УДК 519.6

Д. А. Верлань, аспірант

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРИ I РОДУ ПРИ АПРОКСИМАЦІЇ ЯДЕР СПЛАЙНАМИ

У статті розглядається питання розробки та оцінки похибок чисельного алгоритму розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри на основі використання інтерполяційних сплайнів. У порівнянні з традиційними алгоритмами цей алгоритм має малу кількість обчислювальних операцій на кроці циклічних процедур і може забезпечувати синтез структур спеціалізованих обчислювальних пристроїв, орієнтованих на розв'язання задачі відновлення сигналів в реальному часі.

Ключові слова: *апроксимація, функція двох змінних, похибка.*

Чисельні алгоритми розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри I роду

$$\int_0^t K\left(t-s\right) y\left(s\right) ds = f\left(t\right), \tag{1}$$

зазвичай будується на основі квадратурних методів. Реалізація традиційних алгоритмів методу квадратурних формул обмежуються зростанням кількості операцій на кожному наступному кроці обчислень. У зв'язку з цим розглянемо питання побудови високопродуктивного чисельного алгоритму розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри I роду на основі відповідної апроксимації ядра.

Основою рівняння Вольтерри I роду (1) при моделюванні скалярних динамічних стаціонарних об'єктів є оператор типу згортки

$$\psi\left(t\right) = \int_0^t K\left(t-s\right) \varphi(s) ds, \tag{2}$$

де інтеграл при чисельному обрахунку замінюється скінченою сумою. При цьому можуть бути застосовані різні квадратурні формули, кожна з яких має суттєві алгоритмічні особливості [5]. Традиційні апроксимуючі алгебраїчні залежності для інтегрального оператора (2) та інтегрального рівняння Вольтерри першого роду (1) отримуються за допомогою наступних наближених виразів

$$\psi\left(t_i\right) \cong \sum\nolimits_{j=1}^{i} A_i K\left(t_i - t_j\right) \varphi(t_j), \tag{3}$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{i} A_i K\left(t_i - t_j\right) y\left(t_j\right) = f\left(t_i\right), \tag{4}$$

де $j = 1, 2, ..., i$; $(0 < c < 1)$ $(i = \overline{1, n})$ — вузли дискретизації; A_i — коефіцієнти квадратурної формули. Якщо вузли t_i слідують один за одним з постійним кроком h, то $t_i = (i-1)h$. Відсутність невідомої функції поза знаком інтеграла в рівнянні (1) призводить до ряду особливостей. Наприклад, в системі (4) неможливо визначити значення $y(0)$, необхідне для подальшого отримання значень $y(h), y(2h), \dots$ рекурентно.

Для визначення $y(0)$ можна скористатися виразом

$$y(0) = \frac{f'(0)}{K(0)}.$$

Тепер система (4) дозволяє послідовно визначити значення

$$y(t_i) = \frac{1}{A_j K(0)} \left(f(t_i) - \sum_{j=1}^{i} A_i K(t_i - t_j) y(t_j) \right).$$

При обчислені значень

$$f'(0) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0},$$

можна скористатися різними інтерполяційними способами, в тому числі формулою квадратичної інтерполяції

$$f'(0) = \frac{1}{2h} \left(-3f(0) + 4f(h) - f(2h) \right). \qquad (5)$$

Слід зазначити, що при $K(0) = 0$ в інтервалі інтегрування для наближеного розв'язку інтегрального рівняння (1) неможливо застосувати метод квадратурних формул з використанням формули трапецій, оскільки при цьому необхідно виконувати операцію ділення на $K(0)$ згідно з розрахунковими виразами

$$\begin{gathered} \tilde{y}(0) = \frac{f'(0)}{K(0)}, \\ \tilde{y}(t_i) = \frac{2}{A_i K(0)} \left(\frac{f(t_i)}{h} - \sum_{j=1}^{i-1} A_i K(t_i - t_j) \tilde{y}(t_j) \right), \end{gathered} \qquad (6)$$

