

Various types of nonlinear integral dynamic models, and the approaches to the construction of Num-represented algorithms for their computer implementation.

Key words: *non-linear model, the integral equation, the degenerate kernel algorithm.*

Отримано: 28.02.2014

УДК 627.324.2/3:532.72

А. П. Власюк*, д-р техн. наук, професор,

Т. П. Цветкова**, старший викладач

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка С. Дем'янчука, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ СОЛЬОВИХ РОЗЧИНІВ У НЕНАСИЧЕНИХ ШАРУВАТИХ ҐРУНТАХ

Здійснено математичне моделювання процесу масоперенесення сольових розчинів при вологоперенесенні в шарах області неповного насичення з врахуванням осмотичних явищ в нелінійному випадку. Чисельні розв'язки відповідних крайових задач знайдено методом скінчених різниць. В результаті програмної реалізації задачі проведено ряд чисельних експериментів та зроблено їх аналіз.

Ключові слова: *математична модель, масоперенесення, вологоперенесення, неповне насичення, шаруватий ґрунт, концентрація, напір, осмос.*

Вступ. Стрімке індустріальне виробництво, розвиток меліорації, будівництво підземних споруд та комунікацій зробили важливою необхідністю дослідження процесів, що протікають в приповерхневих шарах земної кори. Особливо важливе значення вивчення даних процесів стосується сільського господарства. Оскільки встановлення напорів вологи в ґрунтах є центральною проблемою для встановлення кількості водних ресурсів в засушливих регіонах, проектування дренажних та зрошувальних систем.

Питаннями масоперенесення та вологоперенесення займалось багато вчених. Однак процес масоперенесення солей розглядався без врахування вологоперенесення [1–3].

У зв'язку з цим, в даній роботі проведемо дослідження процесів масоперенесення з врахуванням вологоперенесення та осмотичних явищ в шаруватому ґрунті.

Постановка задачі. Розглядається шаруватий ґрунт великої протяжності області неповного насичення (рис. 1).

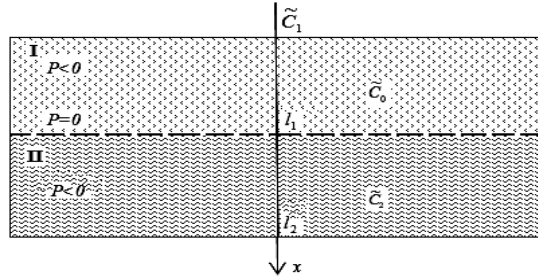


Рис. 1. Масоперенесення солей в ненасичених шаруватих ґрунтах

Дана область вологоперенесення складається з двох шарів ґрунту, різними за типами: I шар — піщаний, II шар — глинистий.

На поверхню ґрунту попадають атмосферні опади і поливи з концентрацією \tilde{C}_1 . В зв'язку з цим, на деякій глибині l_1 від поверхні землі утворюється вільна поверхня рівня ґрунтових вод (РГВ). На глибині l_2 є фронт промочування, який вважається нерухомим.

Розподіл концентрації в I шарі області неповного насичення — \tilde{C}_1 , в II шарі — \tilde{C}_2 .

Потрібно знайти поля розподілів напорів води та концентрації солей в шарах даної області водонасичення; дослідити вплив масоперенесення солей на вологоперенесення.

Математична модель задачі. Математична модель задачі масоперенесення солей при вологоперенесенні в шарі I має вигляд [6, 7]

$$\frac{\partial \left(D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right)}{\partial x} - V_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1(c_1 - C_1^*) = \sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\mu(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) - \nu_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad (2)$$

$$V_1 = -k_1(c_1, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$c_1(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad c_1(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad (4)$$

$$h_1(x, 0) = \tilde{H}_0(x), \quad h_1(0, t) = \tilde{H}_1(t). \quad (5)$$

Математична модель задачі в шарі II має вигляд

$$\frac{\partial \left(D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right)}{\partial x} - V_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} - \gamma_2(c_2 - C_2^*) = \sigma_2 \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\mu(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_2(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) - \nu_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad (7)$$

$$V_2 = -k_2(c_2, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial c_2}{\partial x}, \quad (8)$$

$$c_2(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad c_2(l_2, t) = \tilde{C}_2(t), \quad (9)$$

$$h_2(x, 0) = \tilde{H}_0(x), \quad h_2(0, t) = H_2(t), \quad h_2(l_2, t) = \tilde{H}_2(x). \quad (10)$$

