УДК 519.21

П. П. Горун, аспірант
Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Для випадку залежної від зовнішнього середовища сингулярно збуреної функції регресії досліджено асимптотичну поведінку стрибкової процедури стохастичної оптимізації в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації. Показано, що генератор дифузійного процесу є гетерогенним в часі, а його флуктуації мають залежний від еволюції характер.

Ключові слова: *стрибковий марковський процес, стохастична оптимізація, асимптотична поведінка, дифузійна апроксимація.*

Вступ. Дослідження поведінки флуктуацій процедури стохастичної оптимізації (ПСО) дає оцінку швидкості її збіжності до точки екстремуму усередненої еволюційної системи. Така проблема виникає при використанні алгоритму фазового усереднення випадкових еволюцій [1], який базується на близькості вихідної та усередненої еволюційних систем [2]. Так, в [3–4] досліджено поведінку флуктуацій дифузійної еволюційної системи з марковськими перемиканнями (процедура стохастичної апроксимації), де функція швидкості має сингулярно збурений доданок з малим параметром серій.

Асимптотична поведінка процедури стохастичної *оптимізації* досліджувалась методом моментів, детально описаним у працях [5–7], а для загальніших випадків у працях [8–10] отримані інші граничні розподіли.

Варто відзначити важливість флуктуацій при встановленні швидкості збіжності дифузійної оптимізації еволюційних систем в схемі усереднення та при встановленні асимптотичної поведінки процедури стохастичної апроксимації [11].

Так, в роботі [2] розглядався випадок збурення, *залежного тільки від зовнішнього середовища.* У цій статті розглянуто стохастичну систему, в якій функція швидкості має *залежне від стану самої системи* сингулярне збурення по параметру серій.

Проблема збіжності дискретної ПСО була розглянута у праці [12], де встановлено достатні умови збіжності динамічної системи в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації при умові експоненційної стійкості усередненого дифузійного процесу.

При дослідженні асимптотичної поведінки стрибкової ПСО в схемі *усереднення* у роботі [13] було показано, що при деяких нормуваннях по часу суттєво зменшується дисперсія ПСО, а математичне сподівання знайденого розв'язку стає ближчим до точки екстремуму u^*.

У цій статті використовуються отримані у попередніх працях результати з метою аналізу та дослідження асимптотичної поведінки стрибкової ПСО в схемі *дифузійної апроксимації.*

Крім того, введено додаткові параметри, використовуючи які, можна отримати різну (прогнозовану) поведінку флуктуацій на зростаючих інтервалах часу.

Асимптотика стрибкової ПСО при дифузійному збуренні. Досліджується асимптотична поведінка стрибкової процедури стохастичної оптимізації у схемі серій в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації. Для простоти викладення розглядається одновимірний випадок функції регресії, однак отримані результати аналогічно переносяться на багатовимірний випадок.

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (ПСО) у схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі із сингулярним збуренням функції регресії задається співвідношенням (покладемо $\sum_{n=0}^{-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) = 0$) [14]:

$$u^\varepsilon(t) = u + \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon),\ u^\varepsilon(0) = u,\ t \ge 0, \tag{1}$$

де γ — показник нормування часу, ν — лічильний процес моментів відновлення марковського процесу (МП).

Для узагальнення отриманих результатів розглянемо наступні керуючі функції:

$$a(t) = \frac{a}{t^\alpha},\ a > 0,\ b(t) = \frac{b}{t^\beta},\ b > 0,$$

де α, β такі, що забезпечують умови збіжності ПСО (1) (див. [12, Теорема 1]):

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty,\ \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty,\ \sum_{t=0}^{\infty} a(t)b(t) < \infty. \tag{2}$$

В ПСО (1) мають місце вкладеності:

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon),\ x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon),\ a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon),\ \tau_n^\varepsilon = \tau_n / \varepsilon^{1/\gamma},\ n \ge 0,$$

де τ_n моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного МП $x(t), t \ge 0$ в стандартному фазовому просторі $(X, \mathcal{X})$.

