УДК 519.21+62

А. В. Кінаш*, аспірант,
Я. М. Чабанюк,** д-р фіз.-мат. наук,
У. Т. Хімка*, канд. фіз.-мат. наук

*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,
**Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів

АСИМПТОТИЧНА ДИСИПАТИВНІСТЬ ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ

У роботі представлено дифузійний процес з сингулярно збуреним доданком з марковськими переключеннями. Встановлено вигляд генератора двокомпонентного марковського процесу в схемі дифузійної апроксимації. Знайдено розв'язок проблеми сингулярного збурення на збуреній функції Ляпунова. Встановлено умову асимптотичної дисипативності дифузійного процесу.

Ключові слова: *стохастичний процес, дифузія, дисипативність.*

Вступ. Проблема дисипативності системи виникла при розгляді дисипації енергії. Дисипативність детермінованих та випадкових систем з адитивним випадковим збуренням було розглянуто в роботах Хасмінського Р.З. [1,2], Самойленка А.М. та Станжицького О.М. [3], Мазурова О. Ю. [4], Brogliato B. [5] та інших.

У цій статті асимптотична дисипативність дифузійного процесу встановлюється на основі дисипативності граничного дифузійного процесу [1] та модельної граничної теореми [6].

Основний результат. Розглядається стохастичний процес з дифузійним збуренням [6], що визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + \varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dt + \\ +\sigma(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2))dw(t), \tag{1}$$

де $u(t)$ — випадкова еволюція, $t \ge 0$; $C_0(u;x)$ — сингулярне збурення функції регресії $C(u;x), u \in \boldsymbol{R}^d$; $w(t)$ — вінерівський процес; $\sigma(u;x)$ — дифузія, $x(t)$ — марковський процес в просторі $(X, \boldsymbol{X})$ з стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ [6].

Генератор марковського процесу визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X Q(x;dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]. \tag{2}$$

Для генератора $\boldsymbol{Q}$ марковського процесу $x(t), t \ge 0$, визначений потенціал $\boldsymbol{R}_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1}$, де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x)$ — проектор на підпростір нулів оператора $\boldsymbol{Q}: N_{\boldsymbol{Q}} = \{\varphi : \boldsymbol{Q}\varphi = 0\}$ [6].

Гранична еволюція для системи (1) має представлення

$$du(t) = a(u)dt + \sigma(u)dw(t), \qquad (3)$$

де

$$a(u) = \int_X C_0(u;x)R_0C_0^{'}(u;x)\pi(dx) + \int_X C(u;x)\pi(dx), \qquad (4)$$

а гранична дифузія $\sigma(u)$ визначається зі співвідношення

$$\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u),$$

де

$$B(u) = 2\int_X C_0(u;x)R_0C_0(u;x)\pi(dx) + \int_X \sigma^2(u;x)\pi(dx). \qquad (5)$$

Усереднена функція регресії визначається співвідношенням

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u;x). \qquad (6)$$

Виконується умова балансу

$$\Pi C_0(x) \equiv 0, \qquad (7)$$

Оператор $\tilde{\mathbf{L}}(x)$ має представлення

$$\tilde{\mathbf{L}}(x)\varphi(u) = \left[a(u) - C_0(u;x)R_0C_0^{'}(u;x) - C(u;x)\right]\varphi'(u) +$$

$$+\left[\frac{1}{2}B(u) - C_0(u;x)R_0C_0(u;x) - \frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\right]\varphi''(u).$$

Означення. Система (1) називається асимптотично дисипативною, якщо дисипативною є гранична еволюція (3) [1, с. 31].

Теорема. Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in \boldsymbol{C}^3(\boldsymbol{R}^d)$ системи

$$\frac{du}{dt} = a(u), \qquad (8)$$

яка задовольняє умовам [6]

C1: $\left|C_0(u;x)R_0[\tilde{L}(u;x)V'(u)]'\right| < M_1V(u), M_1 > 0;$

C2: $\left|C(u;x)R_0[C_0(u;x)V'(u)]'\right| < M_2V(u), M_2 > 0;$

C3: $\left|\sigma^2(u;x)R_0[C_0(u;x)V'(u)]''\right| < M_3V(u), M_3 > 0;$

C4: $\left|C(u;x)R_0[\tilde{L}(u;x)V'(u)]'\right| < M_4V(u), M_4 > 0;$

C5: $\left|\sigma^2(u;x)R_0[\tilde{L}(u;x)V'(u)]''\right| < M_5V(u), M_5 > 0.$

Крім того при $c_1 > 0, c_2 > 0$ виконуються умови

$$a(u)V'(u) < -c_1V(u), \qquad (9)$$

$$\sup_u \| \sigma(u) \| < c_2, \qquad (10)$$

а також виконується умова балансу (7).