де $t_i = (i-1)h$, $i = 2,3,\dots$, $A_j = \begin{cases} 1/2, \forall\ j = 1, \\ 1, \forall\ j > 1. \end{cases}$

Тому більш привабливим у цьому випадку є застосування формули середніх прямокутників, яка дозволяє ефективно визначити значення шуканої функції у вузлах $t_{j+1/2}$ ($t_{j+1/2} = \left(j + \frac{1}{2} \right) h$), у відповідності з виразом

$$\begin{cases} \tilde{y}\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{f(h)}{hK\left(\frac{1}{2}h\right)}, \\ \tilde{y}\left(t_{i+1/2}\right) = \dfrac{1}{K\left(\frac{1}{2}h\right)}\left(\dfrac{f(t_i)}{h} - \sum_{j=1}^{i-2} A_i K\left(t_i - t_{j+1/2}\right)\tilde{y}\left(t_{j+1/2}\right)\right), \end{cases} \tag{7}$$

З виразів (3), (6) і (7) видно, що із зростанням номера кроку вузлів дискретизації зростає число операцій, які виконуються на кожному кроці обчислень. Ці складнощі визначаються значною мірою наявністю ядра, що представляє собою функцію двох змінних. Саме цей фактор насамперед позначається на швидкодії обчислювальних алгоритмів.

Імпульсні перехідні функції розглянутого класу динамічних об'єктів є неперервними і тому можуть бути представленими у вигляді степеневого ряду згідно теореми Вейєрштрасса. Це дозволяє в багатьох практичних випадках вважати ядро інтегрального рівняння (1) сепарабельним, тобто представленим у вигляді

$$K(t-s) \cong \sum_{l=1}^{m} \alpha_l(t)\beta_l(s),\ l = \overline{1,m}, \tag{8}$$

або зводиться до цього виду.

Властивість роздільності ядра (8) у випадку, коли імпульсна перехідна функція $K(t)$ задана аналітично, дозволяє записати вирази (2) і (1) у вигляді

$$\psi(t) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_l(t)\int_0^t \beta_l(s)\varphi(s)ds, \tag{9}$$

$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_l(t)\int_0^t \beta_l(s)y(s)ds = f(t). \tag{10}$$

Застосовуючи до виразів (9) і (10) квадратурні формули, отримуємо відповідно формулу для чисельної реалізації оператора

$$\psi(t_i) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_l(t_i)\sum_{j=1}^{i-1} \beta_l(t_j)\varphi(t_j), \tag{11}$$

і рекурентні вирази для розв'язання рівняння:

$$\begin{cases} \tilde{y}(0) = \dfrac{f'(0)}{K(0)}, \\ \tilde{y}(t_i) = \dfrac{2}{A_i K(0)}\left(f(t_i) - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l(t_i)\sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(t_j)\tilde{y}(t_j)\right). \end{cases} \tag{12}$$

Вирази (11) і (12) являють собою аналітичний опис модифікованого алгоритму, що відрізняються від (3) і (6) тим, що кількість обчислень на кожному кроці залишається незмінною, оскільки доданки $\sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(t_j)\tilde{y}(t_j)$ залежать тільки від однієї вільної змінної t_j.

Широкий клас ядер може бути представленій аналітичним способом у сепарабельному вигляді, наприклад

$$K(t-s)=e^{t-s}\sin(t-s)$$

може бути представлене еквівалентно як

$$K(t-s)=e^{t}\left(\sin(t)e^{-s}\sin(s)\ -\cos(t)e^{-s}\sin(s)\right),$$

а відповідний оператор згортки приймає вигляд

$$\psi(t)=e^{t}\left(\sin(t)\int_0^t e^{-s}\sin(s)ds-\cos(t)\int_0^t e^{-s}\sin(s)ds\right).$$

Умовою застосування модифікованого алгоритму є наявність аналітичного виразу для ядра. Тому вираз (12) безпосередньо незастосовне, якщо $K(t)$ має експериментальне походження. У такому випадку практичний шлях визначення аналітичного вигляду функції $K(t)$ полягає в отриманні перехідної характеристики $P(t)$, як реакції досліджуваного об'єкта на одиничну функцію, і подальшої апроксимації $P(t)$ простим аналітичним виразом і його диференціюванням, оскільки $K(t)=dP(t)/dt$.

