

УДК 519.632:621.3.011.222

А. Я. Бомба, д-р техн. наук, професор,

Л. Л. Крока, аспірант

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА УМОВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ

На основі числових методів комплексного аналізу запропоновано підхід до розв'язання двовимірних обернених модельних задач для нелінійних (квазілінійних) еліптичних диференціальних рівнянь в областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, за умов ідентифікації коефіцієнта, що характеризує провідність середовища. Відповідний алгоритм побудовано для випадку, коли шуканий коефіцієнт в області комплексного потенціалу допускає розділення змінних.

Ключові слова: *обернені коефіцієнтні задачі, ідентифікація, стаціонарні процеси, еліптичні диференціальні рівняння, квазіконформні відображення.*

Вступ. Задачі ідентифікації виникають на етапі адаптації математичної моделі об'єкту, що вивчається, за відомими даними або у випадку діагностики стану цього об'єкту на основі спостережень за динамікою зміни значень його основних параметрів [1–3]. Помічено, що найкращі результати щодо ідентифікації параметрів нелінійних математичних моделей дають ітераційні підходи, які ґрунтуються на почерговому розв'язанні задач аналізу (прямої) та синтезу (оберненої) [4]. Зважаючи на особливості реалізації алгоритмів чисельного розв'язання крайових задач на квазіконформні відображення областей різної геометричної конфігурації, обмежених лініями течії та еквікватипотенціальними лініями [5–7], перспективними є застосування відповідних числових методів комплексного аналізу до розв'язання обернених коефіцієнтних задач. Тут і далі термін «обернена задача» по контексту розумітиметься в одному із двох значень — або як обернена коефіцієнтна задача, яка полягає в ідентифікації параметрів математичних моделей, або як обернена задача на квазіконформне відображення, суть якої у побудові квазіконформного відображення взаємо оберненого з даним.

У цій роботі ідеї числових методів комплексного аналізу [5–6] поширено на випадок ідентифікації коефіцієнтів у крайових задачах при вивченні стаціонарних процесів (наприклад, ідентифікація коефіцієнта фільтрації гідрогеологічної моделі чи коефіцієнта електричної провідності на основі експериментальних даних електротомографії тощо). Розроблено алгоритм ідентифікації у випадку, коли шуканий коефіцієнт в області комплексного потенціалу допускає розділення змінних.

Постановка задачі. Розглядається крайова задача, що описується еліптичним диференціальним рівнянням дивергентного типу другого порядку (математична модель процесів, що підпорядковуються законам Ома чи Дарсі):

$$\operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0, (x, y) \in G_z; \quad (1)$$

$$\varphi(M) = \varphi_*, \int_{AM} \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \tilde{\psi}(M), M \in AB; \quad \varphi(T) = \varphi^*, T \in CD; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} = 0, \quad \varphi(P) = \tilde{\varphi}(P), P \in AD; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi(N)}{\partial n} = 0, N \in BC; \quad \int_{AB} -v_y dx + v_x dy = Q, \quad (4)$$

де G_z — однозв'язна криволінійна область, обмежена кусково-гладкою замкненою кривою $\partial G_z = \{(x, y) : x = \hat{x}(\tau), y = \hat{y}(\tau), \tau \in [\tau_*; \tau^*]\} = AB \cup BC \cup CD \cup DA$ (див. рис. 1, а)-в), $\hat{x}(\tau)$, $\hat{y}(\tau)$ — визначені оборотні функції, точки A, B, C, D визначаються відповідно параметрами $\tau_A, \tau_B, \tau_C, \tau_D, \tau_* = \tau_A \leq \tau_D \leq \tau_C \leq \tau_B \leq \tau^* = \tau_A = \tau^*$, $\hat{x}(\tau_A) = \hat{x}(\tau_A^*)$, $\hat{y}(\tau_A) = \hat{y}(\tau_A^*)$; κ — коефіцієнт (характеризує провідність середовища), значення якого необхідно ідентифікувати в процесі розв'язання задачі (1)–(4); $\varphi = \varphi(x, y)$ — функція квазіпотенціалу швидкості $\vec{v} = (v_x, v_y) = \kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi$ (стаціонарного векторного поля в G_z); \vec{n} — одиничний вектор біжучої нормалі до відповідної кривої; Q — потік векторного поля; M, P, T, N — біжучі точки відповідних ділянок ∂G_z ; $\tilde{\varphi}(P) = \tilde{\varphi}(x, y)$, $\tilde{\psi}(M) = \tilde{\psi}(x, y)$ — деякі неперервні монотонні функції

