

- Н. А. Рогельберг, Э. Н. Пигидина, Г. Н. Покровская и др. // Сб. исследование сплавов для термопар. Труды института Гипроцветметобработка. – М. : Metallurgia, 1969. — Т. III.
35. Павлов Б.П. Термоэлектрическая неоднородность электродов термопар / Б.П. Павлов – Москва: Изд-во стандартов, 1979. – 109 с.
36. Назаренко О. М. Основы эконометрики : підбручник / О.М. Назаренко. — 2-ге вид., перероб. – К. : Центр навчальної літератури, 2005. — 392 с.
37. Грубер Й. Эконометрия / Й. Грубер. — К. : Астарта, 1996. — Т. 1. Введение в эконометрию. — 397 с.

Problems of modeling of consequences of degradation processes in thermocouples' electrodes are considered in this paper. Such degradation leads to time drift of conversion characteristic and inhomogeneity error caused by long term operation. The paper shows that polynomial regression coefficients' estimations obtained using the least squares method for models (LSM) without a free member are biased. Polynomial regression coefficients' estimations for models with a free member have all properties of the LSM-estimations, but they are senseless from physical point of view.

Key words: *least squares method, least squares method estimations of the model coefficients, thermocouples, time drift of conversion characteristic, inhomogeneity error.*

Отримано: 12.04.2013

УДК 536.21

В. А. Иванюк*, канд. техн. наук,

Н. Л. Костьян**, старший преподаватель

А. И. Махович*, аспирант

*Каменец-Подольский национальный университет

имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский

** Киевский национальный университет технологий и дизайну, г. Киев

СПОСОБЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИЕМНИКА ТЕПЛОвого ПОТОКА

Работа посвящена получению математических моделей приемников теплового потока в форме передаточных функций. Рассматриваются аналитический метод, метод на основе дифференциально-разностной модели и метод идентификации передаточной функции на основе преобразования Лапласа-Карсона.

Ключевые слова: *математическая модель приемника теплового потока, передаточная функция, интегральные преобразования.*

Измерение плотности потоков теплового излучения имеет место во многих экспериментальных исследованиях и технологических процессах. При разработке методов теплотри усложняющим обстоятельством является разнообразие приемников теплового потока по типам и

разновидностям конструкций тепловых и измерительных схем и, что весьма важно, по виду математических моделей теплопереноса. Математические модели должны адекватно описывать процессы в приемниках с учетом всех значимых особенностей: распределённость параметров; наличие элементов из разнородных материалов (армирующих и защитных слоев, контактных тепловых сопротивлений, воздушных зазоров и др.); зависимость материалов от температуры и другие нелинейности; различные граничные условия на тыльной поверхности приемника и т.д. Модель должна также обладать приемлемой точностью и вычислительной эффективностью. Кроме того, желательна общность, как вида самих математических моделей, так и их программного обеспечения по отношению к различным видам приемников теплового потока [2—4, 7, 9].

При решении задач построения математических моделей не в полной мере формализованы и решены задачи построения моделей в форме передаточных функций, являющиеся основой применения системного подхода при исследовании сложных объектов и эффективными в практических инженерных исследованиях.

В связи с этим рассмотрим возможности некоторых подходов к построению передаточных функций приемников теплового потока.

1. Аналитический метод получения передаточной функции. Рассмотрим процесс нахождения передаточных функций объектов с распределенными параметрами на примере однослойной бесконечной пластины при отсутствии внутренних источников тепла. Уравнение в частных производных для процесса распространения тепла в данном объекте имеет вид [4]

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Граничными условиями задается распределение плотности теплового потока на поверхности тела как функция координаты и времени:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = q_0(\tau) = 0, \quad \lambda \left. \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta} = q_\delta(\tau). \quad (2)$$

Начальные условия считаются нулевыми. В модели задаются следующие параметры: T — температура, τ — временная переменная, x — пространственная переменная, $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, c — теплоёмкость, λ — теплопроводность, ρ — плотность, δ — толщина приемника, q — тепловой поток.

Применяя к (1) преобразование Лапласа и учитывая, что после перехода в пространство изображений остается только частная производная по пространственной переменной x , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a \frac{d^2 T(x, p)}{dx^2} = pT(x, p). \quad (3)$$

В этом уравнении переменная p играет роль параметра, от которого зависит решение $T(x, p)$.

