УДК 004.61

С. А. Положаенко, д-р техн. наук, профессор,
Н. А. Лысенко, аспирант

Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ «АГЕНТОМ»

Выполнено исследование устойчивости фронтального вытеснения для многокомпонентных систем, представленных фильтрующимися несмешивающимися (в том числе аномальными) жидкостями. В условиях реальной прикладной задачи дано качественное описание процесса вытеснения в многокомпонентной системе с промежуточным «агентом». Предложена математическая модель класса задач фронтального вытеснения для многокомпонентных систем в виде вариационного неравенства, обеспечивающая простую численную реализацию.

Ключевые слова: *многокомпонентные системы, фронтальное вытеснение, «застойная зона», предельный градиент, математическая модель, вариационное неравенство.*

Введение. Качественно новой и не нашедший ранее решения задачей при изучении многокомпонентных смесей является исследование устойчивости фронтального вытеснения. При этом под устойчивостью фронтального вытеснения в многокомпонентном потоке понимается [1] гладкость границы раздела диффундируемых компонент.

Рассмотрим решение данной задачи на примере диффузии несмешивающихся жидкостей в пластовой системе. В рассматриваемом случае предполагается, что некоторые из диффундирующих компонент имеют аномальный характер, т. е. их диффузия характеризуется законом с предельным градиентом давления [1; 2]. Ниже будет показано, что исследование гладкости границы раздела диффундирующих компонент может быть использовано при решении задачи на образование «застойных зон».

Цель работы. Разработка класса математической модели (ММ) процессов фильтрации многокомпонентных аномальных жидкостей на примере процесса вытеснения в многокомпонентной системе с промежуточным «агентом».

Основная часть. Вначале выполним качественное описание процесса фильтрации многокомпонентных аномальных жидкостей при вытеснении одной жидкости другой, а затем разработаем ММ данного процесса в виде вариационного неравенства.

1. Качественное описание процесса вытеснения в многокомпонентной системе с промежуточным «агентом». Условием, определяющим границу раздела диффундирующих компонент в случае совместной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей, может служить «скачек» насыщенности в функции Баклея-Леверетта [1; 3; 4]

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1) + \mu_2 k_2^0(S_2)}, \tag{1}$$

где $k_1^0(S_1)$ и $k_2^0(S_2)$ — относительные фазовые проницаемости для фильтрующихся жидкостей; μ_1 и μ_2 — их вязкости; S_1 и S_2 насыщенности порового пространства фильтрующимися жидкостями, соответственно.

«Скачек» насыщенности в (1) определяется соотношением $k_1^0(S_1) \equiv 0 \left(S_1 \le S^*\right)$, вызываемым наличием у вытесняемой компоненты напряжения сдвига τ^*, где S^* и τ^* — соответственно предельные значения насыщенности и напряжения сдвига.

Экспериментально установлено [1], что фронт вытеснения продвигается устойчиво, если подвижность вытесняющей компоненты не превышает подвижность вытесняемой компоненты

$$\frac{k_1(S_1)}{\mu_1} \le \frac{k_2(S_2)}{\mu_2}. \tag{2}$$

Деление (2) на скорость диффузии ϖ (в частном случае пластовых систем — скорости фильтрации) приводит к более общему и удобному виду

$$\frac{\partial P(t,z)}{\partial \eta} > 0, \ \frac{\partial P_c(S)}{\partial \eta} > 0, \tag{3}$$

где $P(t,z)$ задает внутрипластовое (усредненное) давление для фильтрующихся жидкостей; $P_c(S)$ — капиллярное давление, обусловленное наличием различных скоростей фильтрации для жидкостей в многокомпонентной системе; η — нормаль к градиенту внутрипластового давления $P(t,z)$.

В противном случае скорость отмыва вытесняемой компоненты выше скорости изменения насыщенности вытесняющей компоненты, что приводит к образованию «застойных зон» [1; 2]. Иными словами, вытесняемая компонента «отступает» медленнее, чем продвигается вытесняющая компонента, что физически и определяет механизм образования «застойных зон».

