УДК 515.168.3

Д. В. Болотов

О вложениях S^2 в E^4

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Доказано, что для любой гладко вложенной сферы S^2 в евклидово пространство E^4 всегда найдется точка такая, что любая двумерная плоскость, проходящая через эту точку, пересекает сферу S^2.

Целью данной работы является доказательство следующего результата.

Теорема 1. *Пусть $S^2 \subset E^4$ — двумерная сфера, C^2 — гладко вложенная в евклидово четырехмерное пространство. Тогда найдется такая точка $x \in E^4$, что любая двумерная плоскость, проходящая через x, пересекает S^2.*

Доказательство. Сфера S^2 лежит в некотором шаре B^4, граница которого S^3 касается сферы S^2. Пусть $p \in S^3 \bigcap S^2$. Введем в E^4 евклидовы координаты $\{x^i,\ i = 1, \ldots, 4\}$ так, что точка p является началом координат, а координатный репер $\{e^i,\ i = 1, \ldots, 4\}$ обладает тем свойством, что $\{e^1, e^2\}$ определяет базис касательной плоскости сферы S^2 в точке p, а e^3 ортогонален касательной плоскости к S^3 в точке p. Тогда в некоторой окрестности U_p точки p сфера S^2 задается системой

$$\begin{cases} x^3 = f(x^1, x^2), \\ x^4 = g(x_1, x_2), \end{cases}$$

где f — выпуклая функция. Это означает, что множество $\gamma_\varepsilon \colon f = \varepsilon$ определяет выпуклую кривую в трехмерной плоскости $\Pi \colon x^4 = 0$. Пусть Π_ε — трехмерная плоскость $x^3 = \varepsilon$. Если ε достаточно мало, то кривая $\gamma = S^2 \bigcap \Pi_\varepsilon$ на сфере S^2 принадлежит U_p и однозначно проектируется в γ_ε при ортогональной проекции $E^4 \to \Pi$. Кроме того, γ лежит на цилиндре $f = \varepsilon$, который ограничивает выпуклое множество в Π_ε. Отсюда следует, что γ лежит на границе своей выпуклой оболочки $L_\gamma \subset \Pi_\varepsilon$.

Теперь будем рассуждать от противного. Предположим, что через всякую точку $x \in E^4 \setminus S^2$ проходит двумерная плоскость π_x такая, что

$$\pi_x \bigcap S^2 = \varnothing. \qquad (*)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что γ — плоская кривая, лежащая в некоторой двумерной плоскости $\alpha \subset \Pi_\varepsilon$. Тогда L_γ гомеоморфно двумерному диску и для всякой точки $x \in \operatorname{int} L_\gamma$ пересечение $\pi_x \bigcap \Pi_\varepsilon$ есть прямая l_x, которая пересекает диск L_γ в одной точке x, где π_x удовлетворяет $(*)$. В противном случае $\pi_x \bigcap \Pi_\varepsilon$ пересекает γ, что невозможно по предположению. Это означает, что γ представляет нетривиальный элемент фундаментальной группы $\pi_1(E^4 \setminus \pi_x)$, так как косая проекция $p \colon E^4 \to \alpha$, параллельная π_x, оставляет неподвижными точки α, и является деформационной ретракцией $E^4 \setminus \pi_x$ на $\alpha \setminus x$, а значит, индуцирует

© Д. В. Болотов, 2013

изоморфизм фундаментальных групп. Однако ясно, что γ является представителем образующей группы $\pi_1(\alpha \setminus x) = \mathbb{Z}$. С другой стороны, γ стягивается по сфере $S^2 \subset \pi_1(E^4 \setminus \pi_x)$ в точку, так как сфера односвязна. Получаем противоречие.

