УДК 681.3

О.І. Провотар, О.В. Лапко

ПРО НОВІ МЕТОДИ ОПИСУ НЕВИЗНАЧЕНИХ ВЕЛИЧИН

Розглядаються різні способи описання невизначеної величини, а саме: ймовірнісний, через випадкову величину; можливістний, через нечітку величину, та змішаний, через нечітку випадкову величину. А також наводяться приклади задач, в яких можна побачити основні схожості та розбіжності способів опису.

Вступ

У роботі [1] розглядалися експерименти, результати яких є невизначеними подіями. Проте часто виникає необхідність кількісного представлення результатів експерименту у вигляді деякої величини, яка називається невизначеною величиною. Невизначена величина є другим (після невизначеної події) основним об'єктом вивчення теорії невизначеності та забезпечує більш загальний спосіб опису досвіду з невизначеним результатом, чим сукупність невизначених подій.

Розглядаючи експерименти з невизначеним результатом, маємо справу з невизначеними величинами. Так, число успіхів у серії з *n* випробувань – приклад невизначеної величини. Іншими прикладами невизначених величин є: число викликів на телефонній станції за одиницю часу, час очікування чергового виклику; число частинок із заданою енергією у системах частинок, що розглядаються в статистичній фізиці; середня добова температура в даній місцевості й т. д.

Невизначена величина характерна тим, що неможливо точно передбачити її значення, яке вона прийме, але з іншого боку, множина її можливих значень зазвичай відома. Так для числа успіхів у послідовності з випробувань ця множина скінчена, оскільки число успіхів може приймати значення з множини $\{1, ..., n\}$. Множина значень невизначеної величини, може збігатися з дійсною піввіссю, як у випадку часу очікування і т. д.

Класична випадкова величина

Спочатку розглянемо класичний ймовірнісний апарат підрахунку нечіткості.

Нехай маємо ймовірнісний простір (Ω, U, P), де Ω – це простір елементарних подій, U – σ -алгебра на просторі елементарних подій, а P – це класична міра ймовірності, тобто

$$0 \le P(A) \le 1,$$

$$P(\Omega) = 1,$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

для будь-яких $i \ne j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Числову функцію $\xi(w)$ від елементарної події $w \in \Omega$ будемо називати **випадковою величиною**, якщо для будь-якого дійсного x

$$\{\xi \le x\} = \{w : \xi(w) \le x\} \in U \text{, тобто}$$

$\{\xi \le x\}$ є подією.

Іншими словами випадкова величина – це числова функція $\Omega \to R$, яка вимірна щодо σ - алгебри U.

Функцію $F(x) = F_\xi(x) = P\{\xi \le x\}$, будемо називати **функцією розподілу** випадкової величини ξ. Функція розподілу має такі властивості:

$P\{x_1 < \xi \le x_2\} = F(x_2 - x_1)$;

$P\{\xi < x\} = F(x - 0)$;

$P\{\xi = x\} = F(x) - F(x - 0)$;

$F(x)$ – неспадна;

$F(x)$ – неперервна справа;

$F(+\infty) = 1$;

$F(-\infty) = 0$.

Якщо $P\{\xi = x_k\} = p_k$, $\sum_k p_k = 1$, то випадкова величина ξ називається випадковою величиною, що має **дискретний розподіл**. Розподіл такої випадкової величини визначається його законом, парою елементів (x_k, p_k) для всіх *k*. Найпоширенішими прикладами дискретних розподілів є вироджений, біноміальний розподіл, геометричний розподіл та розподіл Пуасона.

Випадкова величина ξ має **абсолютно неперервний розподіл** $F_\xi(x)$, якщо існує функція щільності для цього розподілу, тобто:

$$\exists f_\xi(u) \geq 0 : F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du \, .$$

Властивості щільності:

$$f_\xi(x) = F_\xi^{'}(x) \, ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u)du = 1 \, .$$

Найпоширенішими прикладами є нормальний, рівномірний та показниковий розподіли.

Важливими числовими властивостями розподілів випадкової величини є **математичне сподівання**.