$$(\varphi_* \leq \tilde{\varphi}(x, y) \leq \varphi^*, \quad \tilde{\varphi}(\hat{x}(\tau_A), \hat{y}(\tau_A)) = \varphi_*, \quad \tilde{\varphi}(\hat{x}(\tau_D), \hat{y}(\tau_D)) = \varphi^*);$$

$$0 \leq \tilde{\psi}(x, y) \leq Q, \quad \tilde{\psi}(\hat{x}(\tau_A), \hat{y}(\tau_A)) = 0, \quad \tilde{\psi}(\hat{x}(\tau_B), \hat{y}(\tau_B)) = Q).$$

Зауважимо, що розв'язання задачі ідентифікації є досить складною проблемою і передбачає використання, окрім умов (2)–(4), додаткової інформації про невідомі функції φ , κ . Так у випадку довільної залежності κ від своїх аргументів, враховуючи необхідність забезпечення коректності постановки крайової задачі для еліптичних рівнянь, необхідно використовувати певного роду сукупність крайових задач (1)–(4) (всеможливі положення точок A, B, C, D на ∂G_z та відповідно задання низки умов типу (2)–(4)). У цій роботі передбачається, що шуканий коефіцієнт в області комплексного потенціалу допус-

кає розділення змінних — $\kappa = \kappa(\varphi, \psi) = \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)$, $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$
 ((φ, ψ) — координати області комплексного потенціалу;
 $\psi = \psi(x, y)$ — функція течії, комплексно спряжена до φ ,

$$\psi(T) = \int_{MT} \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl, \quad M \in AD, \quad T \in G_z.$$

Метод комплексного аналізу. Враховуючи переваги застосування квазіконформних відображень до розв'язання крайових задач математичної фізики (зокрема, спрощення процедур побудови сіткової області — рівномірного розбиття фізичної області лініями рівня та лініями течії), перейдемо від (1)–(4) до наступної більш загальної задачі на квазіконформне відображення області G_z на G_ω (за умови ідентифікації коефіцієнта $\kappa = \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)$) згідно описаних в [5–6] алгоритмів:

$$\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\varphi(P) = \varphi_*, \quad \psi(P) = \tilde{\psi}(P), \quad P \in AB;$$

$$\psi(M) = 0, \quad \varphi(M) = \tilde{\varphi}(M), \quad M \in AD;$$

$$\varphi|_{CD} = \varphi^*; \quad \psi|_{BC} = Q. \quad (7)$$

Тут $G_\omega = \{(\varphi, \psi) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q\}$.

Зважаючи на особливості алгоритмів розв'язування таких крайових задач [5–7], скористаємось ідеєю переходу від задачі (6)–(7) до оберненої крайової задачі на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , яка в свою чергу зводиться до відшукування функцій $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, $\kappa(\varphi, \psi) = \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)$, котрі задовольняють умовам [6]:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi) \cdot \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \right. \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi) \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \forall (\varphi, \psi) \in G_\omega;$$

$$x(\varphi_*, \psi) = \hat{x} \left(\tilde{\psi}^{-1}(\psi) \right), \quad y(\varphi_*, \psi) = \hat{y} \left(\tilde{\psi}^{-1}(\psi) \right), \quad 0 \leq \psi \leq Q; \quad (9)$$

$$x(\varphi, 0) = \hat{x} \left(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi) \right), \quad y(\varphi, 0) = \hat{y} \left(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi) \right), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*;$$

$$\begin{cases} x(\varphi^*, \psi) = \hat{x}(\tau), \quad y(\varphi^*, \psi) = \hat{y}(\tau), \quad \tau \in [\tau_D; \tau_C]; \\ x(\varphi, Q) = \hat{x}(\tau), \quad y(\varphi, Q) = \hat{y}(\tau), \quad \tau \in [\tau_C; \tau_B]; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \hat{x}'(\tau) \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \hat{y}'(\tau) \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, & \tau \in [\tau_A; \tau_B] \cup [\tau_C; \tau_D], \\ \hat{x}'(\tau) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \hat{y}'(\tau) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0, & \tau \in [\tau_B; \tau_C] \cup [\tau_D; \tau_A^*]. \end{cases} \quad (11)$$

Тут $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi)$, $\tilde{\psi}^{-1}(\psi)$ — неперервні функції, обернені відповідно до $\varphi = \tilde{\varphi}(\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau)) = \tilde{\varphi}(\tau)$, $\tau \in [\tau_A; \tau_D]$, $\psi = \tilde{\psi}(\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau)) = \tilde{\psi}(\tau)$, $\tau \in [\tau_B; \tau_A^*]$.