Ефективним апаратом наближення функції на відрізку $[0,T]$ за допомогою простих аналітичних виразів — поліномів, є інтерполяційні поліноміальні сплайни [3], що належать до класу $C_{[0,T]}$. У цьому разі застосування сплайнів при виконанні умов:

1) $K(0)\neq 0$;
2) функції $K'(t)$ та $f'(t)$ неперервні на $[0,T]$, тобто MW^kH^c , призводить до наступної процедури отримання наближеного розв'язку рівняння (1).

1. Апроксимуючи експериментально отримані функції $P(t)$ та $K(t)$ інтерполяційними сплайнами *n*-го порядку на рівномірній сітці

$$\Delta_m \overset{def}{=} \left\{t_i : t_i = iH; H=\frac{T}{m}; i=\overline{0,m}\right\}, \tag{13}$$

відповідно маємо $Z_{m,n}(P(t))$, $Z_{m,n}(f(t))$, де m — кількість точок інтерполяції;

2. Визначивши похідну $Z'_{m,n}(P(t))$ і підставляючи її в рівняння (1) замість $K(t-s)$, а замість $f(t)-Z_{m,n}(P(t))$ отримаємо

$$\int_0^t Z_{m,n}{}'\left(P(t-s)\right)\tilde{y}(s)ds = Z_{m,n}\left(f(t)\right), \tag{14}$$

де $\tilde{y}(t)$ — розв'язок цього рівняння.

3. Диференціюючи рівняння (14) по t, отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$K(0)\,\tilde{y}(t)+\int_0^t Z_{m,n}''\left(P(t-s)\right)\tilde{y}(s)ds = Z'_{m,n}\left(f(t)\right). \qquad (15)$$

4. Виходячи з квадратурних формул виду

$$\int_0^{ih}\varphi(s)ds = h\sum\nolimits_{j=0}^{i} W_{ij}\psi_{ij}\left(jh\right)+R_i[\psi], \qquad (16)$$

де $i=\overline{1,N}$, $N=1,2,\ldots$, $h\overset{def}{=}\dfrac{T}{N}$, hw_{ij} — ваги, $R_i[\psi]$ — залишки цих формул, отримуємо систему розрахункових рівнянь

$$K(0)\,\tilde{\tilde{y}}(ih)+\sum\nolimits_{j=0}^{i} W_{ij}Z'_{m,n}\left(P(ih-jh)\right)\tilde{\tilde{y}}(jh) = Z'_{m,n}\left(f(ih)\right), \qquad (17)$$

де $\tilde{\tilde{y}}(ih)$ — розв'язок системи (17). Рівняння (15) і система (17) дозволяють використовувати властивість (8) ядра і отримати розрахункові вирази, які представляють собою також модифікований алгоритм методу квадратурних формул.

На питання про можливі похибки одержуваного розв'язку інтегрального рівняння (17) на основі реалізації вищевикладеної процедури відповідають наступні теореми.

Теорема 1. Нехай $P(t)\in C^{(r)}_{[0,T]}$ та $f(t)\in C^{(l)}_{[0,T]}$ (мають r-ту та l-ту неперервну похідну відповідно) $2\le r\le n$ і $1\le l\le n$ та виконується нерівність

$$\max_{1\le i\le n}\left\|\frac{\partial^{Z_i}}{\partial s^{Z_i}} Z'_{m,n}\left(P(t-s)\right)\tilde{y}(s)\right\|_c \le M, \qquad (18)$$

в якій $1\le Z_i\le n-3$, $\|\cdot\|\overset{def}{=}\max\limits_{0\le t,\, s\le t}|\cdot|$.