Функція $C^\varepsilon(u; x) = \nabla_b C(u; x) + \varepsilon^{-c_0} C_0(u; x)$, $c_0 > 0$, $u \in R$, $x \in X$ задовільняє умови існування глобального розв'язку супроводжуючих систем:

$$\frac{du_x(t)}{dt} = C^{\varepsilon}(u_x(t); x),\ x \in X.$$

Під збіжністю стрибкової ПСО (1) мається на увазі збіжність з ймовірністю 1 до точки рівноваги u^* (не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $u^* = 0$) усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C'(u(t)),\ C(u) = q\int_X \rho(dx)C(u; x). \tag{3}$$

Це означає, що виконується рівність

$$C'(u^*) = 0. \tag{4}$$

З (3)–(4) отримуємо умову балансу для збурення $C_0(u; x)$ процедури (1):

$$\tilde{\Pi} C_0(0; x) = 0, \tag{5}$$

де $\tilde{\Pi}$ — проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ) $x_n,\ n \ge 0$, тобто $\tilde{\Pi}\varphi(x) = \int_X \rho(dx)\varphi(x)$.

Зокрема, якщо $\tilde{N}_0 = C_0(u; x)$, то

$$\tilde{\Pi} C_0'(0; x) = 0. \tag{6}$$

Для функції регресії $C(u; \cdot) \in C^3(R)$ має місце представлення:

$$\begin{gathered} \nabla_b C(u; x) = \frac{C(u+b; x) - C(u-b; x)}{2b} = \\ = C'(0; x) + uC''(0; x) + \frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{b^2}{3}\right)C'''(0; x) + o(u^2 + b^2), \end{gathered} \tag{7}$$

де $u = u(t), b = b(t)$. Аналогічно збурення $C_0(u; x) \in C^3(R)$ має представлення:

$$C_0(u; x) = C_0(0; x) + uC_0'(0; x) + \frac{u^2}{2}C_0''(0; x) + \frac{u^3}{6}C_0'''(0; x) + o(u^3). \tag{8}$$

З (4) та (7) маємо додаткову умову балансу для функції регресії:

$$\tilde{\Pi} C'(0, x) = 0. \tag{9}$$

Зауваження. Для дифузійного збурення

$$C_0^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-2c_0} \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^{\varepsilon} C_0(u_n^{\varepsilon}; x_n^{\varepsilon}). \tag{10}$$

ПСО (1) має місце слабка збіжність процесів (див. [1])

$$C_0^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \frac{a\rho q}{t^{\alpha}} w(t),\ \varepsilon \to 0,$$

де $w(t)$ — стандартний вінерівський процес [17, глава X, 4б],

$$\rho^2 = 2\int_X \pi(dx)q(x)C_0(x)R_0 q(x)C_0(x) - q\int_X \rho(dx)C_0^2(x). \qquad (11)$$

Використовуючи (10), для ПСО (1) отримуємо представлення:

$$u^\varepsilon(t) = \tilde{u}^\varepsilon(t) + \varepsilon^{c_0} C_0^\varepsilon(t), \qquad (12)$$

де $\tilde{u}^\varepsilon(t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon)$.

Нормовані флуктуації ПСО (1) розглядаються у вигляді:

$$v^\varepsilon(t) = \frac{t^\gamma}{\varepsilon}\tilde{u}^\varepsilon(t). \qquad (13)$$

Отже,

$$\tilde{u}^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{t^\gamma} v^\varepsilon(t). \qquad (14)$$

З (12) та (14) маємо:

$$u^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{t^\gamma}\left(v^\varepsilon(t) + \varepsilon^{c_0-1} t^\gamma C_0^\varepsilon(t)\right), \qquad (15)$$

звідки для (13) маємо:

$$v^\varepsilon(t) = t^\gamma\left(\frac{u^\varepsilon(t)}{\varepsilon} - \varepsilon^{c_0} C_0^\varepsilon(t)\right). \qquad (16)$$

Для скорочення записів введемо позначення:

$$z = v + \varepsilon^{c_0-1} t^\gamma w. \qquad (17)$$

Розглянемо трьохкомпонентний МП

$$\left(v^\varepsilon(t),\, C_0^\varepsilon(t),\, x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon^{1/\gamma}),\, t \ge 0\right). \qquad (18)$$

Оскільки при асимптотичному аналізі флуктуацій ключовим кроком є асимптотичне представлення генератора МП (18), то побудуємо його та розглянемо основні його властивості.