Рассмотрим фронтальное вытеснение с предельным градиентом несмешивающихся компонент со «скачком» насыщенности на фронте вытеснения. Пусть за и перед фронтом вытеснения насыщенность вытесняющей компоненты S_2 имеет постоянные значения S_2^h и $S_2^f < S_2^h$ соответственно. А фронт вытеснения при этом перемещается в сторону положительного изменения градиента насыщенности с постоянной (для простоты рассмотрения) скоростью

$$\bar{\varpi} = \frac{\varpi}{m} \cdot \frac{J\left(S_2^h\right) - J\left(S_2^f\right)}{S_2^h - S_2^f},$$

где ϖ — скорость фильтрации, обусловленная действием внутрипластового давления $P(t, z)$ (по закону Дарси [3; 4]); m — пористость среды, в которой происходит фильтрация.

Пусть также в момент времени $t = 0$ поверхность фронта вытеснения есть плоскость $F(z_i) = \Xi_0, i = 1, 2$. Нарушение устойчивости фронтального вытеснения учтем в виде нестационарных возмущений, нарушающих постоянство насыщенностей в областях распространения фронта и искажающих его гладкость, что отразится следующим образом

$$F(z_i, t) = \Xi_0(t); i = 1, 2, \tag{4}$$

где z_i — соответствуют координатам в невозмущенной плоскости фронта.

Известны [2] уравнения двухфазной фильтрации с предельным градиентом G, описывающие процесс фильтрации при отклонении от закона Дарси

$$\varpi_j = -\frac{k\,\lambda_j\left(S_j\right)}{\mu_j}\left[grad\left(P_j\right) - \frac{G_j}{\left|grad\left(P_j\right)\right|} grad\left(P_j\right)\right]; \; \left|grad\left(P_j\right)\right| > G_j,$$

$$\varpi_j = 0; \; \left|grad\left(P_j\right)\right| \le G_j; \; j = 1, 2, \tag{5}$$

а также уравнения неразрывности (случай двух фильтрующихся жидкостей)

$$div\left(\varpi_j\right) - (-1)^j m \frac{\partial S_j}{\partial t} = 0; \; j = 1, 2. \tag{6}$$

Уравнения вида (5) и (6) в предположении малости возмущений линеаризуются. Граничные условия (ГУ) на возмущенной поверхности фронта вытеснения (4), выражающие равенство давлений перед и за фронтом вытеснения, а также расходов

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \eta} = m\bar{\varpi}\left(S_1^h - S_1^f\right); \; \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} = m\bar{\varpi}\left(S_2^h - S_2^f\right)$$

определены на невозмущенной поверхности фронта вытеснения Ξ_0.

Для гладкости границы раздела потребуем ограниченность возмущений на поверхности Ξ_0. Тогда для определения возмущений скоростей, давлений и насыщенности получим следующие выражения (возмущения соответствующих величин обозначены знаком тильда, а невозмущенные величины обозначены индексом 0)

$$\varpi_j = -\frac{k\lambda_j\left(S_j\right)}{\mu_j} J_0\left(S_j\right)\left[grad\left(\tilde{P}_j\right) - \frac{G_j}{\left|grad\left(\tilde{P}_j\right)\right|} grad\left(\tilde{P}_j\right)\right];$$

$$\left|grad\left(\tilde{P}_j\right)\right| > G_j ,$$

$$\varpi_j = 0 \; ; \; \left|grad\left(\tilde{P}_j\right)\right| \le G_j \; ; \; j = 1,2 , \qquad (7)$$

с ГУ, учитывающими возмущения на поверхности фронта $F\left(z_i\right) = \Xi_0 ; i = 1,2$

$$\frac{\partial \tilde{P}\left(t, z_i\right)}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial \tilde{P}_c\left(S\right)}{\partial \eta} > 0 \; ; \; i = 1,2 , \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \eta} = m\overline{\varpi}\left(S_j^h - S_j^f\right); \; j = 1,2 . \qquad (9)$$

Следует обратить внимание, что выражения динамики (7) составлены из предположения совместного движения двух аномальных компонент. Таким образом, формулировка задачи об устойчивости фронтального вытеснения фактически сводится к определению возмущений насыщенности («скачку» насыщенности) из системы (7) с ГУ (8), (9).