Случай 2. Предположим, что γ — пространственная кривая, лежащая в трехмерной плоскости Π_ε. Тогда L_γ гомеоморфно трехмерному шару B и для всякой точки $x \in \operatorname{int} L_\gamma$ пересечение $\pi_x \bigcap \Pi_\varepsilon$ есть прямая l_x, которая пересекает граничную сферу $S := \partial L_\gamma$ в двух точках. Заметим, что $\pi_x \bigcap \Pi_\varepsilon$ не может быть плоскостью, так как всякая плоскость, проходящая через x должна пересекать γ. Кривая γ разделяет сферу S на два диска D_1, D_2. Допустим $\#(l_x \bigcap D_i) = 1$. Диск D_1 вместе с одним из дисков, на которые γ разбивает сферу S^2, образуют многообразие S', также гомеоморфное сфере. Мы можем считать, что l_x пересекает D_1 в гладкой точке y, если надо немного пошевелив π_x. Напомним, что гладкой точкой границы выпуклого множества называется точка границы, в которой имеется единственная опорная плоскость. Заметим, что почти все точки границы выпуклого множества гладкие [1]. Заменим S' гладким многообразием S'', аппроксимируя S' вне некоторого конуса с центром в y и осью l_x. Тогда S'' пересекает π_x трансверсально в единственной точке y. Теперь рассмотрим одноточечную компактификацию E^4, гомеоморфную S^4. При этом плоскость π_x компактифицируется в сферу $S''' \subset S^4$. По построению S'' и S''' пересекаются трансверсально в единственной точке. Напомним, что класс Тома ориентируемого p-мерного векторного расслоения E над гладким многообразием R — это когомологический класс $\Phi(E) \in H^p_{DR}(E)$, ограничение которого на каждый слой F есть образующая старших когомологий с компактными носителями $H^p_c(F)$ слоя F [2, § 6, с. 76]. Как известно, класс Тома $\Phi(NR) \in H^p_{DR}(M)$ нормального расслоения NR к замкнутому ориентируемому подмногообразию R коразмерности p ориентируемого многообразия M является двойственным по Пуанкаре к R [2, § 6, с. 76]. Заметим, что NR естественно отождествляется с трубчатой окрестностью R [2, § 6, с. 77]. А если подмногообразия R и S пересекаются трансверсально в том смысле, что для любой точки пересечения $x \in R \bigcap S$ имеем $T_xR + T_xS = T_xM$, то $\Phi(N_{R\cap S}) = \Phi(N_R \oplus N_S) = \Phi(N_R) \wedge \Phi(N_S)$ [2, § 6, с. 80]. В нашем случае имеем $0 \neq \Phi(N_{S''\cap S'''}) = \Phi(N_{S''}) \wedge \Phi(N_{S'''})$, так как двойственный по Пуанкаре класс к точке в ориентируемом многообразии не нулевой и, более того, является образующей в старших когомологиях $H^n_c(M)$ (см. [2, § 6]). Однако классы $\Phi(N_{S''})$ и $\Phi(N_{S'''})$ нулевые, так как они принадлежат тривиальной группе $H^2_{DR}(S^4)$. Мы получаем противоречие, а значит, предположение, что $\#(l_x \bigcap D_i) = 1$, неверно. Поэтому либо $\#(l_x \bigcap D_i) = 0$, либо $\#(l_x \bigcap D_i) = 2$.