В дискретному випадку математичне сподівання випадкової величини дорівнює сумі добутку ймовірностей на значення випадкової величини в кожному елементі простору, тобто:

$$M_\xi = \sum_{w \in \Omega} p(w) * \xi(w) \, . \qquad (1)$$

А для абсолютно неперервного розподілу математичне сподівання дорівнює інтегралу по всьому простору від функції щільності помноженої на значення випадкової величини, тобто:

$$M_\xi = \int_{x \in \Omega} xf(x)dx.$$

Нечітка величина

Виходячи з [1, 2], **нечіткою величиною** A будемо називати нечітку множину визначену на множині дійсних чисел, іншими словами це множина пар

$$A = \{(w, \mu_A(w)), w \in R\} \, ,$$

де $\mu_A \; : R \to [0,1]$ – функція належності нечіткої множини. Тобто функція $\mu_A : R \to [0,1]$ може бути визначена, як розподіл можливостей для нечіткої величини A.

Так само, як і випадкова величина нечітка величина може бути дискретною та неперервною в залежності від міри належності.

Розглянемо нечітку величину A, що описує можливість того, що звичайна лампочка розжарювання перегорить за x днів. Нехай така нечітка величина має вигляд

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in [0, \infty]\} \, ,$$

де $\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} arctg(\frac{x}{50}), x \geq 0; \\ 0, x < 0. \end{cases}$

У такому разі отримали неперервну нечітку величину, що описується функцією арктангенса рис. 1.

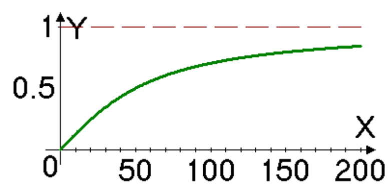

Рис. 1. Функція μ_A

Знайдемо можливість події, що «лампочка розжарювання перегорить за 100 днів», позначимо таку подію через A_{100}. Як відомо з [1], можливість об'єднання подій в дискретному випадку дорівнює максимуму можливостей, тобто: $\mu(\bigcup_i A_i) = \max_i \mu(A_i)$, для всіх неперетинаючих подій A_i, в неперервному випадку можливість об'єднання подій буде дорівнювати супремуму можливостей, тобто: $\mu(\bigcup_i A_i) = \sup_i \mu(A_i)$. Виходячи з цього можливість того, що лампочка перегорить за 100 днів буде дорівнювати супремуму можливостей за весь цей час, тобто:

$$\mu(A_{100}) = \sup_{x \in [0,100]} \mu_A(x) = \sup_{x \in [0,100]} \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{x}{50}\right),$$

а оскільки функція арктангенс монотонно зростаюча, то супремум буде саме на 100-ий день:

$$\mu(A_{100}) = \sup_{x \in [0,100]} \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{x}{50}\right) = \frac{2}{\pi} arctg\left(\frac{100}{50}\right) \approx 0.7.$$

Отже, можливість того, що лампочка перегорить за 100 днів, виходячи з розподілу нечіткої величини буде дорівнювати 0.7.

Цю ж ситуацію опишемо за допомогою випадкової величини ξ. Нехай ймовірність того, що лампочка розжарювання перегорить за *t* днів буде визначатися за законом:

$$f_{\xi}(\mathrm{t}) = 0.02\mathrm{e}^{-0.02\,\mathrm{t}}.$$

Функція $f_{\xi}(\mathrm{t})$ є функцією щільності випадкової величини ξ. Знайдемо тепер ймовірність події «лампочка перегорить за 100 днів», позначимо таку подію B_{100}. Ймовірність події B_{100} буде дорівнювати інтегралу функції щільності за межами від 0 до 100, тобто

$$p(B_{100}) = \int_0^{100} f_{\xi}(t)dt = \int_0^{100} 0.02e^{-0.02t}dt =$$
$$= 1 - e^{-2} = 1 - 0.135 = 0.865.$$

Отже ймовірність того, що лампочка перегорить за 100 днів дорівнює 0.865.