На межі шарів I та II задані умови спряження для напору та концентрації наступного вигляду:

$$[h] \Big|_{x=l_1} = [c] \Big|_{x=l_1} = \left[c\tilde{\nu} - D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right] \Big|_{x=l_1} = 0. \quad (11)$$

У математичних моделях (1)–(11) використані такі позначення: $D_1(c_1)$, $D_2(c_2)$ — коефіцієнти конвективної дифузії, γ_1, γ_2 — коефіцієнти масообміну, C_1^*, C_2^* — концентрації граничного насичення сольових розчинів; σ_1, σ_2 — пористості ґрунтів; $k_1(c_1, h_1)$, $k_2(c_2, h_2)$ — коефіцієнти фільтрації; V_1, V_2 — швидкості фільтрації сольових розчинів; h_1, h_2 — напори вологи; $\nu_1(c_1), \nu_2(c_2)$ — осмотичні функції; $\mu(h)$ — вологоємність ґрунту; $[h] \Big|_{l_1} = [c] \Big|_{l_1}$ — стрибки функції відносно напорів та концентрації солей, задані на межі шарів області.

Чисельний розв'язок задачі. Розв'язок поставлених задач (1)–(11) знайдено методом скінчених різниць [4]. Розглянемо алгоритм розв'язування задачі вологоперенесення та задачі масопереносу в шаруватому ґрунті області неповного насичення.

Для знаходження розв'язку задачі вологоперенесення (2), (5) та (7), (10) використаємо неявну різницеву схему [4; 6; 7].

Неявна різницева схема для задачі вологоперенесення (2), (5) має вигляд

$$\begin{aligned} \mu_i^k \frac{H_{li}^{k+1} - H_{li}^k}{\tau} = \frac{1}{h_1} \left[a_{li+1}^k \frac{H_{li+1}^{k+1} - H_{li}^k}{h_1} - a_{li}^k \frac{H_{li}^{k+1} - H_{li-1}^{k+1}}{h_1} \right] - \\ - \frac{1}{h_1} \left(Z_{li+1}^k \cdot \frac{C_{li+1}^{k+1} - C_{li}^{k+1}}{h_1} - Z_{li}^k \cdot \frac{C_{li}^{k+1} - C_{li-1}^{k+1}}{h_1} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} a_{li}^k &= 0,5(K(H_{li}^k, C_{li}^k) + K(H_{li-1}^k, C_{li-1}^k)), \\ a_{li+1}^k &= 0,5(K(H_{li+1}^k, C_{li+1}^k) + K(H_{li}^k, C_{li}^k)), \end{aligned}$$

$$Z_{li+1}^k = 0,5 \left(v_1(C_{li+1}^k) + v_1(C_{li}^k) \right), \quad Z_{li}^k = 0,5 \left(v_1(C_{li}^k) + v_1(C_{li-1}^k) \right),$$

$$\mu_i^k = a \rho g \left(1 - \frac{2h_2}{H_{i+1}^k - H_{i-1}^k} \right).$$

Чисельний розв'язок задачі вологоперенесення знайдемо методом прогонки. Різницєва схема (12) в прогоночному вигляді має наступний вигляд:

$$a_1 H_{li-1}^{k+1} - b_1 H_{li}^{k+1} + c_1 H_{li+1}^{k+1} = -f_1, \quad (13)$$