Лема 1. Генератор МП (18) на тест-функціях $\varphi(v;\cdot;\cdot) \in C^2(P)$ має представлення

$$L_t^\varepsilon \varphi(v;w;x) = \varepsilon^{-1/\gamma} Q\varphi(\cdot;\cdot;x) + \varepsilon^{-1/\gamma} L_0^\varepsilon \varphi(v;w;x), \qquad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_0^\varepsilon \phi(v;w;x) = q(x)\mathrm{P}\Bigg[\varphi\Bigg(& v + \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a\nabla_b C(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x); \\ & w + \varepsilon^{\alpha/\gamma-2c_0} t^{-\alpha} a C_0(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x); y\Bigg) - \varphi(v;w;y)\Bigg] + \varepsilon^{1/\gamma}\frac{\gamma}{t} v\varphi_v'(v;w;x), \end{aligned} \qquad (20)$$

$$\mathrm{P}\varphi(\cdot;\cdot;y) = \int_X P(y,d\rho)\varphi(\cdot;\cdot;\rho).$$

Доведення. Проведемо доведення леми у два етапи.

Етап I. Знайдемо умовне математичне сподівання (покладемо $v^{\varepsilon}(t) = v,\ C_0^{\varepsilon}(t) = w,\ x_t^{\varepsilon} = x,\ \tau^{\varepsilon}(t) = t$):

$$\mathrm{E}\left[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\Delta); C_0^{\varepsilon}(t+\Delta); x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) \mid v,w,x\right] =$$

$$= \mathrm{E}_{v,w,x}\left[\varphi\left(v+\Delta v^{\varepsilon}(t); w+\Delta C_0^{\varepsilon}(t); x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right]\times\left[I(\theta_x > \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}) + I\left(\theta_x \le \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}\right)\right].$$

Оскільки $I\left(\theta_x > \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}\right) = e^{-\frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x)} = 1 - \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x) + O(\Delta^2)$, а $I\left(\theta_x \le \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}\right) = \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x) + O(\Delta^2)$, маємо:

$$\mathrm{E}_{v,w,x}\left[\varphi\left(v+\Delta v^{\varepsilon}(t); w+\Delta C_0^{\varepsilon}(t); x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= \varphi\left(v+\Delta v^{\varepsilon}(t); w+\Delta C_0^{\varepsilon}(t); x\right)\left(1-\frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x)\right)+ \tag{21}$$

$$+\frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x)\mathrm{E}_{v,w,x}\left[\varphi\left(v+\Delta v^{\varepsilon}(t); w+\Delta C_0^{\varepsilon}(t); y\right)\right] + O(\Delta^2),$$

де $x_{t+\Delta}^{\varepsilon} = y$.

Знайдемо приріст $\Delta v^{\varepsilon}(t)$ нормованої ПСО (16) в момент стрибка при $\tau_n^{\varepsilon} = t,\ x_n = x$ та малих $\Delta > 0$, беручи до уваги розклад $(t+\Delta)^{\gamma} = t^{\gamma} + \gamma\Delta t^{\gamma-1} + O(\Delta^2)$ та використовуючи (13):

$$\Delta v^{\varepsilon}(t) = v^{\varepsilon}(t+\Delta) - v^{\varepsilon}(t) =$$

$$= \left(t^{\gamma} + \gamma\Delta t^{\gamma-1}\right)\frac{\tilde{u}^{\varepsilon}(t+\Delta)}{\varepsilon} - v^{\varepsilon}(t) + O(\Delta^2) =$$

$$= \frac{t^{\gamma}}{\varepsilon}\tilde{u}^{\varepsilon}(t) + \gamma\Delta t^{\gamma-1}\frac{\tilde{u}^{\varepsilon}(t)}{\varepsilon} + \left(t^{\gamma} + \gamma\Delta t^{\gamma-1}\right)\frac{\Delta\tilde{u}^{\varepsilon}(t)}{\varepsilon} - v^{\varepsilon}(t) + O(\Delta^2) = \tag{22}$$

$$= \frac{\gamma\Delta}{t}v + \varepsilon^{-1}\left(t^{\gamma} + \gamma\Delta t^{\gamma-1}\right)\Delta\tilde{u}^{\varepsilon}(t) + O(\Delta^2).$$

Враховуючи, що приріст еволюції $\Delta\tilde{u}^{\varepsilon}(t)$ рівний

$$\Delta\tilde{u}^{\varepsilon}(t) = \tilde{u}^{\varepsilon}(t+\Delta) - \tilde{u}^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{\alpha/\gamma}\frac{a}{t^{\gamma}}\nabla_b C\left(u^{\varepsilon}(t); x_t^{\varepsilon}\right),$$

для останнього маємо:

$$\Delta v^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C\left(u^{\varepsilon}(t); x_t^{\varepsilon}\right) +$$

$$+\gamma \frac{\Delta}{t}\left(v + \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C(u^{\varepsilon}(t); x_t^{\varepsilon})\right) + O(\Delta^2).$$