Таким чином ми описали одну й ту ж саму подію різними способами. Для аналізу якості та адекватності результату обох способів необхідне більш докладне вивчення їх на різних типах задач. Але те, що обчислення для нечіткої величини є набагато простішими ніж для випадкової величини є очевидним.

Математичне сподівання дискретної нечіткої величини будемо визначати, як сума добутку значення елементу на його можливість поділена на потужність величини (сума всіх можливостей нечіткої величини), а саме:

$$M_A^* = \frac{\sum_{w\in\Omega} \mu_A(w)w}{\sum_{w\in\Omega} \mu_A}. \qquad (2)$$

Наприклад, припустимо, що Микола їсть кекси один за одним, всього він за один раз може з'їсти 10 штук, цей процес можна описати простором елементарних подій $\Omega = \{1,...,10\}$. Побудуємо випадкову величину ξ та нечітку величину *A*, що будуть описувати відповідно ймовірність та можливість «гарного самопочуття Миколи після певної кількості з'їдених кексів». Опишемо ці величини вказавши їх розподіли в табличному вигляді (табл. 1).

Таблиця 1

x - кількість з'їдених кексів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_{\xi}(x)$ – ймовірнісний розподіл	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0	0	0	0	0
$\mu_A(x)$ – розподіл можливостей	0.9	1.0	1.0	0.7	0.5	0.2	0.1	0	0	0

Отже ймовірність та можливість того, що Микола матиме гарне самопочуття після того як з'їсть три кекси буде:

$$p_{\xi}(3) = 0,3;$$
$$\mu_A(3) = 1.$$

Підрахуємо для випадкової ξ та нечіткої *A* величин математичне сподівання, використовуючи співвідношення (1) та (2) відповідно:

$$M_{\xi} = \sum_{w\in\Omega} p(w) * \xi(w) = 0.1*1 + 0.4*2 +$$
$$+ 0.3*3 + 0.2*4 + 0.1*5 = 3.1;$$

$$M_A^* = \frac{\sum_{w\in\Omega} \mu_A(w)w}{\sum_{w\in\Omega} \mu_A} = \big(0.9*1 + 1*2 + 1*3 +$$
$$+0.7*4 + 0.5*5 + 0.2*6 + 0.1*7 + 0\big)\big/\big(0.9 +$$
$$+1 + 1 + 0.7 + +0.5 + 0.2 + 0.1\big) = \frac{13.1}{4.4} = 2.98.$$

Як бачимо ми отримали дуже близькі значення математичного сподівання для обох величин. Це й не дивно, адже ми намагалися описати одну й ту саму події різними способами підрахунку невизначеності. Такий результат можна інтерпретувати як те, що найкраще самопочуття буде у Миколи, якщо він з'їсть три кекси, адже обидва значення математичного сподівання близько 3-х.

Математичне сподівання неперервної нечіткої величини знаходиться за допомогою співвідношення (2), але замість суми використовується інтегрування, тобто:

$$M_A^* = \frac{\int\limits_{w\in\Omega} w\mu_A(w)dw}{\int\limits_{w\in\Omega} \mu_A(w)dw}.$$

Припустимо маємо нечітку величину N з наступним розподілом можливостей:

$$\mu_N(x) = \begin{cases} 0, x < 1; \\ x-1, x \in [1,2]; \\ -0.5x+2, x \in [2,4]; \\ 0, x > 4. \end{cases}$$

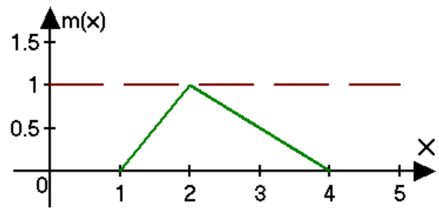

Рис. 2. Функція $\mu_N(x)$

Знайдемо математичне сподівання для нечіткої величини N:

$$M_N^* = \frac{\int\limits_{x\in\Omega} w\mu_N(x)dx}{\int\limits_{x\in\Omega} \mu_N(x)dx} =$$

$$= \frac{\int\limits_{x\in[1,2]} (x^2 - x)dx + \int\limits_{x\in[2,4]} (2x - 0.5x^2)dx}{\int\limits_{x\in[1,2]} (x-1)dx + \int\limits_{x\in[2,4]} (2-0.5x)dx} =$$

$$= \frac{\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{32}{2} - \frac{64}{6} - \frac{8}{2} + \frac{8}{6}}{\frac{4}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 + 2\cdot 4 - \frac{16}{4} - 2\cdot 2 + \frac{4}{4}} = 2.33.$$

Отже математичне сподівання неперервної нечіткої величини N дорівнює 2,33.