Из практических приложений задачи на устойчивость фронтального вытеснения можно привести следующее. В нефтепромысловой практике часто используется вытеснение с применением промежуточного «агента» [1; 5–7], когда «поршень» из пены или полимера (которые являются хорошими вытеснителями) проталкиваются водой. При таком двойном «поршневом» вытеснении существуют два фронта вытеснения. В данном случае, если на границе «нефть — промежуточный «агент»» будет обеспечено условие устойчивости фронтального вытеснения (2) или (3), то тем самым будет обеспечена гладкость границы раздела диффундируемых компонент и, как следствие, маловероятно образование «застойных зон» в области, занятой нефтью. Последнее обстоятельство определяет повышение нефтеотдачи продуктивного пласта. При этом нет необходимости обеспечивать гладкость фронта вытеснения «промежуточный «агент» — вода» (т.е. возможен отмыв и образование «застойных зон» в области, занятой промежуточным «агентом»). Как и в случае двухкомпонентных смесей, возмущающими функциями здесь будут расходы в скважинах.

Физически картину «поршневого» вытеснения можно пояснить следующим образом. Равенство скоростей фильтрации (вытеснения) обеспечивается при равенстве вязкостей граничащих компонент. Иными словами, если для вязкостей вытесняемой нефти μ_1 и промежуточного «агента» μ_3 выполняется условие $\mu_1 \approx \mu_3$, то данные компоненты будут фильтроваться с одинаковой скоростью (т.е. выполняется условие (2)). Следовательно, закачка ограниченного количества промежуточного «агента» создает «поршень», который на границе «нефть — промежуточный «агент»» создает равные условия фильтрации для обоих компонентов. Тем самым, обеспечивается гладкость границы их раздела, а, как следствие — отсутствие «застойных зон».

2. Формализация задачи фронтального «поршневого» вытеснения для многокомпонентных смесей в виде вариационного неравенства. Сформулируем ММ процесса «поршневого» вытеснения. Запишем для плоского случая ($i = 2$) уравнения динамики вида (5) и (7) соответственно для вытесняемой компоненты (индекс 1 у переменных), вытесняющей компоненты (индекс 2 у переменных) и промежуточного «агента» — «поршня» (индекс 3 у переменных) с учетом «скачка» насыщенности в функции Баклея-Леверетта (опуская для простоты записи параметры у функций)

$$-\frac{m\,\partial S_1}{\partial t}-\frac{k_1\,\rho_1}{\mu_1}J\left(S_1\right)\left[1-S_1\,G_1\right]\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{d\,P_c}{d\,S_1}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_j, \quad (10)$$

$$-\frac{m\,\partial S_2}{\partial t}-\frac{k_2\,\rho_2}{\mu_2}J\left(S_2\right)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{d\,P_c}{d\,S_2}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j Q_j, \quad (11)$$

$$-\frac{m\,\partial S_3}{\partial t}-\frac{k_3\,\rho_3}{\mu_3}J\left(S_3\right)\left[1-S_3 G_3\right]\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{d\,P_c}{d\,S_3}\right]\right\}=0\,. \quad (12)$$

Начальные и граничные условия примут вид

$$S_l\left(0,z\right)=S_{l_0}\left(z\right),\ l=\overline{1,3}\,, \quad (13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}>0,\ \frac{\partial P_c\left(S_3\right)}{\partial \eta}>0\,. \quad (14)$$

Граничные условия (14) определены только для интересующей границы Γ «вытесняемая компонента — промежуточный «агент»», поскольку для нее предполагается определение устойчивости фронтального вытеснения (т.е. отсутствие образования «застойных зон»). При этом продвижение «поршня» в виде промежуточного «агента» будем фиксировать по скачку насыщенности $S_3\left(t,z\right)$ в функции Баклея-Леверетта. Переменные, входящие в выражения (10)–(14) описаны ранее.

