5. Кобильник Т. П. Модифікація методу LU-факторизації для обчислення визначників розріджених матриць / Т. П. Кобильник, І. І. Лазурчак, Л. А. Остапчук // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробагатька (27.09–01.10 2004, м. Дрогобич) : [тези доповідей]. – Львів, 2004. — С. 247.

In the article the method of deployment determinants sparse matrices used in the implementation of functional and discrete method for solving boundary value problems eigenvalue with scalar coefficients in the differential operator.

Key words: *boundary value problems, banded-matrix, determinant, reduction, computer algebra systems.*

Отримано: 15.07.2014

УДК 517.9

В. П. Лісовська, канд. фіз.-мат. наук,
О. І. Неня, канд. фіз.-мат. наук

Київський національний економічний університет
імені Вадима Гетьмана, м. Київ

ПРО ПЕРМАНЕНТНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ ХИЖАК-ЖЕРТВА З МОНОТОННОЮ ФУНКЦІЄЮ ВПЛИВУ

У роботі розглянуто систему рівнянь, яка є дискретним аналогом моделі хижак-жертва з монотонною функцією впливу та нескінченним запізненням. Досліджується проблема побудови умов перманентної поведінки динамічної моделі. Для отримання достатніх умов перманентної поведінки розв'язків системи, використано методи, які базуються на застосуванні теорем порівняння. Отримано нові оцінки обмеженості розв'язку рівняння «хижака» та покращенно оцінки розв'язку рівняння «жертви».

Ключові слова: *модель хижак-жертва, перманентність, функціональний вплив.*

Постановка задачі. Дослідження різноманітних питань динамічної взаємодії між елементами моделі хижак-жертва було та є одним з домінуючих, як в екології, так і в математичній біології [3]. Актуальними є проблеми локальної та глобальної стійкості, періодичності, перманентної поведінки розв'язку моделі хижак-жертва [7; 8].

Існують численні біологічні та фізіологічні свідоцтва [1; 2; 6], що в багатьох випадках (особливо, коли хижаки вимушені в пошуках здобичі ділитися жертвою або конкурувати за жертву), більш повною, в порівнянні з класичною моделлю хижак — жертва, є модель у якій темп приросту чисельності хижака має бути функцією не однієї змінної чисельності популяції жертви і не двох незалежних змінних чисельності жертв та хижаків, а однієї змінної — відношення чисельності популяції жертви до популяції хижака. Дану функцію звичайно називають трофічною функцією хижака або функціональним впливом.

У роботах [4; 5] розглядається модель хижак-жертва з нескінченним запізненням

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left[a(t) - b(t)\int\limits_{-\infty}^{t} K(t-s)x(s)ds \right] - c(t)g\left(\dfrac{x(t)}{y(t)}\right)y(t), \\ y'(t) = y(t)\left[-d(t) + e(t)g\left(\dfrac{x(t-\tau(t))}{y(t-\tau(t))}\right)\right]. \end{cases} \quad (1)$$

У статті [10] досліджується перманентна поведінка моделі хижак-жертва, представлена системою вигляду:

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n)\exp\left\{ a(n) - b(n)x(n) - c(n)g\left(\dfrac{x(n)}{y(n)}\right)\dfrac{y(n)}{x(n)}\right\}, \\ y(n+1) = y(n)\exp\left\{ -d(n) + e(n)g\left(\dfrac{x(n-\tau(n))}{y(n-\tau(n))}\right)\right\}, n = 0,1,2,\ldots, \end{cases} \quad (2)$$

Для кожної обмеженої послідовності $a(n)$ введемо позначення

$$a^u = \sup_{n\in N} a(n), \quad a^l = \inf_{n\in N} a(n).$$

У цій роботі розглядається система рівнянь, яка є дискретним аналогом системи (1) та більш загальним випадком системи (2):

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n)\exp\left\{ a(n) - b(n)\sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)x(n-s) - c(n)g\left(\dfrac{x(n)}{y(n)}\right)\dfrac{y(n)}{x(n)}\right\}, \\ y(n+1) = y(n)\exp\left\{ -d(n) + e(n)g\left(\dfrac{x(n-\tau(n))}{y(n-\tau(n))}\right)\right\}, n = 0,1,2,\ldots, \end{cases} \quad (3)$$

де $x(n)$, $y(n)$ — представляють щільності популяцій жертви та хижака, $n \geq 0$, $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $e(n)$, $d(n)$, $\tau(n)$ — обмежені, невід'ємні послідовності такі, що

$$0 < a^l \leq a^u,\ 0 < b^l \leq b^u,\ 0 < c^l \leq c^u,$$

$$0 < d^l \leq d^u,\ 0 < e^l \leq e^u,\ 0 < \tau^l \leq \tau^u.$$

Дискретна функція $K(\cdot)$ задовольняє наступні умови:

(H_1) $K(s) \in [0,\infty)$ і обмежена для $s = 1,2,3,\ldots$.