Нечітка випадкова величина

Розглянемо випадкову величину з біноміальним розподілом, що зазвичай позначається як $b(m,p)$, де m – кількість незалежних експериментів, а p це ймовірність вдалого виконання експерименту. Такий розподіл дозволяє визначати, яка ймовірність виконання k – вдалих експериментів. За формулою:

$$P_k = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}.$$

Але на практиці не завжди можна визначити точно p ймовірність вдалого виконання одного окремого експерименту, наприклад, якщо це значення буде визначатися рядом експертів. Пропонується визначати таку ймовірність не числом, а нечітким числом $\overline{p}$, для того щоб врахувати розбіжності думок експертів.

Виходячи з [5], нечітке число $\overline{A}$ – це випукла нечітка множина висотою одиниця, визначена на множині дійсних чисел $\mu_{\overline{A}} : R \to [0,1]$. Унімодальними називаються нечіткі числа, в яких міра належності дорівнює 1 лише в одній точці. А толерантними називаються ті нечіткі числа, в яких міра належності дорівнює одиниці на проміжку точок. Для зручності унімодальні нечіткі числа будемо позначати трійкою чисел *(a/c/b),* де *(a,b)* – інтервал, на якому міра належності нечіткого числа не дорівнює нулю, а *c* точка в якій міра належності дорівнює одиниці. Схожим чином будемо позначати й толерантні нечіткі числа але вже четвіркою чисел *(a/c/d/b)*, де *(a,b)* – так само інтервал, на якому міра належності нечіткого числа не дорівнює нулю, а *(c,d)* – інтервал, на якому міра належності дорівнює одиниці.

Для зручності нечіткі множини будемо описувати за допомогою α-перерізів. Відповідно до [2] α-перерізом нечіткої множини M називається звичайна множина вигляду

$$M[\alpha] = \{x, \mu_M(x) \geq \alpha\}.$$

α-перерізом нечіткого числа $\overline{A}$ є закритий обмежений інтервал $\overline{A}[\alpha]$ для всіх вигляду $\alpha \in [0,1]$. Будемо позначати нечіткі числа через α-переріз таким чином:

$\overline{A}[\alpha] = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$, для всіх $\alpha \in [0,1]$, де $A_1(\alpha)$ ($A_2(\alpha)$) монотонно зростаюча (спадаюча) функція від α при чому $A_1(1) \le A_2(1)$.

Замінивши ймовірність окремого експерименту в випадковій величині X з біноміальним розподілом на нечітке число $\overline{A}$ отримаємо в результаті, що закон розподілу теж буде описуватись нечітким числом. Тобто ймовірність станів випадкової величини буде визначатися таким чином:

$$P_k[\alpha] = \{C_m^k t^k (1-t)^{m-k} \mid t \in \overline{A}[\alpha]\},$$

для всіх $\alpha \in [0,1]$,

де $\overline{A}[\alpha]$ – α-перерізом нечіткого числа $\overline{A}$, що описує ймовірність вдалого експерименту.

Випадкову величину, параметрами якої будуть нечіткі числа, будемо називати **нечіткою випадковою величину.** Розподіл ймовірностей такої випадкової величини теж є нечітким числом.

Для кращого розуміння, розглянемо приклад. Нехай маємо випадкову величину X з біноміальним розподілом *b(3,0.7)*, тобто маємо серію з трьох експериментів з ймовірність вдалого результату окремо взятого експерименту 0.7. Такий розподіл буде визначатися чотирма станами, в залежності від кількості вдалих експериментів, та ймовірностями кожного стану, що визначається за законом

$$P_k = C_3^k p^k (1-p)^{3-k}, k = \overline{0,3}.$$

Зобразимо розподіл випадкової величини в табличному вигляді (табл. 2).