Яким би не був інтерполяційний поліноміальний сплайн ступеня $n\ge 4$ з сіткою вузлів (13), квадратурні формули (16) точні для многочленів ступеня Z_i-1 і такі, що

$$q = h\left\|Z_{m,n}'\left(P(t-s)\right)\right\|_c W/\left|K_0\right| < 1, \qquad (19)$$

де $K_0 = K$

$$W\overset{def}{=}\max_{0\le j\le i\le N}\left|W_{ij}\right|.$$

Для відхилення розв'язку $\tilde{\tilde{\mathrm{y}}}(t)$, яке одержано з системи (17), від точного розв'язку $\mathrm{y}(t)$ вихідного рівняння (1) справедлива оцінка

$$\left\| y(ih) - \tilde{\tilde{y}}(ih) \right\|_{\infty} \le \left\{ \mu(n,r,H) \|f\|_C + a_1(n,l) H^{l-1} \omega\left(f^l; H\right) \right\}; \qquad (20)$$
$$b_1(m,n,r) + B \left\| C_{Z_i} \right\|_{\infty},$$

де H визначено в (13), $\|x_i\|_{\infty} \overset{def}{=} \max\limits_{1\le i\le N} |x_i|$, $\forall x_i \in R^1$,

$$\mu(n,r,H) = \exp\left[T a_2(n,r) H^{r-2} \omega(p^{(r)};;H) / |K_0| \right] - 1, \qquad (21)$$

$\omega(\psi;H)$ — модуль неперервності функції $\psi(\mathrm{t})$, що визначається за формулою

$$\omega(\psi;H) = \max_{\substack{0\le t,\, t+\delta \le T, \\ |\delta|\le H}} \left| \psi(t+\delta) - \psi(t) \right|; \qquad (22)$$

$$B = \frac{TM}{1-q} \exp\left[T W b_2(m,n,r) / (1-q) \right]; \qquad (23)$$

$$C_{Z_i} \overset{def}{=} \frac{(ih)^{Z_i}}{Z_i - 1} \int_0^{ih} \left| \frac{(1-t)^{Z_i}}{Z_i} - \sum\nolimits_{j=1}^{i} W_{ij} \left(\frac{jh - t + |jh - t|}{2} \right)^{Z_i} \right| dt, \qquad (24)$$

а величини $a_1(n,l)$, $a_2(n,r)$, $b_1(m,n,r)$ та $b_2(m,n,r)$ — константи, залежні лише від вказаних величин.

Доведення. Враховуючи, що $\mathrm{y}(t)$, $\tilde{y}(t)$ і $\tilde{\tilde{\mathrm{y}}}(t)$ являються відповідно розв'язками рівнянь (1), (15), (17), оцінимо окремо кожний доданок в правій частині нерівності трикутника

$$\left| y(ih) - \tilde{\tilde{y}}(ih) \right| \le \left| y(ih) - \tilde{y}(ih) \right| + \left| \tilde{y}(ih) - \tilde{\tilde{y}}(ih) \right|. \qquad (25)$$

Введемо для спрощення викладок наступне позначення

$$\nu_{m,n}^{(k)}(\psi;t) \overset{def}{=} \left| \psi^k(t) - Z_{m,n}^{(k)}(\psi;t) \right| / |K_0|,\ k = 0,1,2,\dots. \qquad (26)$$

