsymbol{H}_\beta$ для деяких $\alpha, \beta \in \boldsymbol{S}$. Це зумовлене трактуванням рівності базових даних як їх тотожності: для одного і того ж даного d неможливо $d(x)\downarrow = d(y)\downarrow$ в одному стані та $d(x)\downarrow \neq d(y)\downarrow$ в іншому стані

Задамо $A_\alpha = \{[v] \mid v \in W_\alpha\}$. Тоді маємо $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha = \{[v] \mid v \in W\}$.

Тепер визначимо $\delta = [v \mapsto [v] \mid v \in W]$ та $\delta_\alpha = [v \mapsto [v] \mid v \in W_\alpha]$.

Таке δ – сюр'єкція $W \to A$, кожне δ_α – сюр'єкція $W_\alpha \to A_\alpha$.

Задамо значення базових предикатів на δ та на іменних множинах вигляду $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо $_{\alpha|-}x = y \in \boldsymbol{H}$, то $x \sim_\alpha y$, тому маємо $(x = y)_\alpha(\delta) = T$ за побудовою δ.

Якщо $_{\alpha|-}p \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то візьмемо $p_\alpha(\delta) = T$; якщо $_{\alpha-|}p \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то візьмемо $p_\alpha(\delta) = F$.

Якщо $_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то візьмемо $p_\alpha\left(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)\right) = T$; якщо $_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то візьмемо $p_\alpha\left(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)\right) = F$.

В усіх інших випадках значення $p_\alpha(d)$ задаємо довільним чином (достатньо розглядати $d \in A_\alpha^{W_\alpha}$). При цьому враховуємо еквітонність і обмеження стосовно неістотності імен: для всіх $d, h \in A_\alpha^{W_\alpha}$ таких, що $d \| {-}\mu(p) = h \| {-}\mu(p)$, необхідно $p_\alpha(d) = p_\alpha(h)$.

Задані таким чином значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю, враховуючи умови неістотності імен, на відповідні $h \in {}^W\!A$. Зрозуміло, що значення базових предикатів задані однозначно, причому враховано неістотність для p_α імен $y \in \mu(p)$. Отже, значення базових предикатів визначені коректно.

Для атомарних формул чи вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ твердження 1) та 2) теореми випливають з визначення значень базових предикатів. При цьому предикати вигляду p_α та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)_\alpha$ еквітонні та тотальні на відповідних $A_\alpha^{W_\alpha}$.

Із побудови $\mathbf{H}_M$ випливає: якщо предикат (предикати), який є значенням простішої формули (права частина відповідних пунктів визначення $\boldsymbol{H}_\alpha$), еквітонний і тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$, то предикат, який є значенням формули, утвореної відповідною композицією (ліва частина пунктів визначення $\boldsymbol{H}_\alpha$), теж еквітонний і тотальний на $A_\alpha^{W_\alpha}$. Це гарантує еквітонність усіх предикатів Φ_α, якщо такими є базові предикати на станах.

Крок індукції для тверджень 1) та 2) доводиться стандартним чином (доведення аналогічних теорем для загальних ТМС див. [3, 5]). Наведемо для прикладу доведення для пунктів М$\exists$ та МК.

Нехай $_{\alpha|-}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ існує $y \in W_\alpha$ таке, що $_{\alpha|-}(R_y^x(\Phi)) \in \boldsymbol{H}_\alpha$. За припущенням індукції $(R_y^x(\Phi))_\alpha(\delta) = T$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta \nabla x \mapsto$ $\mapsto \delta(y)) = T$. Але $\delta(y) \in A_\alpha$ згідно $y \in W_\alpha$, тому для $a = \delta(y) \in A_\alpha$ маємо $\Phi_\alpha(\delta \nabla x \mapsto a) = T$, звідки $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = T$.

Нехай $_{\alpha-|}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$. За визначенням $\mathbf{H}_M$ тоді $_{\alpha-|}(R_y^x(\Phi)) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ для всіх $y \in W_\alpha$. За припущенням індукції $(R_y^x(\Phi))_\alpha(\delta) =$ $= F$ для всіх $y \in W_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta \nabla x \mapsto \delta(y)) = F$ для всіх $y \in W_\alpha$. Кожне $b \in A_\alpha$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y \in W_\alpha$, адже δ визначає сюр'єкцію $\delta_\alpha : W_\alpha \to A_\alpha$. Звідси $\Phi_\alpha(\delta \nabla x \mapsto b) = F$ для всіх $b \in A_\alpha$, тому $(\exists x\Phi)_\alpha(\delta) = F$.