де

$$a_1 = \frac{a_{li}^k}{h_1^2}, \quad b_1 = \frac{a_{li+1}^k}{h_1^2}, \quad c_1 = \frac{a_{li+1}^k - a_{li}^k}{h_1^2} + \frac{\mu_{li}}{\tau},$$

$$f_1 = \frac{\mu_{li}^k}{\tau} H_{li}^k + \frac{1}{h_1} \left(Z_{li+1}^k \cdot \frac{C_{li+1}^{k+1} - C_{li}^{k+1}}{h_1} - Z_{li}^k \cdot \frac{C_{li}^{k+1} - C_{li-1}^{k+1}}{h_1} \right),$$

$$i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Таким чином, згідно методу прогонки розв'язок (13) має вигляд

$$H_{li}^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 H_{li+1}^{k+1} + \beta_i^1, \quad (14)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}, \quad \beta_{i+1}^1 = \frac{a_1 \alpha_i^1 + f_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \tilde{H}_1.$$

Для знаходження чисельного розв'язку задачі перенесення солей (1), (3), (4) застосуємо монотонну різницєву схему [5]. Різницєва схема поставленої задачі має вигляд

$$\frac{1}{h_1^2} \left(\mu_{li+1}^k + \mu_{li+2}^k d_{li+1}^k + \frac{|r_{li}^k|}{h_1} + \frac{\sigma}{\tau} \right) C_{li}^{k+1} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\mu_{li+1}^k d_{li}^k}{h_1} - r_{li-}^k \right) C_{li-1}^{k+1} +$$

$$+ \frac{1}{h_1} \left(\frac{\mu_{li+2}^k d_{li+1}^k}{h_1} - r_{li+}^k \right) C_{li+1}^{k+1} + \frac{\sigma}{\tau} C_{li}^k + f_i^k. \quad (15)$$

$$\text{де } d_{li}^k = \frac{D(x_i, C_{li}^k) + D(x_{i-1}, C_{li-1}^k)}{2}, \quad d_{li+1}^k = \frac{D(x_i, C_{li+1}^k) + D(x_i, C_{li}^k)}{2},$$

$$r_{li+}^k = 0,5 \left(V(x_i, C_{li}^k) + |V(x_i, C_{li}^k)| \right) \geq 0,$$

$$r_{li-}^k = 0,5 \left(V(x_i, C_{li}^k) - |V(x_i, C_{li}^k)| \right) \leq 0.,$$

$$V(x_i, C_{li}^k) = r_{li+}^k + r_{li-}^k, \quad f_1 = -\gamma_1 (C_{li}^{k+1} - C_1^*),$$

$$\mu_{i11}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_1 |r_{li}^k|}{d_{li}^k}}, \mu_{i12}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h_1 |r_{li}^k|}{d_{li+1}^k}},$$

$$C_i^0 = C_0(ih_1), C_0^{k+1} = C_1((k+1)\tau), C_n^{k+1} = C_2((k+1)\tau).$$

Розв'язок задачі знайдемо методом прогонки. Різницєва схема (15) в прогоночному вигляді наступна:

$$a_2 C_{li-1}^{k+1} - c_2 C_{li}^{k+1} + b_2 C_{li+1}^{k+1} = -f_2, \quad (16)$$

де

$$a_2 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{d_{li}^k \mu_{i11}^k}{h_1} - r_{li-}^k \right), b_2 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{d_{li+1}^k \mu_{i12}^k}{h_1} + r_{li+}^k \right),$$

$$c_2 = \frac{1}{h_1^2} \left(d_{li}^k \mu_{i11}^k + d_{li+1}^k \mu_{i12}^k \right) + \frac{|r_{li}^k|}{h_1} + \frac{\sigma_1}{\tau}, f_2 = \frac{\gamma_1}{\tau} C_{li}^{k+1} + C_1^*.$$

Таким чином, загальний розв'язок задачі масоперенесення солей за методом прогонки знаходимо у вигляді

$$C_{li}^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{li+1}^{k+1} + \beta_{li+1}^2, \quad (17)$$

$$\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i^2 a_1}, \beta_{i+1}^2 = \frac{a_1 \beta_i - f_1}{c_1 - \alpha_i^2 a_1}, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \tilde{C}_1(t).$$