Для першого доданку в (21) при $\Delta \to 0$, $\Delta\tilde{u}^{\varepsilon}(t) \to 0$ і $\Delta C_0^{\varepsilon}(t) \to 0$ (з умови Ліпшиця для $\nabla_b C(u; x)$), тому другим доданком в (22) нехтуємо:

$$E_{v,w,x}\left[\varphi\left(v + \Delta v^{\varepsilon}(t); w + \Delta C_0^{\varepsilon}(t); x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right] = \varphi\left(v + \frac{\gamma\Delta}{t} v^{\varepsilon}(t); w; x\right) +$$

$$+\frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}} q(x)\left[E_{v;w;x}\varphi\left(v + \Delta v^{\varepsilon}(t); w + \Delta C_0^{\varepsilon}(t); y\right) - \varphi\left(v + \frac{\gamma\Delta}{t} v^{\varepsilon}(t); w; x\right)\right] + O(\Delta^2).$$

Для приросту $\Delta C_0^{\varepsilon}(t)$ маємо представлення:

$$\Delta C_0^{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{\alpha/\gamma - 2c_0} \frac{a}{t^{\alpha}} C_0\left(\frac{\varepsilon z}{t^{\gamma}}; x\right).$$

Нарешті з означення генератора МП (18) (див. наприклад, [16, Глава 3, 5]) отримуємо:

$$\begin{aligned} & L_t^{\varepsilon}\varphi(v; w; x) = \\ & = \lim_{\Delta \to 0} \Delta^{-1} E_{v,w,x}\left[\varphi(v + \Delta v^{\varepsilon}(t); w + \Delta C_0^{\varepsilon}(t); x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(v; w; x)\right] = \\ & = \varepsilon^{-1/\gamma} q(x)\left[E_{v;w;x}\varphi\left(v + \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z; x\right); w + \right.\right. \\ & \left.\left. + \varepsilon^{\alpha/\gamma - 2c_0} t^{-\alpha} a C_0\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z; x\right); y\right) - \varphi(v; w; x)\right] + \frac{\gamma}{t} v \varphi_v'(v; w; x), \end{aligned} \tag{23}$$

де z визначено в (17).

<u>*Етап II*</u>. Представлення (19) отримуємо використовуючи доданок $\pm\varphi(v; w; y)$ в квадратних дужках в (23).

Перш, ніж продовжити, розглянемо розклад тест-функції $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{3,4}(P \times P)$ з (20) та оцінимо кожен з її доданків відносно ε при різних значеннях параметрів α, γ, c_0, відкидаючи усі, менші $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} & \varphi\left(v + \Delta_1; w + \Delta_2; x\right) = \varphi + \Delta_2 \varphi_w' + \frac{\Delta_2^2}{2}\varphi_w'' + \frac{\Delta_2^3}{6}\varphi_w''' + \frac{\Delta_2^4}{24}\varphi_w^{(IV)} + \\ & + \Delta_1\Delta_2 \varphi_{vw}'' + \frac{\Delta_1\Delta_2^2}{2}\varphi_{vww}''' + O(\Delta_1\Delta_2^3) + \Delta_1\varphi_v' + \frac{\Delta_1^2}{2}\varphi_v'' + \frac{\Delta_1^3}{6}\varphi_v''' + O(\Delta_2^5), \end{aligned} \tag{24}$$

де $\varphi = \varphi(v; w; x)$; $\Delta_1 = \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z; x\right)$;

$$\Delta_2 = \varepsilon^{\alpha/\gamma - 2c_0} t^{-\alpha} a C_0\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z; x\right). \tag{25}$$

Випадок $\alpha = 1, \gamma = 1/4, c_0 = 1$ ***(класичний).*** Враховуючи, що в (20) перед $\varphi(v; w; x)$ стоїть множник $\varepsilon^{-1/\gamma}$, маємо:

- $\varepsilon^{-1/\gamma}\Delta_1^2 = \varepsilon^{\frac{2\alpha-1}{\gamma}-2} = \varepsilon^2$, тобто доданками з $O(\Delta_1^2)$ можна нехтувати;
- $\varepsilon^{-1/\gamma}\Delta_2^3 = \varepsilon^{\frac{3\alpha-1}{\gamma}-6c_0} = \varepsilon^2$, тобто доданками з $O(\Delta_2^3)$ можна нехтувати;
- $\varepsilon^{-1/\gamma}\Delta_1\Delta_2 = \varepsilon^{\frac{2\alpha-1}{\gamma}-2c_0-1} = \varepsilon$, тобто доданками з $O(\Delta_1\Delta_2)$ можна нехтувати.