Таблиця 2

K – кількість вдалих експериментів	P_k – ймовірність k вдалих експериментів
0	$C_3^0 p^0 (1-p)^3 = (0.3)^3$
1	$C_3^1 p^1 (1-p)^2 = 3 \cdot (0.7) \cdot (0.3)^2$
2	$C_3^1 p^1 (1-p)^2 = 3 \cdot (0.7) \cdot (0.3)^2$
3	$C_3^3 p^3 (1-p)^0 = (0.7)^3$

Припустимо, що ймовірність вдалого виконання експерименту визначається неоднозначно. Наприклад, нехай $\overline{p}$ =(0.6/0.7/0.8) – унімодальне нечітке число, тобто його міра належності має вигляд

$$\mu_{\overline{p}}(x) = \begin{cases} 10x-6, \; x \in [0.6, 0.7]; \\ 8-10x, \; x \in [0.7, 0.8]; \\ 0, \; x \notin (0.6, 0.8). \end{cases}$$

Знайдемо α-перерізи для нечіткого числа $\overline{p}$ =(0.6/0.7/0.8). Оскільки $\overline{p}$ [0] це множина значень, для яких міра належності більша за нуль, вона матиме вигляд відрізка [0.6,0.8], а множина $\overline{p}$ [1] буде складатись з однієї точки 0.7, бо міра належності дорівнює одиниці лише в цій точці. А для всіх інших значень α $\overline{p}[\alpha]$ буде відрізок $[p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$, де функція $p_1(\alpha)$ є монотонно зростаючою, і визначається, як обернена функція до монотонно зростаючою частини функції міри належності ($y = 10x - 6$, при $x \in [0.6, 0.7]$), а функція $p_2(\alpha)$ – монотонно спадаючою, що визначається, як обернена до спадаючої частини функції міри належності ($y = 8 - 10x$, при $x \in [0.7, 0.8]$).

Отже число p можна описати наступним чином

$$\overline{p}[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] =$$
$$= [0.1\alpha + 0.6, 0.8 - 0.1\alpha], \; \alpha \in [0,1].$$

Знайдемо тепер розподіл випадкової величини X з нечіткою ймовірністю вдалого експерименту p = (0.6/0.7/0.8).

Ймовірність нульового стану, тобто без жодного вдалого експерименту, буде нечіткою множиною

$\overline{P}_0[\alpha] = [P_0^l(\alpha), P_0^r(\alpha)]$, для всіх $\alpha \in [0,1]$,

де функції мають вигляд

$$P_0^l(\alpha) = \inf\{(1-t)^3 \mid t \in p[\alpha]\},$$

$$P_0^r(\alpha) = \sup\{(1-t)^3 \mid t \in p[\alpha]\}.$$

Оскільки функція $(1-t)^3$ монотонно зростаюча при $t \in \overline{p}[0] = [0.6, 0.8]$, то інфінум та супремум $(1-t)^3$ будуть досягатися відповідно на лівому та правому кінці відрізку $\overline{p}[\alpha]$. Отже ймовірність нульового стану можемо написати простіше

$$\overline{P}_0[\alpha]=[(1-p_1(\alpha))^3,(1-p_2(\alpha))^3]=$$
$$=[(0.4-0.1\alpha)^3,(0.2+0.1\alpha)^3],$$

для всіх $\alpha\in[0,1]$.

Аналогічним чином обчислимо ймовірність і для інших станів:

$$\overline{P}_1[\alpha]=[3(p_1(\alpha))(1-p_1(\alpha))^2,3(p_2(\alpha))(1-p_2(\alpha))^2]=$$
$$=[3(0.1\alpha+0.6)(0.4-0.1\alpha)^2,3(0.8-0.1\alpha)(0.2+0.1\alpha)^2],$$

$$\overline{P}_2[\alpha]=[3(p_1(\alpha))^2(1-p_1(\alpha)),3(p_2(\alpha))^2(1-p_2(\alpha))]=$$
$$=[3(0.1\alpha+0.6)^2(0.4-0.1\alpha),3(0.8-0.1\alpha)^2(0.2+0.1\alpha)],$$

$$\overline{P}_3[\alpha]=[(p_1(\alpha))^3,(p_2(\alpha))^3]=$$
$$=[(0.1\alpha+0.6)^3,(0.8-0.1\alpha)^3],$$

для всіх $\alpha\in[0,1]$.