У випадку хімічного осмосу $v_1 = v_1(c)$ різницєва схема рівняння швидкості фільтрації (3), (8) має вигляд

$$V_{li}^{k+1} = -k_{li}^k \left(\frac{H_{li+1}^k - H_{li-1}^k}{2h_2} + \frac{1}{h_2} \left(Z_{li+1}^k \frac{C_{li+1}^{k+1} - C_{li}^{k+1}}{h_2} - Z_{li}^k \frac{C_{li}^{k+1} + C_{li-1}^{k+1}}{h_2} \right) \right). \quad (18)$$

де $Z_{li+1}^k = 0,5(v_1(C_{li+1}^k) + v_1(C_{li}^k))$, $Z_{li}^k = 0,5(v_1(C_{li}^k) + v_1(C_{li-1}^k))$.

Аналогічно до (12)–(18) здійснюється побудова обчислювального алгоритму знаходження числового розв'язку задачі масоперенесення сольових розчинів при вологоперенесенні в II шарі даної області.

Розв'язок задачі (11) на РГВ знайдемо методом прогонки [4, 7]. Таким чином, обчислювальний алгоритм розв'язування задачі масоперенесення солей при вологоперенесенні побудовано повністю.

Програмна реалізація та результати чисельних експериментів.

Програмну реалізацію поставленої задачі виконано в середовищі візуально-подійного, об'єктно-орієнтованого програмування Microsoft Visual Studio 2012 на платформі .NET 4.0 при наступних вхідних даних:

$$T = 360 \text{ діб}, l_1 = 10 \text{ м}, l_2 = 10 \text{ м}, \sigma_1 = 0,4, \sigma_2 = 0,2, \gamma_1 = 0,0065,$$

$$\gamma_2 = 0,00065, C^* = 350 \text{ г/літр}, \tilde{C}_1 = 10 \text{ г/літр}, \tilde{C}_2 = 10 \text{ г/літр},$$

$$H_1 = 4,4 \text{ м}, H_2 = 0,1 \text{ м},$$

$$k_1(c) = 0.0002c^6 - 0.0088c^5 + 0.162c^4 - 1.3194c^3 + 3.9229c^2 + 0.0223c + 18.187,$$

$$k_2(c) = 5.9404 \cdot 10^{-2}c^5 - 0.16703c^4 + 0.17051c^3 - 0.074311c^2 +$$

$$+ 0.010563c + 1.0053 \cdot 10^{-3}, \quad c \in [0; 1].$$

У результаті програмної реалізації обчислювального алгоритму (12)–(18) знайдено чисельні розв’язки задач вологоперенесення, вологоперенесення з масоперенесенням та задачі масоперенесення солей з врахуванням вологоперенесення в шарах I та II даної області. Також знайдено розв’язки даних задач сумісно для обох шарів в області неповного насичення.

Розв’язавши задачу вологоперенесення в шаруватому ґрунті, отримано наступні графіки розподілу напорів води (рис. 2–5).