Введем в рассмотрение пробную функцию $v, \forall v \in K$, $K = \left\{ v \middle| v \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega \right\}$. Скалярно умножим (10) и (12) соответственно на $\left(v - S_1\right)$ и $\left(v - S_3\right)$. Применив далее функцию Грина, получим

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}\left(v-S_1\right)-\int\limits_{\Omega}\frac{k_1\,\rho_1}{\mu_1}J\left(S_1\right)\left\{\left[1-S_1\,G_1\right]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\cdot\frac{\partial\left(v-S_1\right)}{\partial z_i}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{d P_c}{d S_1}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_1\right)}{\partial z_i}\right]\right\}dz=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_j+\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial S_1}{\partial\eta}\cdot\left(v-S_1\right)\right]d\Gamma,\ \forall v,\ S_1\in K, \tag{15}$$

$$-\frac{m\,\partial S_3}{\partial t}\left(v-S_3\right)-\int\limits_{\Omega}\frac{k_3\,\rho_3}{\mu_3}J\left(S_3\right)\left\{\left[1-S_3\,G_3\right]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\cdot\frac{\partial\left(v-S_3\right)}{\partial z_i}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{d P_c}{d S_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_3\right)}{\partial z_i}\right]\right\}dz=\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial S_3}{\partial\eta}\cdot\left(v-S_3\right)\right]d\Gamma,\quad\forall v,\ S_3\in K. \tag{16}$$

Выполняя в (15), (16) замену переменной v на $\left(-v\right)$ запишем новую систему с учетом уравнения (11) для вытесняющей компоненты

$$-\frac{m\partial S_1}{\partial t}\left(v-S_1\right)-\int\limits_{\Omega}\frac{k_1\,\rho_1}{\mu_1}J\left(S_1\right)\left\{\left[1-S_1\,G_1\right]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d P_c}{d S_1}\cdot\frac{\partial S_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_1\right)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\frac{k_1\,\rho_1}{\mu_1}J\left(S_1\right)\left\{\left[1-S_1\,G_1\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\left|v\right|\right]\right\}dz- \tag{17}$$
$$-\int\limits_{\Omega}\frac{k_1\,\rho_1}{\mu_1}J\left(S_1\right)\left\{\left[1-S_1\,G_1\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\left|S_1\right|\right]\right\}dz\geq\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j\,Q_{1_j}\ \ \forall v,\ S_1\in K\ ,$$

$$-\frac{m\partial S_2}{\partial t}-\frac{k_2\rho_2}{\mu_2}J\left(S_2\right)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i}-\frac{dP_c}{dS_2}\right]\right\}=\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j Q_{2_j}\,, \tag{18}$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}\left(v-S_3\right)-\int\limits_{\Omega}\frac{k_3\,\rho_3}{\mu_3}J\left(S_3\right)\left\{\left[1-S_3\,G_3\right]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d P_c}{d S_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\left(v-S_3\right)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\frac{k_3\,\rho_3}{\mu_3}J\left(S_3\right)\left\{\left[1-S_3\,G_3\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\left|v\right|\right]\right\}dz- \tag{19}$$
$$-\int\limits_{\Omega}\frac{k_3\,\rho_3}{\mu_3}J\left(S_3\right)\left\{\left[1-S_3\,G_3\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\left|S_3\right|\right]\right\}dz\geq 0,\quad\forall v,\ S_3\in K\ .$$

Выражения (17)–(19) дополняются начальными (13) и граничными (14) условиями. Таким образом, (17)–(19), (13), (14) представляет собой ММ «поршневого» вытеснения для многокомпонентной системы.

На каждой из границ «вытесняющая компонента — промежуточный «агент»» и «промежуточный «агент» — вытесняемая компонента» выполняются соответственно очевидные условия $S_2 = (1 - S_3)$ и $S_1 = (1 - S_3)$. С учетом данных соотношений выражения (17)–(19) сводится к виду