Таким чином, для даного випадку функція $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{1,2}(P \times P)$ матиме розклад:

$$\varphi(v + \Delta_1; w + \Delta_2; x) = \varphi + \Delta_1\varphi'_v + \Delta_2\varphi'_w + \frac{\Delta_2^2}{2}\varphi''_w + O(\Delta_1^2\Delta_2^2). \tag{26}$$

Зауваження. Якщо $c_0 < 1$, то: $\varepsilon^{-1/\gamma}\Delta_2^2 = \varepsilon^{4(1-c_0)}$, тому доданками з $O(\Delta_2^2)$ можна нехтувати, а $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{2,2}(P \times P)$ матиме розклад:

$$\varphi(v + \Delta_1; w + \Delta_2; x) = \varphi + \Delta_1\varphi'_v + \Delta_2\varphi'_w + O(\Delta_2^2). \tag{27}$$

Відповідно до розкладу (7) для $\nabla_b C\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z; x\right)$ матимемо розклад:

$$\begin{gathered}\nabla_b C\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z; x\right) = C'(0; x) + \frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z C''(0; x) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}} z^2 + \frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma} b^2}{2t^{2\beta}}\right) C'''(0; x) + O\left(\frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma+1}}{t^{\gamma+2\beta}}\right),\end{gathered} \tag{28}$$

де $b = const$.

Аналогічно до (8) збурення $C_0\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z; x\right)$ можна представити наступним чином:

$$\begin{gathered}C_0\left(\frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z; x\right) = C_0(0; x) + \frac{\varepsilon}{t^{\gamma}} z C_0'(0; x) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2t^{2\gamma}} z^2 C_0''(0; x) + \frac{\varepsilon^3}{6t^{3\gamma}} z^3 C_0''(0; x) + O\left(\frac{\varepsilon^4}{t^{4\gamma}}\right).\end{gathered} \tag{29}$$

Для зручності та скорочення записів покладемо $\varphi = \varphi(v; w; x)$. Перейдемо до формулювання леми.

Лема 2. ($\alpha = 1, \gamma = 1/4, c_0 = 1$) Генератор МП (18) на тест-функціях $\varphi(v; w\cdot) \in C^{1,2}(P \times P)$ має асимптотичне представлення:

$$L_t^\varepsilon \varphi(v; w; x) = \left[\varepsilon^{-4} Q + \frac{\varepsilon^{-2}}{t} q(x) Q_1(x) P + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}} q(x) Q_2(x) P + \right. \\ \left. + \frac{1}{t} q(x) Q_3(x) P + \theta_t^\varepsilon(x) Q_0 \right] \varphi(v; w; x), \tag{30}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v; w; x) = aC_0(0; x)\varphi'_w; \tag{31}$$

$$Q_2(x)\varphi(v; w; x) = a\left(C'(0; x)\varphi'_v + \frac{v + t^{1/4} w}{t^{2/4}} C'_0(0; x)\varphi'_w \right); \tag{32}$$

$$Q_3(x)\varphi(v; w; x) = \\ = a\left[(v + t^{1/4} w) C''(0; x)\varphi'_v + \frac{(v + t^{1/4})^2}{2t^{2/4}} C''_0(0; x)\varphi'_w \right] + \\ + \frac{v}{4}\varphi'_v + \frac{a^2}{2t} C_0^2(0; x)\varphi''_w; \tag{33}$$

$$Q_0 \varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)\varphi(y), \tag{34}$$

а залишковий член $\theta_t^\varepsilon(x) Q_0$ такий, що

$$\Pi \theta_t^\varepsilon(\cdot) Q_0 \varphi(v; w; \cdot) \Pi \to 0, \varepsilon \to 0, t \to \infty.$$

Доведення. Підставивши (28) у (20) та врахувавши розклад (26), отримаємо представлення (30).