(H_2) $\sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s) = 1$.

У роботі досліджується перманентна поведінка розв'язку $(x(n), y(n))$ системи рівнянь (3) з початковими умовами:

$$x(\theta)=\varphi_1(\theta),\ y(\theta)=\varphi_2(\theta),\ \varphi_i(0)>0,\ \varphi_i(\theta)\geq 0,\ i=1,2, \tag{4}$$

для $\theta \in Z^- = \{\ldots,-2,-1,0]$.

Для системи (3) з додатними початковими умовами (4) розв'язок $(x(n), y(n))$ існує для всіх $n \geq 0$, може бути однозначно побудований послідовно і, згідно виду рівнянь системи (3), задовольняє умови $x(n)>0$, $y(n)>0$, $n \geq 0$.

Функція $g(u)$ системи (3) є монотонною і задовольняє таким умовам (**M**):

(i) $g \in C^1\left(\left[0,+\infty\right), R\right), g(0)=0;$

(ii) $g'(u)>0$ для всіх $u \in \left[0,+\infty\right)$;

(iii) $\lim\limits_{u\to+\infty} g(u)=h>0$;

(iv) $\sup\limits_{z\in\left(0,+\infty\right)} \dfrac{g(z)}{z}=m \in \left(0,+\infty\right)$.

Розглянемо функцію

$$g(u)=\frac{\beta u^{\alpha}}{\gamma+u^{\alpha}}, \quad \alpha \geq 1, \tag{5}$$

яка, як неважко пересвідчитись, задовольняє умови $(i)-(iv)$.

Допоміжні результати.

Означення 1. Систему рівнянь (3) будемо називати перманентною, якщо існують додатні сталі m_i, M_i, $i=1,2$ такі, що

$$m_1 \leq \lim_{n\to+\infty}\inf x(n) \leq \lim_{n\to+\infty}\sup x(n) \leq M_1,$$

$$m_2 \leq \lim_{n\to+\infty}\inf y(n) \leq \lim_{n\to+\infty}\sup y(n) \leq M_2,$$

для будь якого розв'язку $u(n)=(x(n), y(n))$ системи (3) з додатними початковими даними.

Лема 1. (Див. [9]) Нехай $\{x(n)\}$ задовольняє умови $x(n)>0$ та

$$x(n+1) \leq x(n)exp\Big(r(n)\big(1-ax(n)\big)\Big)$$

для $n \in [n_1, \infty)$, де $a>0$, $\{r(n)\}$ — додатна послідовність. Тоді

$$\lim_{n\to+\infty}\sup x(n) \leq \frac{1}{ar^u} exp\left\{r^u-1\right\}.$$

Лема 2. (Див. [9]) Нехай $\{x(n)\}$ задовольняє умови

$$x(n+1) \ge x(n)exp\left(r(n)\left(1-ax(n)\right)\right),\ n \ge N_0,$$

та $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup x(n) \le M$, $x(N_0) > 0, N_0 \in N$, де $\{r(n)\}$ — додатна послідовність, $aM > 1$. Тоді

$$\lim_{n\to+\infty} \inf x(n) \ge \frac{1}{a} exp\left\{r^u\left(1-aM\right)\right\}.$$

Лема 3. Нехай для $\{x(n)\}$ виконуються умови $x(n) > 0$ та

$$x(n+1) \ge x(n)exp\left\{r(n)\left(-1+ag\left(\frac{K}{x(n)}\right)\right)\right\} \tag{6}$$

для $n \in [n_1, \infty)$, де $\{r(n)\}$ — додатна послідовність, числа $a > 0,\ K > 0$ такі, що $\frac{1}{a} < h$, де $h = \lim\limits_{u\to+\infty} g(u) > 0.$ Тоді

$$\lim_{n\to+\infty} \inf x(n) \ge \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)} exp\left\{-r^u\right\}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай існує таке $l_0 \in [n_1, +\infty)$, що $x(l_0+1) < x(l_0)$. Тоді з (6) випливає, що $x(l_0) > \dfrac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)}.$