Різнлицеві аналоги рівнянь (8) (виконання яких вимагаємо лише у внутрішності області G_ω) та умов (9)–(11) у відповідній G_ω сіткової області $G_\omega^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n+1}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, \quad m, n \in \mathbb{N} \right\}$ запишемо (у випадку неперервної залежності шуканого коефіцієнта $\kappa(\varphi, \psi)$ від своїх аргументів) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2) x_{i,j} + \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\gamma \kappa_{i,j} \kappa_{\psi' i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) - \frac{\kappa_{\varphi' i,j}}{\kappa_{i,j}} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2 (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) \right) = 0, & y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - \\ - 2(1 + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2) y_{i,j} + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2 (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) + \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\gamma \kappa_{i,j} \kappa_{\psi' i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \frac{\kappa_{\varphi' i,j}}{\kappa_{i,j}} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right) = 0, & i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x_{0,j} = \hat{x}(\tilde{\varphi}^{-1}(\psi_j)), & y_{0,j} = \hat{y}(\tilde{\psi}^{-1}(\psi_j)), \\ x_{i,0} = \hat{x}(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi_i)), & y_{i,0} = \hat{y}(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi_i)); \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \hat{x}'(\tau_{(CD)_j}) (y_{m,j} - \hat{y}(\tau_{(CD)_j})) - \hat{y}'(\tau_{(CD)_j}) (x_{m,j} - \hat{x}(\tau_{(CD)_j})) = 0, \\ \hat{x}'(\tau_{(BC)_i}) (y_{i,n} - \hat{y}(\tau_{(BC)_i})) - \hat{y}'(\tau_{(BC)_i}) (x_{i,n} - \hat{x}(\tau_{(BC)_i})) = 0, \\ x_{m+1,j} = \hat{x}(\tau_{(CD)_j}), \quad y_{m+1,j} = \hat{y}(\tau_{(CD)_j}), \quad \tau_{(CD)_j} \in [\tau_D; \tau_C], \\ x_{i,n+1} = \hat{x}(\tau_{(BC)_i}), \quad y_{i,n+1} = \hat{y}(\tau_{(BC)_i}), \quad \tau_{(BC)_i} \in [\tau_C; \tau_B], \end{cases} \quad (14)$$

де γ — квазіконформний інваріант; $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$,

$$j = \overline{0, n+1}, i = \overline{0, m+1}; \kappa_{i,j\pm 1/2} = \kappa_1 \left(\frac{\varphi_{i,j\pm 1} + \varphi_{i,j}}{2} \right) \cdot \kappa_2 \left(\frac{\psi_{i,j\pm 1} + \psi_{i,j}}{2} \right),$$

$$\kappa_{i\pm 1/2,j} = \kappa_1 \left(\frac{\kappa_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j}}{2} \right) \cdot \kappa_2 \left(\frac{\psi_{i\pm 1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right).$$

Формулу для уточнення значень коефіцієнта κ одержимо на підставі «квазіконформної подібності в малому» відповідних прямокутників двох областей G_z , G_ω , згідно якої:

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \quad (15)$$

де

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

З аналізу накладених умов на шуканий коефіцієнт κ помітимо можливість його представлення у внутрішності G через відповідні значення вздовж приграничних ділянок. Різницевий аналог такої залежності згідно обраних позначень запишемо у вигляді:

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\kappa_{i+\frac{1}{2},0} \cdot \kappa_{0,j+\frac{1}{2}}}{\kappa_{0,0}}. \quad (16)$$