Наслідок ($\alpha = 1$, $\gamma = 1/4$, $c_0 = 1/2$). Генератор МП (18) на тест-функціях $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{1,1}(P \times P)$ має асимптотичне представлення:

$$L_t^\varepsilon \varphi(v; w; x) = \left[\varepsilon^{-4} Q + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}} q(x) Q_1(x) P + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{t^{3/4}} q(x) Q_2(x) P + \right. \\ \left. + \frac{1}{t} q(x) Q_3(x) P + \theta_t^\varepsilon(x) Q_0 \right] \varphi(v; w; x), \tag{36}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(v; w; x) = a\left(C'(0; x)\varphi'_v + \frac{1}{t^{1/4}} C_0(0; x)\varphi'_w \right); \tag{37}$$

$$Q_2(x)\varphi(v; w; x) = aw\left(C''(0; x)\varphi'_v + \frac{1}{t^{1/4}} C'_0(0; x)\varphi'_w \right); \tag{38}$$

$$Q_3(x)\varphi(v;w;x)=av\left[(C''(0;x)+\frac{1}{4})\varphi'_v+\frac{1}{t^{1/4}}C'_0(0;x)\varphi'_w\right]; \qquad (39)$$

$$Q_0\varphi(x)=q(x)\int_X P(x,dy)\varphi(y), \qquad (40)$$

а залишковий член $\theta_t^{\varepsilon}(x)Q_0$ такий, що

$$\Pi\,\theta_t^{\varepsilon}(\cdot)Q_0\varphi(v;w;\cdot)\Pi\to 0,\ \varepsilon\to 0,\ t\to\infty.$$

Доведення. З (35) та (27) отримуємо представлення (36).

Проблема сингулярного збурення. Щоб завершити побудову граничного оператора, розв'яжемо проблему сингулярного збурення (ПСЗ). Для цього розглянемо розклад оператора L_t^{ε} з (30) на збурених функціях вигляду

$$\varphi^{\varepsilon}(v;w;x)=\varphi(v;w)+\frac{\varepsilon^2}{t}\varphi_2(v;w;x)+\frac{\varepsilon^3}{t^{3/4}}\varphi_3(v;w;x)+\varepsilon^4\varphi_4(v;w;x). \qquad (41)$$

Як і раніше, для зручності записів покладемо $\varphi=\varphi(v;w)$, $\varphi_i=\varphi_i(v;w;x),\ i=\overline{2,4}$.

Лема 3. Розв'язок ПСЗ для оператора L_t^{ε} (30) на тест-функціях $\varphi(v;w;\cdot)\in C^{1,2}(P\times P)$ має вигляд:

$$L_t^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v;w;x)=\frac{1}{t}L_t\varphi(v)+\theta_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v;w), \qquad (42)$$

де оператор L_t діє за правилом

$$L_t\varphi(v;w)=q\left[(-kv-ad_1t^{1/4}w)\varphi'_v-\frac{(v+t^{1/4}w)^2}{2t^{2/4}}d_2\varphi'_w\right]+\frac{a^2\rho^2}{2t}\varphi''_w, \qquad (43)$$

де $d_1=-q\int_X\rho(dx)C''(0;x)$, $d_2=-q\int_X\rho(dx)C''_0(0;x)$, $k=ad_1-\gamma$, а залишковий член $\theta_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v;w)$ такий, що $\Pi\,\theta_t^{\varepsilon}(\cdot)\varphi(v;w)\Pi\to 0,\ \varepsilon\to 0.$

Доведення. Відомо (див. [2, підрозділ 3.1] або [1]), що залишковий член в представленні (30) не впливає на розв'язок ПСЗ. Тому для отримання (42) достатньо розглянути розв'язок ПСЗ тільки для зрізаного до L_t^{ε} оператора $\mathrm{L}_{t_0}^{\varepsilon}$, тобто:

$$L_{t0}^{\varepsilon}=\varepsilon^{-4}Q+\frac{\varepsilon^{-2}}{t}q(x)Q_1(x)P+\frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}}q(x)Q_2(x)P+\frac{1}{t}q(x)Q_3(x)P.$$

Тоді значення оператора L_{t0}^{ε} на збурених функціях (45) має представлення

$$L_{t0}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v;w;x)=\varepsilon^{-4}Q\varphi+\frac{\varepsilon^{-2}}{t}\left[Q\varphi_2+q(x)Q_1(x)P\varphi\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}}\left[Q\varphi_3+q(x)Q_2(x)P\varphi\right]+ \tag{44}$$
$$+\frac{1}{t}\left[Q\varphi_4+\frac{1}{t}q(x)Q_1(x)P\varphi_2+q(x)Q_3(x)P\varphi\right]+\theta_{t0}^{\varepsilon}(x),$$