Нехай $_{\alpha|-}\mathrm{K}_i\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, де $\mathrm{K}_i \in Ms$. За визначенням $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}$ тоді $_{\beta|-}\Phi \in \boldsymbol{H}_\beta$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd_i \beta$. За припущенням індукції маємо $\Phi_\beta(\delta)=T$ для всіх β таких, що $\alpha \rhd_i \beta$. За визначенням K_i отримуємо $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(\delta)=T$.

Нехай $_{\alpha-|}\mathrm{K}_i\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, де $\mathrm{K}_i \in Ms$. За визначенням $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}}$ тоді $_{\beta-|}\Phi \in \boldsymbol{H}_\beta$ для деякого β такого, що $\alpha \rhd_i \beta$. За припущенням індукції $\Phi_\beta(\delta)=F$. За визначенням K_i отримуємо $(\mathrm{K}_i\Phi)_\alpha(\delta)=F$.

Теорема 6. Нехай $\boldsymbol{\Gamma} \models \boldsymbol{\Delta}$. Тоді секвенція $_{|-}\boldsymbol{\Gamma}_{-|}\boldsymbol{\Delta}$ вивідна.

Припустимо супротивне: $\boldsymbol{\Gamma} \models \boldsymbol{\Delta}$ (тобто $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$ для кожної узгодженої ММС $\boldsymbol{M}$), проте $\boldsymbol{\Sigma} = {}_{|-}\boldsymbol{\Gamma}_{-|}\boldsymbol{\Delta}$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для $\boldsymbol{\Sigma}$ існує незамкнений шлях. Згідно теореми 4, $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}} = (\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}, M)$ – система модельних множин. Згідно теореми 5, існують ММС $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Im)$ та $\delta \in {}^{V}\!A$: $_{\alpha|-}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta)=T$ та $_{\alpha-|}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta)=F$. Зокрема, це вірно для формул секвенції $_{|-}\boldsymbol{\Gamma}_{-|}\boldsymbol{\Delta}$. Тому для всіх $\Phi^\alpha \in \boldsymbol{\Gamma}$ маємо $\Phi_\alpha(\delta)=T$ та для всіх $\Psi^\beta \in \boldsymbol{\Delta}$ маємо $\Psi_\beta(\delta)=F$. Це заперечує $\boldsymbol{\Gamma} \models_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Delta}$, тому $\boldsymbol{\Gamma} \not\models \boldsymbol{\Delta}$. Отримали суперечність.

Висновки

У роботі досліджено першопорядкові композиційно-номінативні мультимодальні логіки кванторно-екваційного рівня. Наведено основні семантичні властивості таких логік, зокрема, властивості відношення логічного наслідку для множин формул. На базі цих властивостей для мультимодальних логік еквітонних предикатів кванторно-екваційного рівня запропоновано числення секвенційного типу. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти.

Дослідження семантичних і синтаксичних властивостей першопорядкових композиційно-номінативних мультимодальних та епістемічних логік будуть продовжені для логік функціональних рівнів.

1. *Андон Ф.И., Яшунин А.Е., Резниченко В.А.* Логические модели интеллектуальных информационных систем.– К.: 1999. – 396 с.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. *Шкільняк О.С.* Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення // Наукові записки НаУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки. – 2008. – Т. 86. – С. 25–34.
4. *Шкільняк О.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.
5. *Шкільняк О.С.* Секвенційні числення композиційно-номінативних модальних логік функціонально-екваційного рівня // Проблеми програмування. – 2011. – № 1. – С. 17–28.
6. *Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки епістемічного типу // Наукові записки НаУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки. – 2011. – Т. 125. – С. 4–7.
7. *Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні мультимодальні логіки // Штучний інтелект. – 2011. – № 4. – С. 126 –133.
8. *Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.* Побудова модальних логік темпорального та епістемічного типу на основі композиційно-номінативного підходу // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 204–211.
9. *Семантика* модальных и интенсиональных логик. – М.: Прогресс, 1981. – 494 с.

Одержано 10.02.2012

Про автора:

Шкільняк Оксана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук,
асистент кафедри інформаційних систем.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, м. Київ,
вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0511, (044) 522 0640 (д)
e-mail: me.oksana@gmail.com