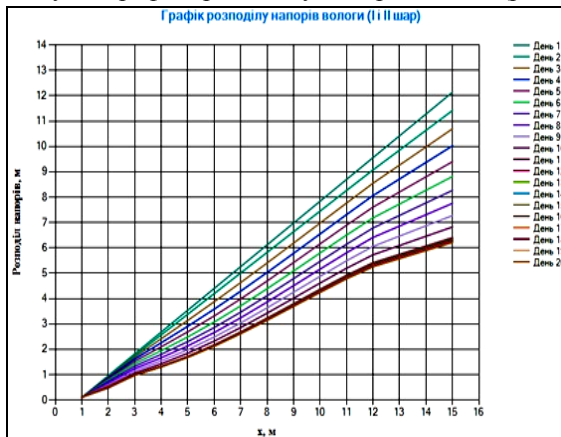


Рис. 2. Розподіл напорів води у випадку задачі чистого вологоперенесення

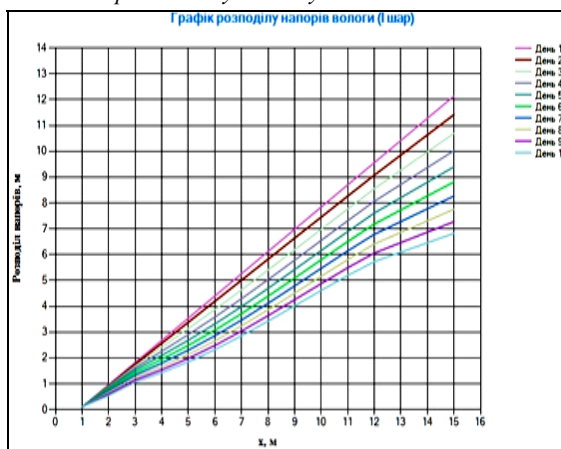


Рис. 3. Розподіл напорів води з врахуванням концентрації солей

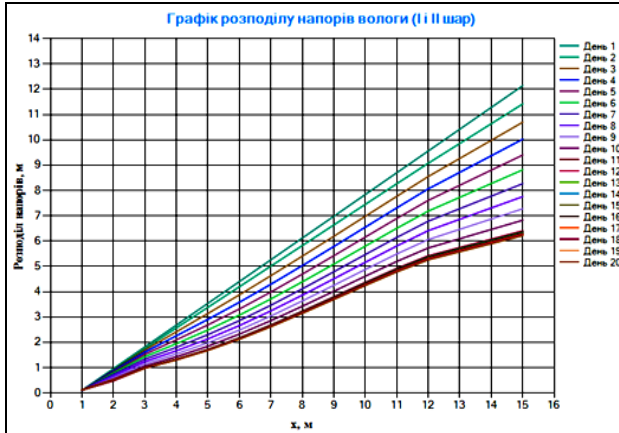


Рис. 4. Розподіл напорів води без врахування осмосу в шаруватому ґрунтовому масиві

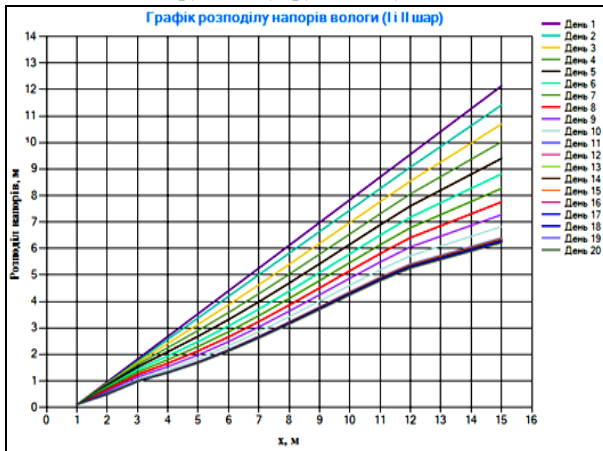


Рис. 5. Графік розподілу напорів води з врахуванням концентрації солей при наявності осмосу в шаруватому ґрунті

Графік розподілу напорів води з врахуванням концентрації солей при наявності осмотичних явищ зазнав незначних змін (рис. 5) в порівнянні з результатами розв'язку задачі без врахування осмотичних явищ (рис. 4). Встановлено, що осмотичні явища впливають на розподіл концентрації солей пропорційно до вибору осмотичної функції.

Використовуючи результати задачі вологоперенесення, розв'язана задача масоперенесення сольових розчинів в шаруватому ґрунті, в результаті чого отримані наступні графіки розподілу концентрації солей (рис. 6, 7).