де

$$\theta_{t0}^{\varepsilon}(x)=\frac{\varepsilon}{t^2}q(x)\Big[t^{1/4}\left(Q_1(x)P\varphi_3+Q_2(x)P\varphi_2\right)+\varepsilon(Q_1(x)P\varphi_4+Q_3(x)P\varphi_2+$$
$$+t^{2/4}Q_2(x)P\varphi_3)+\varepsilon^2t^{1/4}(Q_2(x)P\varphi_4+Q_3(x)P\varphi_3)+\varepsilon^3Q_3(x)P\varphi_4\Big];$$
$$|\,\theta_{t0}^{\varepsilon}(\cdot)\varphi(v;w;\cdot)|\to 0,\ \varepsilon\to 0.$$

a) з умови розв'язності ПСЗ (44) (див. наприклад, [2, Підрозділ 3.1]) $Q\varphi_2+q(x)Q_1(x)\varphi=0$ та умови балансу (5) знайдемо значення φ_2 :

$$\varphi_2(v;w;x)=R_0q(x)Q_1(x)\varphi(v;w)=aR_0q(x)C_0(0;x)\varphi'_w(v;w). \tag{45}$$

b) аналогічно з умови розв'язності

$$Q\varphi_3+q(x)Q_2(x)\varphi=0$$

та умов балансу (6), (8) маємо:

$$\varphi_3(v;w;x)=R_0q(x)Q_2(x)\varphi(v;w)=$$
$$=aR_0q(x)\left(C'_0(0;x)\varphi'_v(v;w)+\frac{v+t^{1/4}w}{t^{2/4}}C'_0(0;x)\varphi'_w(v;w)\right). \tag{46}$$

c) нарешті, з умови розв'язності (44) маємо:

$$Q\varphi_4+\frac{1}{t}q(x)Q_1(x)P\varphi_2+q(x)Q_3(x)\varphi=L_t\varphi(v;w),$$

де оператор L_t такий, що

$$L_t\Pi\varphi(v;w)=\Pi L_t(x)\Pi\varphi(v;w), \tag{47}$$

а

$$L_t\varphi(v;w)=\frac{1}{t}q(x)Q_1(x)PR_0q(x)Q_1(x)\varphi+q(x)Q_3(x)\varphi. \tag{48}$$

d) обчислимо тепер праву частину (47). Для цього використаємо знайдені представлення (48) та (45):

$$L_t\Pi\varphi(v;w)=$$
$$=\frac{a^2}{t}\Pi q(x)C_0(0;x)PR_0q(x)C_0(0;x)\Pi\varphi''_w(v;w)+$$
$$+\Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v;w).$$

Тоді для першого доданку маємо:

$$\Pi q(x)C_0(0;x)PR_0 q(x)C_0(0;x)\Pi =$$

$$= \int_X \pi(dx)\tilde{C}_0(0;x)R_0\tilde{C}_0(0;x) - q\int_X \rho(dx)C_0^2(0;x), \tag{49}$$

де

$$\tilde{C}_0(0;x) = q(x)C_0(0;x).$$

А для другого отримуємо:

$$\Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v;w) =$$

$$= q\left[a\left(v + t^{1/4}w\right)\int_X \rho(dx)C''(0;x)\varphi'_v + \frac{v}{4}\varphi'_v + \right. \tag{50}$$

$$\left. + a\frac{(v+t^{1/4}w)^2}{2t^{2/4}}\int_X \rho(dx)C''_0(0;x)\varphi'_w\right] + \frac{a^2}{2t}q\int_X \rho(dx)C_0^2(0;x)\varphi''_w.$$

Тепер з (49), (50)

$$L_t\Pi\varphi(v;w) = q\left(\left[v\left(a\int_X \rho(dx)C''(0;x) + \frac{1}{4}\right) + at^{1/4}w\int_X \rho(dx)C''(0;x)\right]\varphi'_v + \right.$$

$$\left. + \frac{(v+t^{1/4}w)^2}{2t^{2/4}}\int_X \rho(dx)C''_0(0;x)\varphi'_w\right) + \frac{a^2\rho^2}{2t}\varphi''_w,$$

де ρ^2 має представлення (11).

Теорема. При виконанні умов збіжності ПСО (1), а також при додаткових умовах:

$A1:\ \rho^2 > 0$;

$A2:\ d_1 > 0, d_2 > 0$;

$A3:\ k > 0$

має місце слабка подвійна збіжність процесів:

$$(v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), \varepsilon \to 0),$$

де $\sigma^2(t) = \dfrac{a^2\rho^2q^2}{t^2}$ в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T < \infty$. Двокомпонентний граничний процес $\left(\zeta(t), \sigma(t)w(t), t > 0\right)$ є гетерогенним в часі дифузійним процесом (43).

Висновки. Досліджено асимптотичну поведінку стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі для одновимірного випадку. Отримані результати аналогічно переносяться на багатовимірний випадок.