Тоді система (1) асимптотично дисипативна.

Лема 1. Генератор двокомпонентного марковського процесу

$$u_t^{\varepsilon} := u^{\varepsilon}(t); x_t^{\varepsilon} := x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), t \geq 0$$

в банаховому просторі $B(\mathbf{R}^d, X)$ дійснозначних функцій $\varphi(u;x) \in$ $\in \mathbf{C}^{2,0}(\mathbf{R}^d, X)$ має представлення

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x) + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u;x) + \mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u;x), \qquad (11)$$

де

$$\mathbf{\Gamma}(x)\varphi(u;x) = C(u;x)\varphi'(u;x) + \frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x), \qquad (12)$$

та

$$\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u) = C_0(u;x)\varphi'(u;x).$$

Доведення. Генератор марковського процесу на збуреній тест-функції визначається зі співвідношення:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x) = \lim_{\Delta \to 0}\frac{1}{\Delta}[E[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u;x)] \mid u_t^{\varepsilon} = u, x_t^{\varepsilon} = x]. \qquad (13)$$

Для умовного математичного сподівання, маємо:

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] = E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})][I(\theta_x > \Delta) + I(\theta_x < \Delta)],$$

де $I(\theta_x > \Delta)$ і $I(\theta_x < \Delta)$ — індикатори часу перебування в стані x. Функція розподілу часу перебування θ_x в стані x має показниковий розподіл, тому справедливими є співвідношення:

$$\begin{cases} I(\theta_t > \varepsilon^{-2}\Delta) = e^{-\varepsilon^{-2}q(t)\Delta} = 1 - \varepsilon^{-2}q(t)\Delta + o(\Delta); \\ I(\theta_t \leq \varepsilon^{-2}\Delta) = 1 - e^{-\varepsilon^{-2}q(t)\Delta} = \varepsilon^{-2}q(t)\Delta + o(\Delta). \end{cases} \qquad (14)$$

Підставляючи (14) в вираз для умовного математичного сподівання, отримуємо:

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}; x_{t+\Delta})](1 - \varepsilon^{-2}q(t)\Delta + o(\Delta)) +$$
$$+ E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})](\varepsilon^{-2}q(t)\Delta + \ +o(\Delta)).$$

Розкладемо другий доданок за формулою Тейлора:

$$\varepsilon^{-2}q(t)\Delta E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}^{\varepsilon}; x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] =$$
$$= \varepsilon^{-2}q(t)[E_{u,x}\varphi(u;x) + E_{u,x}(\varphi'(u;x)\Delta u)]\Delta + o(\Delta). \qquad (15)$$

Звідси,

$$E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}; x_{t+\Delta})] = E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}; x)] - \varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x)]\Delta -$$
$$-\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]\Delta + \varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta}; x_{t+\Delta})]\Delta + o(\Delta).$$

Підставимо отримані результати в (13):

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x)] - \varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x)]\Delta -$$

$$-\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]\Delta + \varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x_{t+\Delta})]\Delta - \varphi(u;x) + o(\Delta).$$

До доданку $\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x_{t+\Delta})]\Delta$ застосуємо розклад (15):

$$\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x_{t+\Delta})]\Delta = \varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta})]\Delta +$$

$$\varepsilon^{-2}q(x)E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\Delta u]\Delta + o(\Delta).$$

Підставляючи отримане співвідношення в рівняння генератора (13), отримуємо:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x)] + \varepsilon^{-2}q(x)\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta})] - E_{u,x}[\varphi(u;x)]]\Delta +$$

$$+\varepsilon^{-2}q(x)\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\Delta u] - E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]]\Delta - \varphi(u;x) + o(\Delta).$$

Розглянемо окремо доданок

$$q(x)\lim_{\Delta\to 0}[E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta})] - E_{u,x}[\varphi(u;x)]].$$