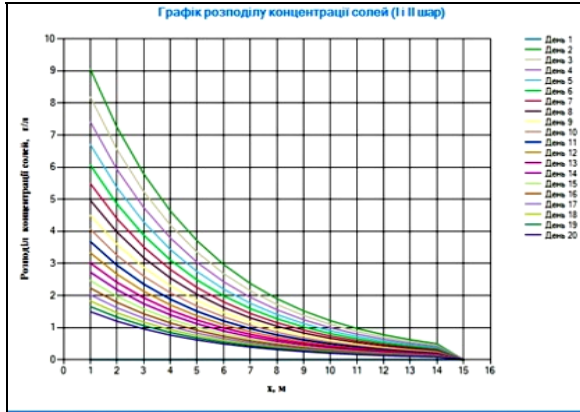


Рис. 6. Розподіл концентрації солей в шаруватому ґрунті

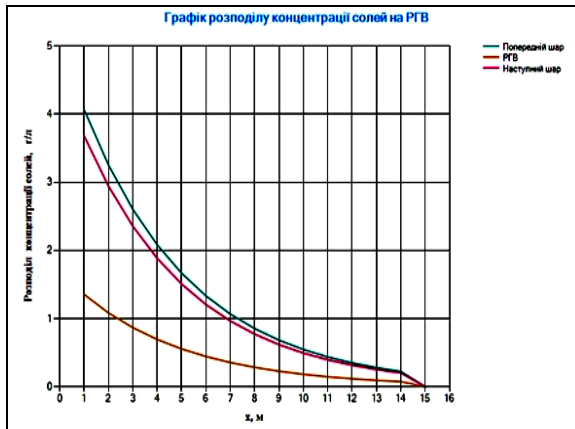


Рис. 7. Розподіл концентрації солей на РГВ авававав

Висновки. Проведено чисельне моделювання задачі масоперенесення сольових розчинів при вологоперенесенні у шаруватому ґрунті, що описується крайовою задачею (1)–(5), (11) та (6)–(10), (11).

Для крайової задачі (1)–(11) побудовано монотонну різницеву схему, знайдено її чисельний розв’язок та виконано програмну реалізацію в середовищі Visual C# 2012.

Проведено комплексне дослідження солеперенесення при вологоперенесенні в шарах області неповного насичення, за допомогою якого отримано наступні результати: розподіл напорів води зменшується з часом та глибиною по всій області шаруватого ґрунту; розподіл поширення води у піщаному шарі ґрунту відбувається рівномірно по всьому ґрунтовому масиві; поширення води у глинистому шарі відбувається у більш вузькому верхньому прошарку ґрунту, у зв’язку з невеликою по-

ристістю даного ґрунтового середовища; розподіл концентрації солей з врахуванням розподілу напорів вологи зменшується з часом та глибиною, що пояснюється вимиванням сольових розчинів з пористого середовища; встановлено, що осмотичні явища впливають на розподіл концентрації солей пропорційно до вибору коефіцієнта осмосу або осмотичної функції; розподіл концентрації солей на РГВ зменшується з глибиною пористого середовища, найменші значення розподілу концентрації солей спостерігаються на вільній поверхні.

Список використаних джерел:

1. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н. Н. Веригин, Б. С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). — М. : Наука, 1969. — С. 237–313.
2. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — С. 27–31.
3. Гусев Е. М. Проблемы теории переноса жидкости в ненасыщенных пористых средах / Е. М. Гусев // Физика почвенных вод. — М. : Наука, 1981.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — 3-е изд. — М. : Наука, 1989. — 616 с.
5. Власюк А. П. Моногонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. — 2005. — Вип. 3. — С. 188–197.
6. Власюк А. П. Математичне моделювання перенесення солей при вологоперенесенні в шаруватих ґрунтах / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Тез. І Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчисл. методів». — Рівне, 2013. — С. 46.
7. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при сумісній фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах в нелінійній одновимірній постановці / А. П. Власюк, Т. П. Цветкова // Математичне та комп. моделювання. Серія: Техн. науки : збірник наукових праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. — С. 28–42.

The mathematical model of the mass transfer during the moisture transfer in partial saturation soils layers including osmotic phenomena is formulated. Numerical solutions of respective boundary problems are obtained by means of finite differences. Using proper software the numerical experiments and their analysis are performed.

Key words: *mathematical model, mass transfer, moisture transfer, partial saturation soils, layered soils, concentration, pressure, osmosis.*

Отримано: 20.03.2014