Показано, що генератор дифузійного процесу є гетерогенним в часі, а його флуктуації мають залежний від еволюції характер.

Введено додаткові параметри, використовуючи які, можна отримати різну (прогнозовану) поведінку флуктуацій на зростаючих інтервалах часу.

Отримані результати розширюють можливості дослідження флуктуацій еволюційних систем в околі точки екстремуму у випадку залежного від еволюції сингулярного збурення еволюційної системи. У свою чергу, це дає змогу поглибити аналіз флуктуацій процедури стохастичної оптимізації при дослідженні умов оптимізаці стохастичних систем.

Список використаних джерел:

1. Korolyuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Korolyuk, N. Limnios. — World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.
2. Korolyuk V. S. Stochastic Models of Systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk. — London : Kluwer acad. pub., 1999. — 185 p.
3. Chabaniuk Y. Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point / Y. Chabanjuk, V. S. Koroliuk, N. Limnios // C.R. Acad. Sci. Ser. I. Paris. — 2007. — 345. — P. 405–410.
4. Чабанюк Я. М. Асимптотична нормальність стрибкової процедури з дифузійним збуренням в марковському середовищі / Я. М. Чабанюк // Таврійський вісник інформатики та кібернетики. — Сімферополь, 2007. — №1. — С. 40–48.
5. Sacks J. Asymptotic distributions of stochastic approximations / J. Sacks // Ann. Math. Statist. — 1958. — Vol. 2. — P. 373-405.
6. Невельсон М. Б. О сходимости моментов процедуры Роббинса-Монро / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский // Автоматика и телемеханика. — 1972. — №3 — С. 101–125.
7. Хасьминский Р. З. О поведении процессов стохастической аппроксимации для больших значений времени / Р. З. Хасьминский // Проблемы передачи информации. — 1972. — №1. — С. 453–495.
8. Fabian V. On asymptotic normality in stochastic approximation / V. Fabian // Annals of Mathematical Statistic. — 1968. — Vol. 39(4). — P. 1327–1332.
9. Kersting G. D. A weak convergence theorem with application to the Robbins-Monro process / G. D. Kersting // Ann. Prob., 1978. — Vol. 6. — P. 1015–1025.
10. Ljung L. Stochastic Approximation and optimization of random systems / L. Ljung, G. Pflug, H. Walk. — Basel ; Boston ; Berlin : Birkhuser, — 1992. — 114 p.
11. Чабанюк Я. М. Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення / Я. М. Чабанюк // Доп. НАН України. — 2004. — №12. — С. 35–40.
12. Чабанюк Я. М. Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації / Я. М. Чабанюк, П. П. Горун // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : збірник наукових праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2012. — №6. — С. 234–248.

13. Чабанюк Я. М. Асимптотика стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі усереднення / Я. М. Чабанюк, П. П. Горун // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2012. — №2. — С. 251–256.
14. Горун П. П. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / П. П. Горун, Я. М. Чабанюк, В. Р. Кукурба // XVI International Conference «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU-2010, October 4–8, 2010). — К. : Освіта України. — С. 54
15. Korolyuk V. S. Average and diffusion approximation for evolutionary systems in an asymptotic split phase space / V. S. Korolyuk, N. Limnios // Annals Appl. Probab. — 2004. — 14(1). — P. 489–516.
16. Невельсон М. Б. Стохастическая апроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение : в 2-х т. / В. Феллер. — М. : Мир, 1967. — Т. 2. — 751 с.

In case depending on the environment singularly perturbed regression function the asymptotic behavior of stochastic optimization procedure in diffusion approximation scheme in Markov medium was investigated. It was shown that the generator of the diffusion process is heterogeneous in time and its fluctuations depends on the evolution.

Key words: *jumping markov process, stochastic optimization, asymptotic behavior, diffusion approximation.*

Отримано: 31.03.2014

УДК 517.929

А. Б. Дорош, асистент,
І. М. Черевко, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджуються крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь із змінним запізненням. Запропоновано та обґрунтовано схему наближеного розв'язання крайової задачі за допомогою кубічних сплайнів дефекту два.

Ключові слова: *крайова задача, запізнення, сплайн-функції, ітераційний процес.*

Вступ. Диференціальні рівняння із запізненням виникають у багатьох областях математичного моделювання. Врахування запізнення дозволяє описати багато нових ефектів і явищ у біології, екології, імунології та інших науках. У зв'язку з відсутністю ефективних алго-