Використовуючи останню нерівність отримуємо таку оцінку

$$\begin{aligned} x(l_0+1) &\ge x(l_0)exp\left\{r(l_0)\left(-1+ag\left(\frac{K}{x(l_0)}\right)\right)\right\} \ge \\ &\ge x(l_0)exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{x(l_0)}\right)\right)\right\} > \\ &> x(l_0)exp\left\{-r^u\right\} \ge \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)} exp\left\{-r^u\right\} = m. \end{aligned} \tag{8}$$

Доведемо, що $x(n) \ge m$ для всіх $n \in [l_0, +\infty)$. Припустимо, що існує число $\tilde{p}_0 \in [l_0, +\infty)$ таке, що $x(\tilde{p}_0) < m$. Тоді $\tilde{p}_0 \ge l_0 + 2$. Нехай p_0 — найменше ціле число таке що $x(p_0) < m$. Тоді $x(p_0 - 1) > x(p_0)$, звідки випливає, що застосувавши вищенаведені перетворення до $x(p_0)$ отримаємо, що $x(p_0) \ge m$. Отримуємо протиріччя.

Розглянемо випадок коли $x(n+1) > x(n)$ для всіх $n \in [n_1, +\infty)$. Нехай існує $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = L$. Стверджуємо, що $L \ge \dfrac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)}$.

Припустимо протилежне. Тоді існує число $N_0 \in N$ таке, що $x(n) < \dfrac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)}$ для всіх $n > N_0$. З цього випливає, що

$$x(n+1) \ge x(n)\exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{x(n)}\right)\right)\right\}. \qquad (9)$$

Перейшовши до границі в (9), одержимо $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) \ge \dfrac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)}$.

Отримуємо протиріччя.

Враховуючи, що $exp(-r^u) < 1$ для $r^u > 0$, маємо

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) \ge \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)} \ge \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)}\exp(-r^u), \qquad (10)$$

що і доводить справедливість твердження (7).

Лему доведено.

Лема 4. Нехай $\{x(n)\}$ задовольняє умови

$$x(n+1) \le x(n) exp\left\{r(n)\left(-1+ag\left(\frac{K}{x(n)}\right)\right)\right\},\ n > N_0,\ N_0 \in N, \qquad (11)$$

та $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf x(n) \ge m,\ \ x(N_0) > 0,$ де $\{r(n)\}$ — додатна послідовність, $a > 0,\ \ K > 0$ такі, що $ag(\frac{K}{m}) > 1,\ \ \frac{1}{a} < h$. Тоді

$$\lim_{n\to+\infty} \sup x(n) \le \frac{K}{g^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)} exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{m}\right)\right)\right\}. \qquad (12)$$

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf x(n) \ge m,$ то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $N_1 > N_0$, що $x(n) > m - \varepsilon$ для всіх $n > N_1$.

а) Нехай існує число $l_0 > N_1$, таке що $x(l_0+1) > x(l_0)$. Тоді $x(l_0) < \dfrac{K}{g^{-1}\left(\dfrac{1}{a}\right)}$. Звідки

$$x(l_0+1) \le x(l_0) exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{m-\varepsilon}\right)\right)\right\} \le$$

$$\le \frac{K}{g^{-1}\left(\dfrac{1}{a}\right)} exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{m-\varepsilon}\right)\right)\right\}.$$

Аналогічно до доведення леми 3 можна показати, що для всіх $n \ge l_0$ виконується оцінка

$$x(n) \le \frac{K}{g^{-1}\left(\dfrac{1}{a}\right)} exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{m-\varepsilon}\right)\right)\right\}.$$

Це означає, що при $\varepsilon \to 0$ маємо

$$\lim_{n\to+\infty} \sup x(n) \le \frac{K}{g^{-1}\left(\dfrac{1}{a}\right)} exp\left\{r^u\left(-1+ag\left(\frac{K}{m}\right)\right)\right\},$$

а отже (12) виконується.

б) нехай для всіх $n > N_1$ виконується $x(n+1) < x(n)$. Якщо існує $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = L$, то аналогічно до доведення леми 3 можна показати, що $L \le \dfrac{K}{g^{-1}\left(\dfrac{1}{a}\right)}$, а враховуючи те, що $ag(\dfrac{K}{m}) > 1$ маємо виконання оцінки (12).