Зобразимо в результаті отриманий розподіл нечіткої випадкової величини в табличному вигляді (табл. 3).

Таблиця 3

K – кількість вдалих експериментів	P_k [α] – ймовірність *k* вдалих експериментів
0	$[(0.4-0.1\alpha)^3,$ $(0.2+0.1\alpha)^3]$
1	$[3(0.1\alpha+0.6)(0.4-0.1\alpha)^2,$ $3(0.8-0.1\alpha)(0.2+0.1\alpha)^2]$
2	$[3(0.1\alpha+0.6)^2(0.4-0.1\alpha),$ $3(0.8-0.1\alpha)^2(0.2+0.1\alpha)]$
3	$[(0.1\alpha+0.6)^3,$ $(0.8-0.1\alpha)^3]$

До цього ми розглядали лише дискретні нечіткі випадкові величини, але існують ще й неперервні. Побудуємо для прикладу неперервну нечітку випадкову величину.

Нехай маємо випадкову величину *X* з рівномірним розподілом *U(a,b)*, де *a*<*b*. Такий розподіл матиме наступну функцію щільності:

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ для } x\in[a,b];\\ 0, \text{ для } x\notin[a,b].\end{cases}$$

Знайдемо для такої випадкової величини ймовірність того, що значення цієї випадкової величини потрапляє до інтервалу [c,d] . З теорії ймовірності знаємо, що це дорівнює інтегралу від функції щільності за межами від *c* до *d*, тобто:

$$P_X([c,d])=\int_c^d f(x;a,b)dx=L(c,d;a,b)/(b-a),$$

де $L(c,d;a,b)$ – довжина інтервалу $[a,b]\cap[c,d]$.

Отже якщо взяти випадкову величину *X* з розподілом $U(1,5)$. То ймовірність того, що ця випадкова величина набуде значення з відрізку [4, 6] буде дорівнювати 0.25, тому, що

$$P_X([4,6])=\int_4^6 f(x;1,5)dx=$$
$$=L(4,6;1,5)/(5-1)=1/4.$$

Замінимо чіткі числа a та b на нечіткі числа, тим саме утворивши зі звичайної випадкової величини нечітку випадкову величину. Нехай $\overline{a}$ = (0/1/2) та $\overline{b}$ = (3/4/5). Знайдемо ймовірність потрапляння значень нечіткої випадкової величини $U(\overline{a},\overline{b})$ у відрізок [c,d] = [1,4]. Така ймовірність теж буде нечітким числом, будемо позначати її $\overline{P}([c,d])$, та α-перерізи $\overline{P}([c,d])[\alpha]= \quad =[p_1(\alpha),p_2(\alpha)]$, інтервал якого визначають функції від α .

Обчислимо таку ймовірність через знаходження меж інтервалу α-перерізів. Знаходитимемо функції $p_1(\alpha),p_2(\alpha)$ аналогічним чином, як і для дискретних нечітких величин, а саме:

$$p_1(\alpha)=\inf\{L(1,4;s,t)/(t-s)\mid s\in\overline{a}[\alpha],t\in\overline{b}[\alpha]\},$$

$$p_2(\alpha)=\sup\{L(1,4;s,t)/(t-s)\mid s\in\overline{a}[\alpha],t\in\overline{b}[\alpha]\}.$$