Вважаючи в нерівності (18) в роботі [2] $\tilde{K}(t) \overset{def}{=} Z_{m,n}''(P(t))$ та $\tilde{f}(t) = Z_{m,n}''(P(t))$ враховуючи, що в ньому для функції $\varphi(t) \overset{def}{=} \left(e^{at} - 1\right)/t$ вірні співвідношення $\varphi(t) \le \varphi(|t|)$ $(\forall a \ge 0)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = a$, отримуємо

$$\left| y(t) - \tilde{y}(t) \right| \le \left\{ \frac{\|f\|_C \left\| \nu_{m,n}^{(2)}(P;t) \right\|_C \exp\left[t \nu_{m,n}^{(2)}(P;t) \right] - 1}{\nu_{m,n}^{(2)}(P;t)} + \left\| \nu_{m,n}^{(1)}(P;t) \right\|_C \right\} \times$$
$$\times \exp\left[\left\| Z_{m,n}^{(2)}(P(t)) \right\|_C t \right] \le \|f\|_C \left\{ \exp\left[t \nu_{m,n}^{(2)}(P;;t) \right] - 1 + \left\| \nu_{m,n}^{(1)}(P;t) \right\| \right\} \times \qquad (27)$$
$$\times \exp\left[\left\| Z_{m,n}^{(2)}(P(t)) \right\|_C t \right].$$

Скориставшись тепер для оцінки величин $\nu_{m,n}(\cdot;t)$ та $\left\|Z_{m,n}^{(2)}(P(t))\right\|_C$ відповідно, теоремою 2 і наслідком 1 з теореми 3 в роботі [7, гл. 3, § 3], відповідно (21) та в силу (27) отримаємо $\forall i=\overline{1,N}$

$$\left|y(t)-\tilde{y}(t)\right| \le \left[\mu(n,r,H)\|f\|_C + a_1(n,l)H^{l-1}\omega\left(f^{(l)},H\right)\right]b_1(m,n,r), \quad (28)$$

де усі величини визначені в умові теореми.

Другий доданок в (25) оцінимо, скориставшись нерівністю (12) (при $\varepsilon_0=\delta=0$) із роботи [4, гл. 8, § 2], яке в наших позначеннях (16), (19) буде мати вигляд

$$\begin{gathered}\left|\tilde{y}(ih)-\tilde{\tilde{y}}(ih)\right| \le \left\{exp\left[TW\left\|Z_{m,n}^{(2)}(P(t))\right\|/(1-q)|K_0|\right]\times\right.\\ \left.\times R_i\left[\left\|Z_{m,n}^{(2)}(P(t))\right\|\tilde{y}(s)\right]\right\}/(1-q).\end{gathered} \quad (29)$$

Оцінюючи величину $\left\|Z_{m,n}^{(2)}(P(t))\right\|_C$ (як і вище) за допомогою наслідку 1 із теореми 3 в роботі [7, гл. 3, § 3], а величину $R_i\left[\left\|Z_{m,n}^{(2)}(P(t))\right\|\tilde{y}(s)\right]$ за допомогою нерівності (4.8) з урахуванням відношень (4.5) та (3.3) із роботи [6, с. 26—29], а також виразів (23) і (24) отримуємо, що

$$\left|\tilde{y}(ih)-\tilde{\tilde{y}}(ih)\right| \le \frac{1}{1-q}exp\left[TW\left\|Z_{m,n}^{(2)}(P(t))\right\|_C/|K_0|\right]MC_{Z_i} = BMC_{Z_i}.$$

Звідси та з (28) і (25) переконуємося у справедливості теореми. Теорему доведено.

Зауваження 1. Величини C_{Z_i}, що фігурують у правій частині (21), достатньо добре досліджені для основних квадратурних формул (наприклад 6, § 5]).

З теореми 1 і визначення класу функцій MW^kH^ρ $(0<\rho<1)$ (наприклад [6, с. 154] або [6, с. 18]):

$$MW^kH^\rho \stackrel{def}{=} \left\{\psi : \left|\psi^k(t'')-\psi^k(t')\right| < M\left|t''-t'\right|^\rho;\ \rho\in(0,1];\ \forall t'',t'\in[0,T]\right\}$$

безпосередньо випливає наступне.