Враховуючи, що генератор марковського процесу має вигляд (2), то має місце рівність:

$$q(x)\lim_{\Delta\to 0}[E_{u,x}[\varphi(u;x_{t+\Delta})] - E_{u,x}[\varphi(u;x)]] = \lim_{\Delta\to 0}\mathbf{Q}\varphi(u;x) = \mathbf{Q}\varphi(u;x).$$

Підставимо отриманий результат в рівняння (13):

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u_{t+\Delta};x)] + \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x) +$$

$$+\varepsilon^{-2}q(x)\lim_{\Delta\to 0}[E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\Delta u] - E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]] - \varphi(u;x) + o(\Delta).$$

Обчислимо окремо другу границю:

$$\lim_{\Delta\to 0}[E_{u,x}[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\Delta u] - E_{u,x}[\varphi'(u;x)\Delta u]].$$

Проінтегрувавши (1) в проміжку $[t;t+\Delta]$, отримаємо:

$$u_{t+\Delta} = u_t + \int_t^{t+\Delta} C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds +$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta} C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds + \int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s).$$

Звідси,

$$\Delta u = u_{t+\Delta} - u_t = \int_t^{t+\Delta} C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds +$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta} C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds + \int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s).$$

Отже,

$$\lim_{\Delta\to 0}\left[E_{u,x}\left[\varphi'(u;x_{t+\Delta})\left(\int_t^{t+\Delta} C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta} C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)\right]-E_{u,x}\left[\varphi'(u;x)\left(\int_t^{t+\Delta} C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta} C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)\right]\right]=0.$$

Враховуючи отримані результати, генератор (13), набуде вигляду:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)-\varphi(u;x)+o(\Delta)=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}\left[\varphi(u+\int_t^{t+\Delta} C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta} C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\right.$$

$$\left.+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s);x)\right]+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)-\varphi(u;x)+o(\Delta).$$

Додамо і віднімемо у першому доданку $\varphi(z,x)$, де

$$z=u+\int_t^{t+\Delta} C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta} C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds.$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}\left[\varphi(z+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s);x)--\varphi(z;x)+\varphi(z;x)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}\left[\varphi(z+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s);x)-\varphi(z;x)\right]+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(z;x)].$$

Застосуємо формулу Тейлора до першого доданку отриманого виразу:

$$E_{u,x}\left[\varphi(z+\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s);x)\right]=$$

$$=E_{u,x}[\varphi(z;x)]+E_{u,x}[\varphi'(z;x)]E_{u,x}\left(\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)+\quad(16)$$

$$+\frac{1}{2}E_{u,x}[\varphi''(z;x)]E_{u,x}\left(\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)^2+o(\Delta).$$

Враховуючи (15) і (16), для границі буде вірним:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[E_{u,x}[\varphi(u+\Delta u;x)]=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}E_{u,x}[\varphi''(z;x)]\times\right.$$

$$\left.\times E_{u,x}\left(\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)^2\right]+\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E_{u,x}[\varphi(z;x)]+o(\Delta).$$

Остаточно генератор набуває вигляду:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi(u;x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}E_{u,x}[\varphi''(u+\int_t^{t+\Delta}C\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{-1}\int_t^{t+\Delta}C_0\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)ds;x)\right]E_{u,x}\left(\int_t^{t+\Delta}\sigma\left(u(s);x\left(\frac{s}{\varepsilon^2}\right)\right)dw(s)\right)+$$

$$+E_{u,x}[\varphi(z;x)]+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)-\varphi(u;x)+o(\Delta)=\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)+\lim_{\Delta\to 0}E_{u,x}[\varphi(z;x)-\varphi(u;x)]+o(\Delta)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)+\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x)+$$

$$+\lim_{\Delta\to 0}E_{u,x}[\varphi(u;x)+(C(u;x)++\varepsilon^{-1}C_0(u;x))\varphi'(u;x)-\varphi(u;x)]+o(\Delta)=$$

$$=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x)+\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\varphi''(u;x)+C(u;x)\varphi'(u;x)+\varepsilon^{-1}C_0(u;x)\varphi'(u;x).$$

Цей вигляд збігається з (11).