Легко помітити, що $p_2(\alpha)=1$. Щоб знайти інфімум необхідно розглянути чотири варіанти. Для початку запишемо нечіткі числа $\overline{a}$ = (0/1/2) та $\overline{b}$ = (3/4/5) через їх α-перерізи, а саме: $\overline{a}[\alpha]=[\alpha,2-\alpha]$ та $\overline{b}[\alpha]=[3+\alpha;5-\alpha]$. Тепер розглянемо випадки:

$$\alpha \le s \le 1, 3+\alpha \le t \le 4;$$

$$\alpha \le s \le 1, 4 \le t \le 5-\alpha;$$

$$1 \le s \le 2-\alpha, 3+\alpha \le t \le 4;$$

$$1 \le s \le 2-\alpha, 4 \le t \le 5-\alpha.$$

Проаналізувавши всі варіанти помічаємо, що інфімум дорівнює $3/(5-2\alpha)$. Таким чином ми знайшли функції, що визначають ймовірність потрапляння значень нечіткої випадкової величини $U(\overline{a},\overline{b})$ у відрізок [c,d] = [1,4], і саму ймовірність:

$$\overline{P}([1,4])[\alpha]=[p_1(\alpha),p_2(\alpha)]=[3/(5-2\alpha),1],$$

для всіх $\alpha \in [0,1]$.

Математичне сподівання нечіткої випадкової величини знаходиться таким же самим способом, як і звичайної, але воно як і ймовірність теж буде нечітким числом.

Продемонструємо це на прикладі. Знайдемо математичне сподівання нечіткої випадкової величини $X \square U(\overline{a},\overline{b})$ розглянутої вище. Математичне сподівання для неперервної випадкової величини дорівнює інтегралу по всьому простору від функції щільності помноженої на значення випадкової величини, а оскільки для нечіткої випадкової величини математичне сподівання буде нечітким числом, шукатимемо відразу α-перерізи цього числа

$$M_X[\alpha]=\left\{\int_s^t (x/(t-s)dx \mid s\in\overline{a}[\alpha], t\in\overline{b}[\alpha], s<t\right\},$$

для всіх $\alpha \in [0,1]$.

Помітивши, що інтеграл буде завжди дорівнювати $(s+t)/2$, отримуємо, що математичне сподівання дорівнює середньому арифметичному двох нечітких чисел, а саме:

$$M_X[\alpha]=(\overline{a}+\overline{b})/2,$$

для всіх $\overline{a}[0]=[s_1,s_2]$ та $\overline{b}=[t_1,t_2]$ таких, що $s_2<t_1$.

Приклади

На АТС кожну хвилину надходить певна кількість викликів. Ці виклики обробляються і комутуються. Знайти ймовірність (можливість) того, що за секунду апаратура АТС прийме менше 5 викликів. Позначимо цю подію X.

А. Припустимо, що інтенсивність надходження викликів за одну секунду становить 2. Застосуємо для цієї задачі випадкову величину розподілену за законом Пуассона з параметром 2. Як відомо у розподілі Пуассона ймовірність станів визначається наступним чином:

$$P_m=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Тоді ймовірність надходження на АТС менше 5 викликів буде дорівнювати сумі ймовірностей обробити від 0 до 4-х викликів, тобто:

$$P(X)=\sum_{k=0}^{5-1}P_k=\sum_{k=0}^{5-1}\frac{2^k}{k!}e^{-2}=$$

$$=e^{-2}(1+2+\frac{4}{2}+\frac{8}{6}+\frac{16}{24})=0.95.$$

Б. Припустимо, що надходження викликів за одну секунду записується нечіткою множиною A з такою мірою належності елементів:

$\mu_A(0) = 0.3$, $\mu_A(1) = 0.4$, $\mu_A(2) = 0.5$,
$\mu_A(3) = 0.6$, $\mu_A(4) = 0.6$, $\mu_A(5) = 0.7$,
$\mu_A(6) = 0.6$, $\mu_A(7) = 0.4$, $\mu_A(8) = 0.3$,
$\mu_A(9) = 0.2$, $\mu_A(10) = 0.1$.