Наслідок. Якщо $P(t)\in MW^rH^\alpha$, а $f(t)\in MW^lH^\beta$, де $2\le r\le n$, $1\le l\le n$, то в умовах теореми 1 справедлива рівність

$$\left|y(ih)-\tilde{\tilde{y}}(ih)\right|_\infty = O\left(h^{r-2+\alpha}\right)+O\left(h^{l-1+\beta}\right)+O\left(\frac{1}{(Z-1)!}\right), \quad (30)$$

де $Z \stackrel{def}{=} \min\limits_{1\le i\le N} Z_i$.

Загальна процедура 1—4 заснована на застосуванні інтерполяційних кубічних сплайнів $Z_{m,3}''(\psi(t))$, що задовольняють крайовим умовам [7, с. 83]

$$Z_{m,3}''(0) = Z_{m,3}''(\psi(t)) = 0 \tag{31}$$

для сітки вузлів вигляду (13), достатньо просто реалізується програмно.

Розглянемо використання в якості (16) квадратурної формули трапецій виду

$$\int_0^t \varphi(t)dt = 0,5h\left[\psi(0) + 2\psi(h) + \ldots + 2\psi((i-1)h) + \psi(ih)\right] + R_i[\psi], \tag{32}$$

де $h = T, m$ та $\forall \psi \in C_{[0,T]}$.

Відомо (наприклад [6, с. 33]), що формула трапецій для многочленів першої степені, а її залишковий член на класі функцій $MW^{(2)}$ відповідно теоремі 1 із роботи [6, § 6] задовольняє нерівності

$$\left|R_i[\psi]\right| \le \frac{T^3 M}{12m^2};\ \forall i = \overline{1,m}. \tag{33}$$

На питання про відхилення наближеного розв'язку від точного в цьому випадку дає відповідь така теорема.

Теорема 2. Нехай функції $P(t)$, $f(t)$, інтерполяційний кубічний сплайн $Z_{m,3}(\psi(t))$ і квадратурні формули (32) задовольняють наступні умови:

1) $P(t) \in C^r_{[0,T]}, r = 2,3; f(t) \in C^l_{[0,T]}; l = 1,2,3;$

2) $$\max_{(i-1)h \le s \le ih} \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[Z_{m,3}''\left(P(t-s)\right)\tilde{y}(s)\right]\right| \le M,\ \forall_i = \overline{1,m}; \tag{34}$$

3) $$Z \overset{def}{=} hA \overset{def}{=} 5h\left\|P''(t)\right\|_C / |K_0| \le 1. \tag{35}$$

Тоді в процедурах 1—4 при $m = N$, $n = 3$ для інтерполяції кубічних сплайнів відносно сітки вузлів (13) з крайовими умовами (31) і квадратурною формулою трапецій вигляду (32) має місце оцінка

$$\begin{aligned} \left\|y(ih) - \tilde{\tilde{y}}(ih)\right\|_\infty &\le \left[\|f\|_c\, \mu_r(h) + \nu_l(h)\right]\exp TA + \\ &+ \frac{TMh^2}{12(1-q)}\exp\left[\frac{TA}{(1-q)}\right],\ \forall_i = \overline{1,m}, \end{aligned} \tag{36}$$

де

$$\mu_r(h)\, def = \exp\left[B_r T h^{(r-2)}\omega\left(P^{(r)};;h\right)/|K_0|\right] - 1,\ B_2 = 5,\ B_3 = 4, \tag{37}$$

$$\nu_l(h)\, def = A_l h^{l-1} / |K_0|,\ A_1 = A_2 = 5,\ A_3 = 2, \tag{38}$$

$\omega(\psi, h)$ — модуль неперервності функції $\psi(t)$, яка визначається формулою (22).