Пусть $x \in D_1$, $y \in D_2$ — гладкие точки границы S выпуклого тела L_γ, а π_x и π_y — плоскости, удовлетворяющие $(*)$. Так как x и y принадлежат L_γ, пересечения $\Pi_\varepsilon \bigcap \pi_x$ и $\Pi_\varepsilon \bigcap \pi_y$ должны быть прямыми, которые мы обозначим l_x и l_y соответственно. Если l_x и l_y оказались лежащими в опорных плоскостях T_x и T_y для L_γ, то, сколь угодно мало пошевелив π_x и π_y, найдем плоскости π'_x и π'_y, по-прежнему удовлетворяющие $(*)$ и пересекающие Π_ε по прямым l'_x и l'_y так, что $l'_x \bigcap T_x = x$ и $l'_y \bigcap T_y = y$. Так как T_x и T_y являются касательными конусами в x и y соответственно, то l'_x и l'_y имеют непустое пересечение с $\operatorname{int} L_\gamma$. Пусть I — отрезок, соединяющий точки $x_1 \in l'_x \bigcap \operatorname{int} L_\gamma$ и $x_2 \in l'_y \bigcap \operatorname{int} L_\gamma$. Представим I в виде дизъюнктного объединения $I = C_1 \bigcup C_2$, где C_i определяются следующим образом: $x \in C_i$, если существует плоскость π_x, удовлетворяющая $(*)$, такая, что $l_x \bigcap S \subset D_i$. Так как по построению $C_i \neq \varnothing$ и, кроме того, C_i являются открытыми множествами, а отрезок I связен, то существует точка $x \in C_1 \bigcap C_2$. Пусть π_1, π_2 — плоскости, удовлетворяющие $(*)$, такие, что $\pi_1 \bigcap \pi_2 = x$ и пересекающие Π_ε по прямым l_1, l_2 соответственно, таким, что $l_i \bigcap S \subset D_i$.

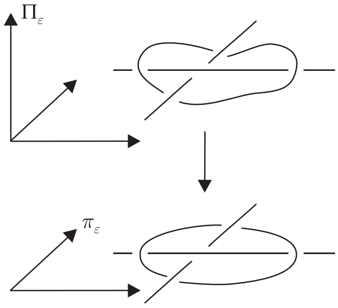

Рис. 1

Определим плоскость $\pi_\varepsilon := \Pi_\varepsilon \bigcap \Pi$

$$\begin{cases} x^3 = \varepsilon, \\ x^4 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что плоскость π_{12}, натянутая на l_1, l_2, пересекает γ минимум в четырех точках. А так как кривая γ однозначно проектируется в выпуклую кривую γ_ε относительно ортогональной проекции $r\colon \Pi_\varepsilon \to \pi_\varepsilon$, образ $r(\pi_{12})$ не может вырождаться в прямую, поскольку прямая пересекает выпуклую кривую максимум в двух точках. Пусть $\overline{n}$ — нормаль к π_ε, $\overline{x}$ — радиус-вектор точки x, а $\overline{v}_1$ — направляющий вектор прямой l_1. Рассмотрим семейство плоскостей π_1^t, проходящих через некоторую точку $x_1 \in \pi_1 \setminus l_1$ с радиусом-вектором $\overline{x}_1$ параллельно векторам $\overline{x} + t\overline{n} - \overline{x}_1$ и $\overline{v}_1$. При $t = 0$ мы имеем исходную плоскость π_1, а при малых t мы добьемся того, что π_1^t и π_2 по-прежнему удовлетворяют $(*)$, находятся в общем положении, а $\pi_1^t \bigcap \Pi_\varepsilon$ и $\pi_2 \bigcap \Pi_\varepsilon$ есть непересекающиеся прямые $l_1^t \subset \Pi_\varepsilon$ и $l_2 \subset \Pi_\varepsilon$ такие, что $\#(l_1^t \bigcap D_1) = \#(l_2 \bigcap D_2) = 2$. В зависимости от знака t одна из прямых l_1 или l_2 проходит выше относительно проекции на плоскость π_ε. Предположим, при $t > 0$ реализуется случай, показанный на рис. 1.

Заметим, что пространство $\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \bigcup l_2)$ гомотопически эквивалентно евклидовой плоскости без двух точек. Чтобы построить соответствующую гомотопию, мы сначала должны гомеоморфно отобразить Π_ε в себя так, чтобы прямые стали параллельны, а затем продеформировать образ $\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \bigcup l_2)$ на ортогональную прямым плоскость с двумя выколотыми точками. Детали мы опустим. Поэтому фундаментальная группа $\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \bigcup l_2)$ совпадает с фундаментальной группой плоскости без двух точек и равна свободной группе с двумя образующими. То есть

$$\pi_1(\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \bigcup l_2)) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Пусть γ_a, γ_b — замкнутые кривые, представляющие образующие a, b фундаментальной группы $\pi_1(\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \bigcup l_2))$.