Лему доведено.

Основні результати.

Теорема 1. Якщо виконується умова

$$a^l - b^u M_1 - c^u m > 0, \tag{13}$$

де

$$M_1 = \frac{\exp\left\{a^u - 1\right\}}{b^l \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)\exp\left\{-sa^u\right\}} \tag{14}$$

тоді існує число

$$m_1 = \frac{\left(a^l - c^u m\right)\exp\left\{a^u - c^l m - \exp\left\{a^u - c^l m - 1\right\}\right\}}{b^u \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)\exp\left\{-s(a^l - b^u M_1 - c^u m)\right\}}, \qquad (15)$$

таке, що для розв'язку $x(n)$ системи (3) виконуються оцінки

$$m_1 \le \lim_{n\to+\infty}\inf x(n) \le \lim_{n\to+\infty}\sup x(n) \le M_1. \qquad (16)$$

Доведення. З першого рівняння системи (3) маємо

$$x(n+1) \le x(n)exp\{a^u\},$$

звідки отримуємо нерівність

$$x(n) \le x(n-s)exp\{sa^u\},$$

з якої випливає, що

$$x(n-s) \ge x(n)exp\{-sa^u\}.$$

Підставивши останню нерівність в перше рівняння системи (3) отримуємо

$$x(n+1) \le x(n)\exp\left\{a(n) - b(n)\sum_{s=1}^{\infty} K(s)x(n)\exp\left\{-sa^u\right\}\right\} \le$$

$$\le x(n)\exp\left\{a(n)\left(1 - \frac{b(n)}{a(n)}\sum_{s=1}^{\infty} K(s)x(n)\exp\left\{-sa^u\right\}\right)\right\} \qquad (17)$$

$$\le x(n)\exp\left\{a(n)\left(1 - \frac{b^l}{a^u}\sum_{s=1}^{\infty} K(s)x(n)\exp\left\{-sa^u\right\}\right)\right\}.$$

Застосовуючи лему 1 до нерівності (17) маємо наступну оцінку

$$\lim_{n\to\infty}\sup x(n) \le \frac{\exp\left\{a^u - 1\right\}}{b^l \sum\limits_{s=1}^{\infty} K(s)\exp\left\{-sa^u\right\}} = M_1. \qquad (18)$$

З (18) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N_1 > 0$, $N_1 \in N$, що $x(n) \le M_1 + \varepsilon$ для всіх $n > N_1$. Тому з першого рівняння системи (3) маємо

$$x(n+1) \ge x(n)exp\left\{a(n) - b(n)(M_1 + \varepsilon) - c(n)m\right\} \ge$$

$$\ge x(n)exp\left\{a^l - b^u(M_1 + \varepsilon) - c^u m\right\}$$

звідки отримуємо

$$x(n-s) \le x(n)exp\{-s(a^l - b^u(M_1 + \varepsilon) - c^u m)\}.$$

Підставивши останню нерівність в перше рівняння системи (3) маємо

$$x(n+1) \geq$$

$$\geq x(n)\exp\left\{a(n)-b(n)\sum_{s=1}^{\infty}K(s)x(n)\exp\left\{-s(a^l-b^u(M_1+\varepsilon)-c^u m)\right\}-c(n)m\right\} \geq \quad (19)$$

$$\geq x(n)\exp\left\{\left(a(n)-c(n)m\right)\left(1-\frac{b^u\sum_{s=1}^{\infty}K(s)x(n)\exp\left\{-s(a^l-b^u(M_1+\varepsilon)-c^u m)\right\}}{a^l-c^u m}\right)\right\}.$$

Оскільки $a^l - c^u m > a^l - b^u M_1 - c^u m > 0$, то застосовуючи леми 1 та 2 до нерівності (19) отримаємо наступну оцінку при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\inf x(n) \geq \frac{\left(a^l-c^u m\right)\exp\left\{a^u-c^l m-\exp\left\{a^u-c^l m-1\right\}\right\}}{b^u\sum_{s=1}^{\infty}K(s)\exp\left\{-s(a^l-b^u M_1-c^u m)\right\}} = m_1.$$

Умова $aM > 1$ леми 2 набуде вигляду

$$\frac{exp\left\{a^u-c^l m-1\right\}}{a^u-c^l m} > 1. \qquad (20)$$

Оскільки $e^{(x-1)} \geq x$ для всіх $x \in R$, то звідси випливає, що нерівність (20) виконується.