Доведення. Схема доведення цієї теореми така ж як і теореми 1. Оцінимо доданок $\left|y(ih) - \tilde{y}(ih)\right|$ (в нашому випадку $h = H$) в нерівності (25) і скористаємося нерівністю (27). Для цього знайдемо верхні межі величин $\nu_{m,3}^{(2)}(P,t)$, $\nu_{m,3}^{(1)}(f,t)$ в (27), які визначаються формулами (26).

В силу теореми 9 (при $P(t) \in C^{[0,T]}$) і теореми 12 (при $P(t) \in C^{[0,T]}$ з роботи [7, гл. 2] отримуємо

$$\nu_{m,3}^{(1)}(P,t) \overset{def}{=} \left|\left[P^{(2)}(t) - Z_{m,3}^{(2)}(P(t))\right] / K_0\right| \le B_r h^{r-2} \omega(P^{(r)}; h) / \left|K_0\right|, \quad (39)$$

де $r = 2,3$; $B_2 = 5$, $B_3 = 4$.

Аналогічно, в силу теореми 10, 9, 12 (відповідно при $l = 1,2,3$) із [7, гл. 2] і отримуємо

$$\nu_{m,3}^{(1)}(f,t) \overset{def}{=} \left|\left[f^{(1)}(t) - Z_{m,3}^{(1)}(f(t))\right] / K_0\right| \le A_l h^{l-1} \omega\left(f^{(l)}; h\right) / \left|K_0\right|, \quad (40)$$

де $A_1 = A_2 = 5$, $A_3 = 2$.

Величину $\left\|Z_{m,3}^{(2)}(P,t)\right\|_C$ оцінимо на основі теореми 14 із роботи [7, гл. 2]:

$$\left\|Z_{m,3}^{(2)}(P,t)\right\|_C \le 5\left\|P''(t)\right\|_C. \quad (41)$$

Таким чином, із (27) в силу (39), (40), (41) і відповідно (37), (38) та (35) отримуємо

$$\left|y(ih) - \tilde{y}(ih)\right| \le \left[\left\|f_c\right\| \mu_r h + \nu_2(h)\right] \exp TA. \quad (42)$$

Другий доданок $\left|\tilde{y}(ih) - \tilde{\tilde{y}}(ih)\right|$ в (25) оцінимо, виходячи з нерівності (29).

Скористаємося тим, що для квадратурних формул $W = 1$ і в силу (41), (34), (33), отримуємо

$$\left|y(ih) - \tilde{y}(ih)\right| \le \frac{1}{1-q} \exp\left[\frac{TA}{1-q}\right] \frac{T^3 M}{12 m^2}. \quad (43)$$

Звідси, із (42) і (25) переконуємося у дійсності теореми. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо $P(t) \in MW^{(r)} H^{\alpha}$ ($r = 2,3$; $\alpha \in (0.1]$), а $f(t) \in MW^{(l)} H^{\beta}$, $l = 1,2,3$; ($\beta \in (0.1]$), то в умовах теореми 2 має місце співвідношення

$$\left\|y(ih) - \tilde{\tilde{y}}(ih)\right\|_{\infty} = O\left(h^{r+\alpha-2}\right) + O\left(h^{l+\beta-1}\right) + O\left(h^2\right). \quad (44)$$

При практичній реалізації процедури 1—4 на остаточний результат, крім досліджених похибок методу, впливають ще й обчислювальні похибки (див. [1, с. 16]), зумовлені неточністю вимірювань за допомогою приладів (інструментальна похибка), а також похибками округлень чисел при комп'ютерних розрахунках.

За схемою доведення теореми 2 і в силу нерівності (12) з роботи [3, гл. 8, § 27], і користуючись міркуваннями з § 18, гл. 2 в роботі [1] і § 1 гл. 4 з роботи [7] легко переконатися в справедливості наступної теореми.