Зауважимо, що за відсутності інформації про неперервну залежність шуканого коефіцієнта $\kappa(\varphi, \psi)$ від аргументів, використання різницевих рівнянь (12) не є коректним, в такому випадку для побудови різницевого аналогу умов (8) доцільно скористатися інтегроінтерполяційним методом, згідно якого:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^2 (\kappa_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \kappa_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\kappa_{i+1/2,j}} - \\ - \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{\kappa_{i-1/2,j}} = 0, \quad \gamma^2 (\kappa_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{i,j-1/2} \times \\ \times (y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\kappa_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\kappa_{i-1/2,j}} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Алгоритм розв'язання різницевої задачі (12)–(16) (чи задачі (13)–(17)) побудуємо з використанням ідей блочної ітерації та почергової параметризації шуканих величин та функції аналогічно алгори-

тмам розв'язування нелінійних обернених крайових задач теорії фільтрації на квазіконформні відображення, запропонованим в [5–7], з такими відмінностями:

- на початковому етапі згідно умови (13) для ділянок AB, AD знаходимо координати граничних вузлів, які на наступних ітераціях уточнюються уже не будуть; початкове наближення граничних вузлів для ділянок BC, CD знайдемо, наприклад, зі співвідношень

$$(14) \text{ та } \tau_{(CD)_j} = j \cdot \frac{\tau_C - \tau_D}{n+1}, \quad \tau_{(BC)_i} = i \cdot \frac{\tau_B - \tau_C}{m+1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m};$$

- значення потоку Q задається, а значення квазіконформного інваріанту γ однозначно визначається з вхідних умов і не змінюються в процесі розв'язання задачі;
- на основі чергового ітераційного уточнення коефіцієнта $\kappa_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$, $\kappa_{i+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, m}$, вздовж примезових ділянок AB, AD згідно формули (15) обчислюватимемо відповідні наближення значень $\kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, у внутрішніх точках області G_z згідно формули (16).

Для зупинки ітераційного процесу згідно [6–7] можуть бути використані такі умови:

$$S^{(k)} \leq \varepsilon, \quad \delta \leq \delta_*,$$

$$\text{де } S^{(k)} = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}, \quad \delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2},$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1, m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l^p (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \quad l = \overline{1, 4}, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1, m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \gamma_l^p (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, \quad p = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Як і в [5–7], **обґрунтування** побудованого алгоритму, що базується на почерговому «замороженні» шуканих коефіцієнта, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області, проводиться з використанням ідей методу блочної ітерації (див., напр., [8]) з виділенням зон порушення умов ортогональності розрахованої динамічної сітки (у випадку, коли криві AB, BC, CD, DA границі області не є ортогональними в точках перетину).

Запропонований підхід до розв'язання задачі ідентифікації для еліптичних диференціальних рівнянь дивергентного типу другого порядку апробовано на серії тестових числових експериментів (математичних моделях процесів фільтрації в пористих середовищах [5–

7)), шляхом розв'язування двох задач: задачі на побудову гідродинамічної сітки для відомого розподілу коефіцієнта провідності $\kappa(\varphi, \psi)$ (згідно алгоритмів, запропонованих у роботах [5]) та задачі ідентифікації (на основі розробленого алгоритму) з використанням в якості вхідних даних для задачі (1)–(4) функцій та величин, отриманих в результаті розв'язання попередньої задачі.

Реконструйовані гідродинамічні сітки за результатами числових розрахунків, проведених за умов ідентифікації коефіцієнта κ , представлено на рис. 1 (рис. 1 а)–в) — власне гідродинамічні сітки фізичних областей, рис. 1 г) — відповідна область комплексного квазіпотенціалу

для $\varphi_* = 2$ $\varphi^* = 5$, $m = 50$, $n = 50$, $\kappa(\varphi, \psi) = \left(0.5 + \frac{\varphi - 2}{40}\right) \left(1 + \frac{\psi}{40}\right)$ (для прямої задачі).