Застосуємо для цієї задачі нечітку величину V, визначену від 0 до 10 та розподілом можливостей таким, як міра належності множини A. Щоб знайти можливість надходження на АТС менше 5 викликів необхідно знайти максимум можливостей перших п'яти станів, тобто:

$$\mu(X)=$$

$$=\max\{m_A(0),m_A(1),m_A(2),m_A(3),m_A(4)\}=0.6.$$

В. Припустимо, що інтенсивність надходження викликів за одну секунду неможливо визначити однозначно, але можна записати це значення у вигляді нечіткого числа $\overline{a}=(1/2/3)$. Застосуємо для цієї задачі нечітку випадкову величину розподілену за законом Пуассона з параметром $\overline{a}=(1/2/3)$. Як відомо у розподілі Пуассона ймовірність станів визначається наступним чином:

$$\overline{P}_m=\frac{\overline{a}^m}{m!}e^{-\overline{a}}.$$

Тоді ймовірність надходження на АТС менше 5 викликів буде дорівнювати сумі ймовірностей обробити від 0 до 4-х викликів, тобто:

$$\overline{P}(X)=\sum_{k=0}^{5-1}P_k=\sum_{k=0}^{5-1}\frac{\overline{a}^k}{k!}e^{-\overline{a}}.$$

Але оскільки це нечітка випадкова величина, то ймовірність станів буде нечітким числом, будемо знаходити його через α-перерізи, тобто:

$$\overline{P}(X)[\alpha]=\left\{\sum_{k=0}^{5-1}\frac{t^k}{k!}e^{-t}\mid t\in\overline{a}[\alpha]\right\},$$

для всіх $\alpha\in[0,1]$.

Запишемо нечітке число $\overline{a}=$ $=(1/2/3)$ через α-перерізи $\overline{a}[\alpha]=$ $=[1+\alpha;3-\alpha]$.

Отже шукана ймовірність буде дорівнювати

$$\overline{P}(X)[\alpha]=\left\{\sum_{k=0}^{5-1}\frac{t^k}{k!}e^{-t}\mid t\in[1+\alpha;3-\alpha]\right\}=$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{5-1}\frac{(3-\alpha)^k}{k!}e^{-(3-\alpha)};\sum_{k=0}^{5-1}\frac{(1+\alpha)^k}{k!}e^{-(1+\alpha)}\right],$$

для всіх $\alpha\in[0,1]$.

Висновок

Розглядаються різні способи описання невизначеної величини, а саме: ймовірнісний, через випадкову величину; можливістний, через нечітку величину та змішаний нечітка випадкова величина. Зручність способів описання невизначених величин досягається, в першу чергу, за допомогою використання апарата нечітких множин, який дозволяє виконувати обчислення ймовірності та можливості одних і тих же подій. Крім того, наводяться нові постановки задач і пропонуються відповідні моделі обчислення невизначеностей за допомогою невизначених величин. Розв'язок наведених у статті прикладів використовує як дискретний, так і неперервний підходи в теорії нечіткості.

Передбачається, що запропоновані підходи в майбутньому можуть бути узагальнені і досліджені на предмет оптимальності для певного класу задач. Планується також, розробити програмну систему, для обчислення різних типів невизначеностей.

1. *Провотар А.И., Лапко А.В.* О некоторых подходах к вычислению неопределённостей. // Проблеми програмування. – 2010. – № 2 – 3. – С. 22–28.
2. *Мациевский С.* Нечеткие множества. – Калининград: Издательство калининградского государственного университета, 2004. – 176 с.
3. *Leski J.* Systemy neuronowo-rozmyte. Warszawa: Naukowo-Techniczne, 2008. – 690 с.
4. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets ana Systems. – 1978. – N 1. – p. 3–28.
5. *James J.* Buckley Fuzzy Probabilities. New approach and aplplications, Birmingham: Springer, 2005. – 166 p.
6. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.*. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Телеком, 2006. – 382 с.

Одержано 19.07.2011

Про авторів:

Провотар Олександр Іванович,
доктор фізико-математичних наук,
професор,

Лапко Олександр Вікторович,
аспірант.

Місце роботи авторів:

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
Університет міста Жешув (Польща),
тел. 259 0511,
e-mail: aprowata@unicyb.kiev.ua,
mrolapko@gmail.com