Теорема 3. Нехай виконуються умови наслідку з теореми 2 і похибки обчислення функцій $P(t)$, $f(t)$ і $\tilde{\tilde{y}}(t)$ у вузлових точках δ_p, δ_f і δ. Тоді має місце співвідношення

$$\left\| y(ih) - \tilde{\tilde{y}}(ih) \right\|_\infty = O\left(h^{r+\alpha-2}\right) + O\left(h^{l+\beta-1}\right) + O\left(h^2\right) +$$
$$+\delta_p O\left(h^{-2}\right) + \delta_f O\left(h^{-1}\right) + O(\delta).$$

Наслідок. Оптимальним по порядку (в сенсі точності) кроком сітки (13) для інтерполяційних кубічних сплайнів і квадратурних формул трапецій вигляду (32) буде крок $h = O\left(\varepsilon^{1/(2+\gamma)}\right)$, де

$$\gamma \overset{def}{=} \min(r+\alpha-2, l+\beta-1, 2) \ , \ \varepsilon \overset{def}{=} \max\left(\delta_p, \delta_f, \delta\right) \ .$$

Висновок. Таким чином, розглянутий модифікований алгоритм методу квадратурних формул для розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри I роду має низку необхідних для чисельної реалізації властивостей, зокрема, має невелику і постійну кількість операцій для отримання чергового дискретного значення шуканої функції. Завдяки цьому даний алгоритм стає придатним в якості основи синтезу спеціалізованих обчислювальних пристроїв. Процедура чисельної реалізації інтегрального рівняння задачі відновлення сигналів в тому випадку, коли ядро і права частина мають експериментальне походження, заснована на використанні інтерполяційних сплайнів. Отримані оцінки похибки реалізації даної процедури свідчать про збіжність обчислювального процесу і дозволяють оптимально (в сенсі мінімізації помилки обчислень) вибрати крок квадратури.

Список використаних джерел:

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Бином, 2003. — 630 с.
2. Верлань А. Ф. Анализ ошибок электронного моделирование объектов описываемых интегральными уравнениями. – В кн.: Кибернетика и вычислительная техника / А. Ф. Верлань. — К. : Наук. думка, 1972. — 220 с.

3. Верлань А. Ф. О применении сплайнов при численном решении одного интегрального уравнения задачи восстановления сигналов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусатаров, В. И. Биленко // Доклады АН УССР, Сер. А. — 1981. — №4. — С. 72–75.
4. Крылов В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. — М. : Наука, 1977. — Т. II. — 400 с.
5. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — М. : Факториал Пресс, 2000. — 384 с.
6. Никольский С.М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский ; с доб. Н. П. Корнейчука. — 4-е изд., доп. — М. : Наука, 1988. — 254 с.
7. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. — М. : Наука, 1976. — 248 с.

In this paper considered is the issue the development and evaluation of errors numerical algorithm for solving integral equations Volterra through the use of interpolation splines. Compared with traditional algorithms, this algorithm has a small number of computational operations in step cyclic processes and structures can provide a synthesis of specialized computing devices, focused on solving the problem of signal restoration in real time.

Key words: *approximation, numerical, the function of two variables, error.*

Отримано: 18.02.2013

УДК 517.91:532.2

Г. І. Готинчан*, старший викладач
І. З. Готинчан,** канд. фіз.-мат. наук

*Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці
** Чернівецький торговельно-економічний інститут Київського національного торговельно-економічного університету, м. Чернівці

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-ФУР'Є-БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено гібридне інтегральне перетворення, породжене на сегменті з трьома точками спряження гібридним диференціальним оператором (Конторовича-Лєбєдєва)-Фур'є-Бесселя-Ейлера.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, спектр, спектральна функція, основна тотожність.*

Постановка проблеми та її аналіз. Метод відокремлення змінних і породжене ним інтегральне перетворення (Фур'є, Ганкеля, Меліна і т.д.) дало можливість одержати інтегральне зображення аналі-