Лема 2. Граничний генератор $\mathbf{L}$ на збуреній тест-функції

$$\varphi^{\varepsilon}(u;x)=\varphi(u)+\varepsilon\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\varphi_2(u;x),\varphi(u)\in\mathbf{C}^3(\mathbf{R}^d) \tag{17}$$

визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x)=\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi(u)]+\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\\+\boldsymbol{C}_0\varphi_1(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi(u)+\varepsilon\theta,\end{aligned} \tag{18}$$

де θ — залишковий член, який визначається зі співвідношення

$$\theta=\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x). \tag{19}$$

Доведення. Генератор (13) на збуреній тест-функції (17) має представлення:

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x)=[\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{C}_0+\mathbf{\Gamma}][\varphi(u)+\varepsilon\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\varphi_2(u;x)]=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u)+$$

$$+\varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{C}_0\varphi(u)+\boldsymbol{C}_0\varphi_1(u;x)+\varepsilon\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi(u)+$$

$$+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\varepsilon^2\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u)+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi(u)]+$$

$$+[\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_1(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi(u)]+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x)].$$

Оскільки $\mathbf{Q}\in N_{\boldsymbol{Q}}$, то перший доданок задовольняє співвідношення

$$\mathbf{Q}\varphi(u)=0.$$

Звідси,

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u;x)=\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi(u)]+[\mathbf{Q}\varphi_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_1(u;x)+\mathbf{\Gamma}\varphi(u)]+$$
$$+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x)].$$

Позначивши

$$\mathbf{\Gamma}\varphi_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0\varphi_2(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}\varphi_2(u;x)=\theta,$$

генератор набуває вигляду (18).

Лема 3. Розв’язок проблеми сингулярного збурення для генератора $\mathbf{L}^{\varepsilon}$ на функції Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(u;x)=V(u)+\varepsilon V_1(u;x)+\varepsilon^2 V_2(u;x), V(u)\in\mathbf{C}^3(\mathbf{R}^d) \tag{20}$$

має вигляд:

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u;x)=\mathbf{L}V(u)+\varepsilon\theta(x)V(u), \tag{21}$$

де $\mathbf{L}$ — граничний генератор вигляду

$$\mathbf{L}V(u)=a(u)V'(u)+\frac{1}{2}B(u)V''(u),$$

І залишковий член $\theta(x)$ визначається співвідношенням

$$\theta(x)V(u)=\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)+\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u).$$

Доведення. Розглянемо дію генератора (18) на збурену функцію Ляпунова (20):

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u;x)=\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}V_1(u;x)+\mathbf{C}_0(x)V(u)]+[\mathbf{Q}V_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)V_1(u;x)+$$
$$+\mathbf{\Gamma}V(u)]+\varepsilon[\mathbf{\Gamma}(x)V_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)V_2(u;x)+\varepsilon\mathbf{\Gamma}(x)V_2(u;x)],$$

де $\mathbf{\Gamma}(x)V(u;x)$ визначається зі співвідношення (12).

Застосовуючи умову розв’язності проблеми сингулярного збурення, для функції $V_1(u;x)$ маємо:

$$\mathbf{Q}V_1(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)V(u)=0;$$
$$\mathbf{Q}V_1(u;x)=-\boldsymbol{C}_0(x)V(u).$$

Звідси та з умови балансу (6), отримуємо вигляд $V_1(u;x)$:

$$V_1(u;x)=\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u). \tag{22}$$

Використовуючи другу умову розв’язності, має місце рівність:

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)V_1(u;x)+\mathbf{\Gamma}(x)V(u)=\mathbf{L}V(u).$$

Підставимо (22) в останнє співвідношення:

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)+\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)+\mathbf{\Gamma}(x)V(u)=\mathbf{L}V(u);$$
$$\mathbf{Q}V_2(u;x)=\mathbf{L}V(u)-\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)-\mathbf{\Gamma}(x)V(u); \tag{23}$$

Позначимо через $\mathbf{L}(x)V(u)$ вираз

$$\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)+\mathbf{\Gamma}(x)V(u)=\mathbf{L}(x)V(u) \tag{24}$$

і підставимо в рівняння (23):

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)=\mathbf{L}V(u)-\mathbf{L}(x)V(u), \tag{25}$$

де

$$\mathbf{L}=\Pi\mathbf{L}(x). \tag{26}$$

Через $\tilde{\mathbf{L}}(x)$ позначимо різницю $\tilde{\mathbf{L}}=\mathbf{L}-\mathbf{L}(x)$, тоді (25) буде мати вигляд

$$\mathbf{Q}V_2(u;x)=\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u).$$

З останньої рівності отримаємо представлення функції $V_2(u;x)$:

$$V_2(u;x)=\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u). \tag{27}$$

Підставляючи (24) в вираз для граничного генератора (26), будемо мати

$$\mathbf{L}=\Pi\mathbf{L}(x)=\Pi\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)+\Pi\mathbf{\Gamma}(x). \tag{28}$$