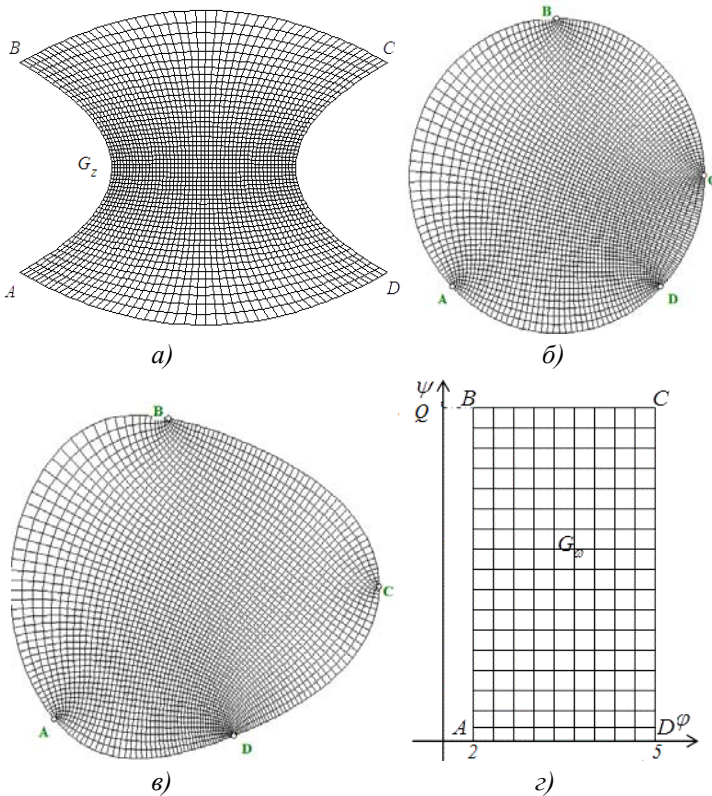


Рис. 1. Реконструйовані гідродинамічні сітки для різних фізичних областей а)–в) та відповідна їм область квазікомплексного потенціалу г)

При цьому границі фізичних областей G_z та значення параметрів τ для фіксації точок $A, B, C, D \in \partial G_z$ задавалися відповідно рис. 1 а)–в) у вигляді:

$$а) \partial G_z = \{(x, y) : \frac{y^2}{4} + x - 2 = 0, \frac{(x-3)^2}{4} + y - 3 = 0, \frac{y^2}{4} - x + 4 = 0, \frac{(x-3)^2}{4} - y - 3 = 0\}, A(1, -2), B(1, 2), C(5, 2), D(5, -2);$$

$$б) \partial G_z = \{(x, y) : x = x(\tau) = 4 \cos \tau, y = y(\tau) = 4 \sin \tau, \tau \in [0, 2\pi], \tau_A = \frac{5\pi}{4}, \tau_B = \frac{\pi}{2}, \tau_C = 0, \tau_D = \frac{7\pi}{4}\};$$

$$в) \partial G_z = \{(x, y) : y = y(\tau) = 24 \sin \tau - \frac{16.8}{(0.49 \cos^2 \tau + 0.36 \sin^2 \tau)^2},$$

$$x = x(\tau) = 28 \cos \tau + \frac{20(0.49 \cos^2 \tau - 0.36 \sin^2 \tau)}{(0.49 \cos^2 \tau + 0.36 \sin^2 \tau)^2},$$

$$\tau \in [0, 2\pi], \tau_A = \frac{5\pi}{4}, \tau_B = \frac{\pi}{2}, \tau_C = 0, \tau_D = \frac{8\pi}{5}.$$

Проведені числові розрахунки (рис.2) показують, що значення відносної похибки ідентифікованого коефіцієнта $\kappa(\varphi, \psi) = \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)$ очікувано досягає максимуму ($\approx 10\%$) в околах кутових точок A, B, C, D , де суттєво порушується і точність побудови гідродинамічних сіток.

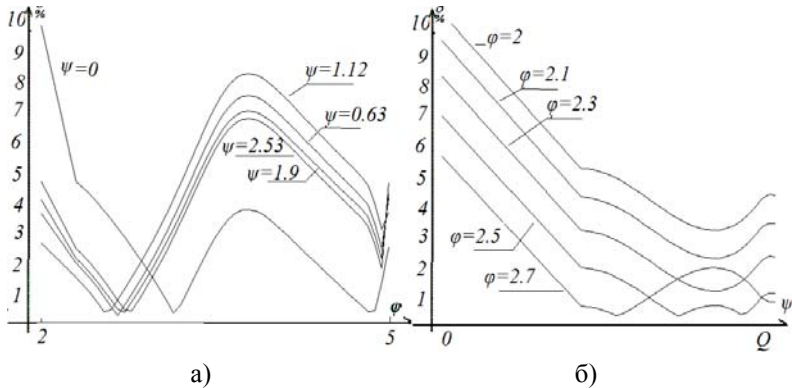


Рис. 2. Розподіл відносної похибки ідентифікованого коефіцієнта провідності вздовж ліній течії а) та еквіпотенціальних ліній б)