Теорему доведено.

Розглянемо друге рівняння системи (3) при $\tau(n) = k$.

Теорема 2. Якщо виконується умова

$$\frac{d^u}{e^l} < h, \qquad (21)$$

то існують такі числа

$$m_2 = \frac{m_1}{\exp\left\{kd^u\right\}g^{-1}\left(\frac{d^u}{e^l}\right)}\exp\left\{-d^u\right\} \qquad (22)$$

та

$$M_2 = \frac{M_1 exp\left\{k\left(-d^l+e^u g\left(\frac{M_1}{m_2}\right)\right)\right\}}{g^{-1}\left(\frac{d^l}{e^u}\right)} exp\left\{d^u\left(-1+\frac{e^u}{d^l}g\left(\frac{g^{-1}\left(\frac{d^l}{e^u}\right)}{exp(-d^u)}\right)\right)\right\}, \qquad (23)$$

що для розв'язку $y(n)$ системи (3) виконуються оцінки

$$m_2 \le \lim_{n\to+\infty} \inf y(n) \le \lim_{n\to+\infty} \sup y(n) \le M_2.$$

Доведення. З оцінки (16) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N_1 > 0$, $N_1 \in N$, що для всіх $n > N_1$ виконується $x(n) \ge m_1 - \varepsilon$.

З другого рівняння системи (3) маємо

$$y(n+1) \ge y(n) exp\{-d^u\}$$

звідки отримуємо нерівність

$$y(n-k) \le y(n) exp\{kd^u\}.$$

Підставивши останню нерівність в друге рівняння системи (3) маємо

$$\begin{aligned} y(n+1) &\ge y(n) exp\left\{ e(n) g\left(\frac{m_1-\varepsilon}{y(n) exp\{kd^u\}} \right) - d(n) \right\} \ge \\ &\ge y(n) exp\left\{ d(n)\left(-1 + \frac{e^l}{d^u} g\left(\frac{(m_1-\varepsilon) exp\{-kd^u\}}{y(n)} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Застосовуючи лему 3 до нерівності (24) та враховуючи умову (21) отримаємо наступну оцінку при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \inf y(n) \ge \frac{m_1}{\exp\left\{kd^u\right\} g^{-1}\left(\frac{d^u}{e^l}\right)} \exp\left\{-d^u\right\} = m_2. \tag{25}$$

З оцінок (16) та (25) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N_1 > 0$, $N_1 \in N$, що для всіх $n > N_1$ виконується $x(n) \le M_1 + \varepsilon$, $y(n) \ge m_2 - \varepsilon$.

З другого рівняння системи (3) маємо

$$y(n+1) \le y(n) exp\left\{ -d^l + e^u g\left(\frac{M_1+\varepsilon}{m_2-\varepsilon} \right) \right\},$$

звідки отримуємо нерівність

$$y(n-k) \ge y(n) exp\left\{ -k\left(-d^l + e^u g\left(\frac{M_1+\varepsilon}{m_2-\varepsilon} \right) \right) \right\}.$$

Підставивши останню нерівність в друге рівняння системи (3) маємо

$$y(n+1) \le y(n) exp\{e(n) g\left(\frac{\left(M_1+\varepsilon\right) exp\left\{ k\left(-d^l + e^u g\left(\frac{M_1+\varepsilon}{m_2-\varepsilon} \right) \right) \right\}}{y(n)} \right) - d(n)\} \le$$

$$\le y(n)exp\left\{d(n)\left(-1+\frac{e^u}{d^l}g\left(\frac{\left(M_1+\varepsilon\right)exp\left\{k\left(-d^l+e^u g\left(\frac{M_1+\varepsilon}{m_2-\varepsilon}\right)\right)\right\}}{y(n)}\right)\right)\right\}. \quad (26)$$

З умови (21) маємо $\frac{d^l}{e^u} < \frac{d^u}{e^l} < h,$ тому застосовуючи леми 3, 4 та взявши

$$m = \frac{\left(M_1+\varepsilon\right)exp\left\{k\left(-d^l+e^u g\left(\frac{M_1+\varepsilon}{m_2-\varepsilon}\right)\right)\right\}}{g^{-1}\left(\frac{d^l}{e^u}\right)}exp(-d^u),$$