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v - S_3) - \int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1} J(S_3)\left\{ S_3 G_1 \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dP_c}{dS_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v - S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\} +$$

$$+\int_\Omega \frac{k_1\,\rho_1}{\mu_1} J(S_3)\left\{ S_3\, G_1 \cdot \left[\frac{\partial^2 P}{\partial\, z_i^2}|v|\right]\right\} dz - \qquad (20)$$

$$\int_\Omega \frac{k_1\,\rho_1}{\mu_1} J(S_3)\left\{ S_3\, G_1 \cdot \left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\} dz \geq \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_1}\zeta_j Q_j, \quad \forall v, S_1 \in K,$$

$$-\frac{m\,\partial S_3}{\partial\, t} - \frac{k_2\,\rho_2}{\mu_2} J(S_3)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial P}{\partial z_i} - \frac{d\,P_c}{d\,S_3}\right]\right\} = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{K_2}\zeta_j\, Q_j, \qquad (21)$$

$$-\frac{m\partial S_3}{\partial t}(v - S_3) - \int_\Omega \frac{k_3\,\rho_3}{\mu_3} J(S_3)\left\{\left[1 - S_3\, G_3\right]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d\,P_c}{d\,S_3}\cdot\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v - S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\} +$$

$$+\int_\Omega \frac{k_3\,\rho_3}{\mu_3} J(S_3)\left\{\left[1 - S_3\, G_3\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\} dz - \qquad (22)$$

$$-\int_\Omega \frac{k_3\,\rho_3}{\mu_3} J(S_3)\left\{\left[1 - S_3\, G_3\right]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\} dz \geq 0, \quad \forall v,\, S_1 \in K.$$

Вариационные уравнения (20)–(22) описывают динамику многокомпонентной системы и, в совокупности с начальными (13) и граничными (14) условиями, представляют собой ММ процесса вытеснения в промежуточным «агентом».

Вывод. Таким образом, исходная задача (17)–(19), (13), (14) «распадается» на две более простые задачи (21), (22), (13), (14) и (20), (22), (13), (14), которые можно решать последовательно, что значительно облегчает численную реализацию.

Список использованной литературы:

1. Бернадинер М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. — М. : Наука, 1975. — 199 с.
2. Верлань А. Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А. Ф. Верлань, С. А. Положаенко, Н. Г. Сербов. — К. : Наук. думка, 2011. — 4 16 с.

3. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. — М. : Недра, 1982. — 406 с.
4. Кричлоу Г. Б. Современная разработка нефтяных месторождений / Г. Б. Кричлоу. — М.: Недра, 1979. — 302 с.
5. Ахметов И. М. Применение композитных систем в технологических операциях эксплуатации скважин / И. М. Ахметов, Н. М. Шерстнев. — М. : Недра, 1989. — 213 с.
6. Мелик-Асланов Л. С. Нефтеотдача при вытеснении нефти из пласта водой / Л. С. Мелик-Асланов. — Баку : Азернешр, 1989. — 108 с.
7. Вахитов Г. Г. Особенности вытеснения водой нефтей с вязкоупругими свойствами / Г. Г. Вахитов, А. Х. Мирзаджанзаде, В. М. Рыжик // Нефтяное хозяйство. — 1977. — № 4. — С. 38–41.

Research of stability of the frontal expulsing is executed for the multicomponent systems presented by filter-passing unmixed (including anomalous) liquids. In the conditions of the real applied task quality description of process of expulsing is given in the multicomponent system with an intermediate «agent». The mathematical model of class of tasks of the frontal expulsing offers for the multicomponent systems as variation inequality, providing simple numeral realization.

Key words: *multicomponent systems, frontal expulsing, «stagnant zone», maximum gradient, mathematical model, variation inequality.*

Отримано: 20.06.2014

УДК 004.6

Н. Ю. Постолатий, аспирант
О. И. Ямнюк, магистр

Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ КАК КЛАССА ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМ В ДОКРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Получены выражения для определения коэффициентов проскальзывания и расходов при фильтрации ньютоновской и неньютоновской газированных жидкостей в пористой среде в докритической области. Показана состоятельность выполненных теоретических исследований при их сравнении с результатами практических расчетов.

Ключевые слова: *ньютоновская жидкость, неньютоновская жидкость, фильтрация газированной жидкости, коэффициент проскальзывания, пластовое давление, проницаемость и пористость среды.*

Введение. Объяснение аномального увеличения расхода при фильтрации газированной жидкости (рассматриваемой как класс гетерогенных систем) в предпереходном фазовом состоянии дано в из-