Розглянемо окремо перший доданок:

$$\Pi\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)=\Pi C_0(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]'=$$

$$=\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]'\pi(dx)=\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0'(u;x)V'(u)\pi(dx)+$$

$$+\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0(u;x)V''(u)\pi(dx).$$

Для другого доданку справедливим є співвідношення:

$$\Pi\mathbf{\Gamma}(x)V(u)=\Pi C(u;x)V'(u)+\frac{1}{2}\Pi\sigma^2(u;x)V''(u)=\int_X C(u;x)V'(u)\pi(dx)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_X\sigma^2(u;x)V''(u)\pi(dx).$$

Підставимо отримані значення в (28):

$$\mathbf{L}V(u)=\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0'(u;x)V'(u)\pi(dx)+\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0(u;x)V''(u)\pi(dx)+$$

$$+\int_X C(u;x)V'(u)\pi(dx)++\frac{1}{2}\int_X\sigma^2(u;x)V''(u)\pi(dx)=$$

$$=\left[\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0'(u;x)\pi(dx)+\int_X C(u;x)V'(u)\pi(dx)\right]V'(u)+$$

$$+\left[\int_X C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0(u;x)\pi(dx)+\frac{1}{2}\int_X\sigma^2(u;x)\pi(dx)\right]V''(u).$$

Отже, враховуючи (4) та (5), граничний генератор набуде вигляду:

$$\mathbf{L}V(u) = a(u)V'(u) + \frac{1}{2}B(u)V''(u), \tag{29}$$

що збігається з виразом для граничного генератора в умові леми.

Тепер, використовуючи вирази для функцій $V_1(u;x)$ і $V_2(u;x)$, можна знайти вигляд залишкового члена $\theta(x)$. Отже, підставляючи (22) та (27) в останній доданок генератора на збуреній функції Ляпунова, отримуємо залишковий член, вигляд якого збігається з виглядом наведеним в умові леми

$$\theta(x)V(u) = \boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u) + \mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u) + \varepsilon\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u). \tag{30}$$

Таким чином, враховуючи рівняння (29) та (30), отримаємо вигляд генератора (21).

Доведення теореми. Розглянемо залишковий член (30).

Для першого доданку маємо:

$$\boldsymbol{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u) = C_0(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{L}(u;x)V'(u)]'.$$

Враховуючи (12), для другого доданку буде справедливим:

$$\left|\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)\right| = \left|C(u;x)[\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)]' + \frac{1}{2}\sigma^2(u;x)[\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)]''\right| =$$

$$= \left|C(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]' + \frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(u;x)V'(u)]''\right| \le$$

$$\le \left|C(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(\mathrm{u};x)V'(u)]'\right| + \left|\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\mathbf{R}_0[C_0(\mathrm{u};x)V'(u)]''\right|.$$

З умов С2 і С3 теореми, маємо

$$\left|\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)\right| < M_2V(u) + \frac{1}{2}M_3V(u).$$

Позначивши через M_6 суму $M_2 + \frac{1}{2}M_3$, отримуємо оцінку

$$\left|\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u)\right| < M_6V(u). \tag{31}$$

З урахуванням умов С4 та С5 теореми, для третього доданку залишкового члена вірною є оцінка:

$$\left|\mathbf{\Gamma}(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)\right| = \left|C(u;x)[\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)]' + \frac{1}{2}\sigma^2(u;x)[\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)V(u)]''\right| =$$

$$= \left|C(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathrm{L}}(u;x)V'(u)]' + \frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathrm{L}}(u;x)V'(u)]''\right| \le$$

$$\le \left|C(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathrm{L}}(u;x)V'(u)]'\right| + \left|\frac{1}{2}\sigma^2(u;x)\mathbf{R}_0[\tilde{\mathrm{L}}(u;x)V'(u)]''\right| < M_4V(u) + \frac{1}{2}M_5V(u).$$

Аналогічно, через M_7 позначивши вираз $M_4 + \frac{1}{2} M_5$, будемо мати:

$$\left| \mathbf{\Gamma}(x) \mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{L}}(x) V(u) \right| < M_7 V(u). \tag{32}$$

Отже, з врахуванням умови С1 теореми, а також співвідношень (31), (32), для залишкового члена вірним є обмеження:

$$\left\| \theta(x) V(u) \right\| < M V(u), \tag{33}$$

де $M = M_1 + M_6 + \varepsilon M_7$.