Висновки. Проведені дослідження підтверджують можливість і доцільність використання числових методів комплексного аналізу (квазіконформних відображень) до розв'язання двовимірних обернених модельних задач для нелінійних (квазілінійних) еліптичних диференціальних рівнянь в областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями, за умов ідентифікації коефіцієнта, що характеризує провідність середовища (наприклад, коефіцієнтів фільтрації в гідрогеологічних моделях чи електричної провідності в модельних задачах електротомографії тощо), з цілком прийнятним для використання на практиці рівнем точності. Запропонований підхід забезпечує одночасний розрахунок сіток комплексно спряжених функцій, що є доцільним при числовому розв'язанні крайових задач математичної фізики. Безумовно, що відповідний алгоритм, який реалізовано у випадку, коли шуканий коефіцієнт в області комплексного потенціалу допускає розділення змінних, може бути покладений в основу більш загального програмного комплексу для дослідження середовищ з довільною залежністю провідності як від координат області комплексного потенціалу, так і від координат фізичної області. У перспективі також проведення регуляризації знайдених розв'язків з метою мінімізації впливу похибок у вхідних даних.

Список використаних джерел:

1. Yeh W. W-G. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology / W. W-G. Yeh // *The inverse problem. Water Resources Research.* — 1986. — № 22(2). — P. 95–108.
2. Vainikko E. Some numerical schemes for the identification of the filtration coefficient / E. Vainikko, G. Vainikko // *Acta et comment. univ. Tartuensis* 937. — 1992. — P. 90–102.
3. Yavorsky B. Y. Structural identification of mathematical model of images reconstruction by electrical impedance tomography / B. Y. Yavorsky, Y. B. Promyuch, G. M. Shadrina // *Proceeding sof the IV International conference «Electronics and applied physics».* 23-25 October, Kyiv, Ukraine. — 2008. — P. 85–86.
4. Сушко И. А. Сравнение классического метода решения обратной задачи импедансной томографии с методом «зон» проводимости / И. А. Сушко, А. И. Рыбин // *Вісник Національного технічного університету України «КПІ» Серія. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.* — 2012. — № 49. — С. 166–177.
5. Методи комплексного аналізу : монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. — Рівне : НУВГП, 2013 — 415 с.
6. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. — К. : Наук. думка, 2007. — 308 с.
7. Бомба А. Я. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів напору на процес фільтрації / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 2002. — Т. 45, № 2. — С. 49–57.

8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.

We propose an approach to solving of two-dimensional inverse modeling problem of identifying the coefficient (the conductivities of a medium) in the nonlinear (quasilinear) elliptic differential equation in the domain between lines of flow and equipotential lines by using numerical methods the analysis of complex. The corresponding algorithm is constructed for the case where the coefficient allows separation of variables in the field of complex potential.

Key words: *inverse problem of identifying, stationary processes, elliptic differential equation, quasiconformal mappings.*

Отримано: 10.02.2014

УДК 532.543

П. С. Венгерський, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СУМІСНОГО СТОКУ ПОВЕРХНЕВИХ І ГРУНТОВИХ ВОД З ТЕРИТОРІЇ ВОДОЗБОРУ

Для опису поверхневих потоків записано початково-крайову задачу стоку мілкої води. З урахуванням гідравлічного потоку для опису ґрунтових потоків використовується рівняння Бусинеску. З урахуванням суцільного однорідного середовища водяного потоку сформулюємо початково-крайову задачу спільного руху рідини по поверхні водозбору. Побудовані моделі апробовано на тестових прикладах, досліджується збіжність і стійкість задачі з урахуванням дії природних факторів. Розроблені програми обчислювалися за допомогою програмного пакету COMSOL.

Ключові слова: *рухомий шар рідини, мілка вода, поверхневі потоки, ґрунтова вода, н'єзометричний напір, сумісний потік, варіаційна задача, білінійні форми, метод скінченних елементів, дискретизація задачі, лінеаризація задачі, умови спряження.*

Сформулюємо задачу для опису руху схилових потоків по поверхні водозбору з урахуванням крайових та початкових умов[1–3].

1. Система рівнянь руху поверхневих потоків. Виділимо в суцільному середовищі (рідині) рухомий шар $S(t) \in R^3$ (рис. 1)