Рассмотрим случай $t > 0$. В этом случае $\gamma \simeq \gamma_a \circ \gamma_a'$, а $\gamma_a' \simeq \gamma_b \circ \gamma_a^{-1} \circ \gamma_b^{-1}$ (рис. 2). То есть γ представляет нетривиальный элемент $aba^{-1}b^{-1}$ фундаментальной группы $\pi_1(\Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \bigcup l_2))$.

Положим $E_+^4 = \{(x^1, \ldots, x^4)\colon x^3 \geqslant \varepsilon\}$ и $E_-^4 = \{(x^1, \ldots, x^4)\colon x^3 \leqslant \varepsilon\}$. Заметим, что кривые $\Pi_\varepsilon \bigcap S^2$ связны и стягиваются к точке $\Pi_0 \bigcap S^2$ при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что один из дисков, на которые кривая γ разбивает S^2, лежит в E_-^4, а другой диск лежит в E_+^4. Вспомним, что плоскости π_1^t и π_2 находятся в общем положении и имеют единственную точку пересечения, которую мы обозначим z. Пусть $z \in E_-^4$. Так как ретракция

$$r\colon E_+^4 \setminus (\pi_1^t \bigcup \pi_2) \to \Pi_\varepsilon \setminus (l_1^t \bigcup l_2),$$

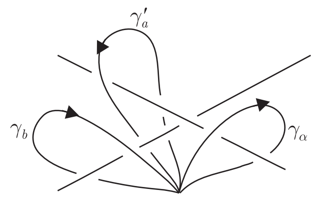

Рис. 2

сопоставляющая точке $e \in E^4_+$ пересечение прямой l_e, проходящей через точки e и z, с плоскостью Π_ε, является деформационной ретракцией, то γ представляет нетривиальный элемент группы

$$\pi_1(E^4_+ \setminus (\pi^t_1 \bigcup \pi_2)).$$

Но, как отмечалось выше, один из дисков, на которые γ разбивает сферу S^2, лежит в E^4_+. А так как по построению $S^2 \bigcap(\pi^t_1 \bigcup \pi_2) = \varnothing$, то $[\gamma] = 0$ в $\pi_1(E^4_+ \setminus (\pi^t_1 \bigcup \pi_2))$. Мы пришли к противоречию. Случай, когда $z \in E^4_+$ рассматривается аналогично и также приводит к противоречию. Значит, предположение о том, что через каждую точку $x \in E^4$ вне S^2 проходит плоскость π_x такая, что $\pi_x \bigcap S^2 = \varnothing$, неверно, и теорема доказана.

Замечание 1. Можно показать, что для двумерного тора данная теорема уже не верна. Примером является стандартный тор Клиффорда $T^2 \subset S^3 \subset E^4$.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за постановку задачи, внимание к работе и ряд усовершенствований в доказательстве. Так же автор выражает благодарность проф. Ю. Б. Зелинскому, который сформулировал эту задачу, проф. А. А. Борисенко и В. А. Горькавому за обсуждение работы и полезные замечания.

1. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – Москва: Наука, 1985. – 336 с.
2. *Ботт Р., Ту Л. В.* Дифференциальные формы в алгебраической топологии. – Москва: Наука, 1989. – 336 с.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 01.03.2013

Д. В. Болотов

Про вкладення S^2 у E^4

Доведено, що для будь-якої гладко вкладеної сфери S^2 у евклідів простір E^4 завжди знайдеться точка така, що будь-яка двовимірна площина, яка проходить через цю точку, перетинає сферу S^2.

D. V. Bolotov

On the embedding of S^2 in E^4

We prove that, for any smoothly embedded sphere S^2 in the Euclidean space E^4, there is a point such that any two-dimensional plane passing through this point intersects the sphere S^2.