Використовуючи твердження леми 3 і вираз (33) не важко перевірити умови Модельної граничної теореми ([6], с. 197), тобто має місце слабка збіжність процесів $u^{\varepsilon}(t) \to u(t)$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай тепер $\dfrac{d^{(1)} V(u)}{du}$ — похідна від функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії системи (3).

Оскільки функція Ляпунова $V(u)$ задовольняє умову Ліпшиця:

$$\left| V(u_2) - V(u_1) \right| < B \left| u_2 - u_1 \right|,$$

де B — константа, то справедливою буде наступна оцінка [1, с. 28]:

$$\frac{d^{(1)} V(u)}{du} \le \frac{dV(u)}{du} + B \left\| \sigma(u) \right\| \left| dw(t) \right|,$$

де $\dfrac{dV(u)}{du}$ — похідна від функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії детермінованої системи (8).

Застосовуючи умови теореми (9) і (10), отримуємо наступну оцінку для $\dfrac{d^{(1)} V(u)}{du}$:

$$\frac{d^{(1)} V(u)}{du} \le -c_1 V(u) + B c_2 \left| dw(t) \right|.$$

Це дає можливість знайти оцінку функції Ляпунова $V(u)$ [1, с. 23]:

$$V(u) \le V(u_0) e^{\int_0^t -c_1 ds} + \int_0^t e^{\int_s^t -c_1 dp} B c_2 \left| dw(s) \right| ds.$$

Отже,

$$V(u) \le V(u_0) e^{-c_1 t} + B c_2 \int_0^t e^{-c_1 (t-s)} \left| dw(s) \right| ds.$$

Обчислюючи математичне сподівання обох частин нерівності, маємо:

$$EV(u) \le V(u_0)e^{-c_1 t} + Bc_2 \int_0^t e^{-c_1(t-s)} E\left|dw(s)\right| ds.$$

З властивостей вінерівського процесу та оцінки ([1, с.32)

$$\mathbf{P}\left\{\left|u(t)\right| > R\right\} \le \frac{EV(u)}{\inf\limits_u V(u)}, R \to \infty,$$

випливає, що система (3) дисипативна.

Отже, з Модельної граничної теореми та дисипативності системи (3) слідує асимптотична дисипативність системи (1).

Висновки. Встановлена дисипативність вихідної випадкової еволюції з сингулярно збуреним доданком відносно малого параметру та марковськими переключеннями дає можливість поставити завдання про асимптотичну дисипативність такої еволюції з напівмарковськими переключеннями. Для цього спочатку необхідно встановити дифузійність граничного процесу через розв'язок проблеми сингулярного збурення для компенсуючого генератора вихідної еволюції та супроводжуючого марковського процесу [6].

Список використаних джерел:

1. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 368 с.
2. Хасьминский Р. З. О диссипативности случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями / Р. З. Хасьминский. — М., 1965. — С. 88–104.
3. Самойленко А. М. Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями : монографія / А. М. Самойленко, О. М. Станжицький. — К. : Наукова думка, 2009. — 336 с.
4. Mazurov A. Stochastic dissipativity with risk-sensitive storage function and related control problems / A. Mazurov, P. Pakshin. — Kumamoto : ICIC Express Letters, 2008. — Vol. 3, № 1. — P. 53–60.
5. Brogliato B. Dissipative Systems Analysis and Control / B. Brogliato et al. — L. : Springer, 2007. — 576 p.
6. Korolyuk V. S. Stochastic Systems in Merging Phase Space/ V. S. Korolyuk, N. Limnios. — World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.

In this paper we present a diffusion process with singular perturbation terms with Markov switching. The form of generator for two-component Markov process in a diffusion approximation scheme was established. We found the solution of singular perturbation problem for perturbed Lyapunov function. And set the condition for the asymptotic dissipativity of the diffusion process.

Key words: *stochastic process, diffusion, dissipativity.*

Отримано: 15.09.2014