отримаємо оцінку при $\varepsilon \to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\sup y(n) \le \frac{M_1\exp\left\{k\left(-d^l+e^u g\left(\frac{M_1}{m_2}\right)\right)\right\}}{g^{-1}\left(\frac{d^l}{e^u}\right)}\times$$
$$\times\exp\left\{d^u\left(-1+\frac{e^u}{d^l}g\left(\frac{g^{-1}\left(\frac{d^l}{e^u}\right)}{\exp(-d^u)}\right)\right)\right\}=M_2. \quad (27)$$

Умова $ag\left(\frac{K}{m}\right)>1$ леми 4 набуде вигляду $\frac{e^u}{d^l}g\left(\frac{g^{-1}\left(\frac{d^l}{e^u}\right)}{exp(-d^u)}\right)>1,$

або після перетворень $exp(-d^u)<1,$ що завжди виконується, а отже и умова леми 4 виконується.

Теорему доведено.

Висновки.

1. Застосовуючи методику доведення теореми 1 до системи (2) обмеження (15) набуде вигляду

$$m_1=\frac{a^l-c^u m}{b^u}\exp\left\{a^u-c^l m-\exp\left\{a^u-c^l m-1\right\}\right\}$$

і є кращим за аналогічне обмеження

$$m_1 = \frac{a^l - c^u m}{b^u} exp\left\{(a^u - c^l m)\left(1 - \frac{b^u M_1}{a^l - c^u m}\right)\right\}$$

системи (2) публікації [10].

2. Порівнюючи результати теореми 2 та роботи [10], можна зробити висновок, що хоча умова (21) співпадає з умовою обмеженості розв'язку системи (2), але в даній роботі отримано обмеження (22) та (23) розв'язку $y(n)$ системи (3), на відміну відсутності таких оцінок в [10].

Список використаних джерел:

1. Arditi R. Coupling in predator-prey dynamics: Ratio- dependence / R. Arditi, L. R. Ginzburg // J. Theoret. Biol. — 1989. — Vol. 139. — P. 311–326.
2. Arditi R. Empirical evidence of the role of heterogeneity in ratio- dependent consumption / R. Arditi, H. Saiah // Ecology. — 1992. — Vol. 73. — P. 1544–1551.
3. Berryman A. A. The origins and evolution of predator-prey theory / A. A. Berryman // Ecology. — 1992. — Vol. 75. — P. 1530–1535.
4. Fan Y. H. Periodic solutions of delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic or nonmonotonic functional responses / Y. H. Fan, W. T. Li, L. L. Wang // Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2004. — № 5 (2). — P. 247–263.
5. Fan M. Periodicity in a delayed ratio-dependent predator–prey system / M. Fan, K. Wang // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — № 262. — P. 179–190.
6. Gutierrez A. P. The physiological basis of ratio-dependent predator-prey theory: A metabolic pool model of Nicholson's blowflies as an example / A. P. Gutierrez // Ecology. — 1992. — № 73. — P. 1552–1563.
7. Hsu S. B. Global analysis of Michaelis-Menten type ratio-dependent predator-prey system / S. B. Hsu, T. W. Hwang, Y. Kuang // J. Math. Biol. — 2003. — № 42. — P. 489– 506.
8. Kuang Y. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey systems / Y. Kuang, E. Beretta // J. Math. Biol. — 1998. — № 36. — P. 389–406.
9. Yang X. T. Uniform persistence and periodic solutions for a discrete predator-prey system with delays / X. T. Yang // J. Math. Anal. — 2006. — № 316. — P. 161–177.
10. Yang X. T. Uniform persistence for a discrete predator-prey system with delays / X. T. Yang, Y. Liu, J. Chen // Appl. Math. Comput. — 2011. — № 218. — P. 1174–1179.

A discrete-time analogue of predator-prey model with monotonic functional responses and endless delay is considered in the paper. We investigate the question of obtaining conditions of permanent behavior of the dynamic model. Sufficient conditions of permanence are obtained when the functional response function is monotonic. The methods based on the estimation theorems are used to receive the sufficient permanent conditions of the solutions. These results are applied to some special population model with endless delay, some new results are obtained and some known results are generalized.

Key words: *predator-prey model, permanence, functional response function.*

Отримано: 24.06.2014