Решение уравнения (3) ищем с помощью характеристического уравнения $a\lambda^2 = p$, откуда $\lambda = \pm\sqrt{p/a}$. Тогда общее решение (3) имеет вид

$$T(x, p) = C_1 e^{\sqrt{p/a}x} + C_2 e^{-\sqrt{p/a}x}. \quad (4)$$

Подставляем выражение (4) в граничные условия (2), получим

$$\begin{cases} \left. \sqrt{p/a} \left(C_1 e^{\sqrt{p/a}x} - C_2 e^{-\sqrt{p/a}x} \right) \right|_{x=\delta} = \frac{1}{\lambda} q_\delta(p); \\ \left. \sqrt{p/a} \left(C_1 e^{\sqrt{p/a}x} - C_2 e^{-\sqrt{p/a}x} \right) \right|_{x=0} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решая систему (5), определяем коэффициенты C_1 и C_2 :

$$C_{1,2} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{p/a}} q_\delta(p) \frac{1}{2sh\sqrt{p/a}\delta}. \quad (6)$$

Тогда из (4) находим выражение для передаточной функции пластины:

$$\frac{T(x, p)}{q_\delta(p)} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{p/a}} \frac{ch\sqrt{p/a}x}{sh\sqrt{p/a}\delta}. \quad (7)$$

Согласно (7) передаточные функции при $x = 0$ и $x = \delta$ имеют вид:

$$W_0(p) = \frac{T(0, p)}{q_\delta(p)} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{p/a}} \frac{ch\sqrt{p/a} \cdot 0}{sh\sqrt{p/a}\delta} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{p/a}} \frac{1}{sh\sqrt{p/a}\delta}, \quad (8)$$

$$W_\delta(p) = \frac{T(\delta, p)}{q_\delta(p)} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{p/a}} \frac{ch\sqrt{p/a}\delta}{sh\sqrt{p/a}\delta} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{p/a}} cth\sqrt{p/a}\delta. \quad (9)$$

2. *Передаточная функция на основе дифференциально-разностной модели.* Рассмотрим еще один подход к построению передаточной функции приемника теплового потока. Разобьем приемник теплового потока на n элементарных участков-блоков размером Δ . Средние температуры этих блоков T_1, T_2, \dots, T_n , отнесенные к их центрам, составляют вектор состояния $T(\tau) = [T_i]_{i=1}^n$. При этом размеры граничных блоков установим равными $\Delta/2$, а их средние температуры T_1, T_n отнесем к торцевым поверхностям. Для каждого блока составим уравнение теплового балан-

са между изменением его теплосодержания и потоками тепла от соседних блоков, а для двух граничных блоков — и от внешней среды.

В случае постоянства теплофизических характеристик материала ($\lambda = \text{const}$, $c = \text{const}$, $\rho = \text{const}$) строится дифференциально-разностная модель соответственно с рис. 1, где частные производные по пространственной переменной заменяются разностными соотношениями (принимаются граничные условия теплообмена 2-го рода (2)) [7]. Тогда уравнения (1)—(2) принимают вид:

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = bT_{i-1} - 2bT_i + bT_{i+1} \quad (i = 2, n-1), \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = 4bT_2 - 4bT_1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \tau} = 4bT_{n-1} - 4bT_n + 2dq, \quad (12)$$

где $b = \frac{a}{\Delta^2}$, $d = \frac{1}{c\rho\Delta}$. В результате получено n уравнений: $(n - 2)$ уравнений (10) и уравнения (11) и (12).

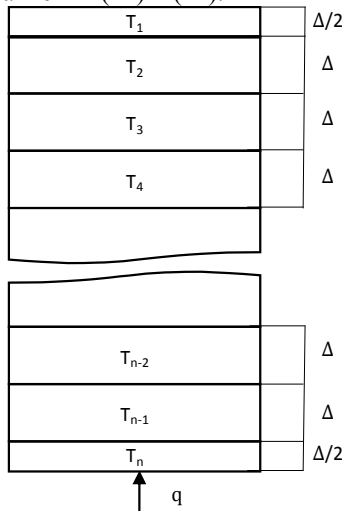


Рис. 1. Тепловая схема дифференциально-разностной модели

Поскольку в качестве модели приемника теплового потока (1)—(2) используется дифференциально-разностные уравнения в виде системы (10)—(12) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то передаточные функции измерительных каналов приемника теплового потока $W(p)$ приобретают классическую форму в виде соотношения полиномов от комплексного параметра p [7]:

$$W(p) = \frac{\beta_1 p^{n-1} + \beta_2 p^{n-2} + \dots + \beta_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \alpha_2 p^{n-2} + \dots + \alpha_n}, \quad (13)$$

где порядок полинома числителя на единицу меньше порядка полинома знаменателя.

В качестве иллюстрации приведем передаточную функцию для однородного градиентного приемника теплового потока[7]:

$$W(p) = \frac{0,00051p^{10} + 0,15p^9 + 20p^8 + 1400p^7 + 6,2 \cdot 10^4 p^6 + 1,7 \cdot 10^6 p^5 + 2,7 \cdot 10^7 p^4 + 2,5 \cdot 10^8 p^3 + 1,2 \cdot 10^9 p^2 + 2,2 \cdot 10^9 p + 0,029}{p^{11} + 330p^{10} + 4,8 \cdot 10^4 p^9 + 3,9 \cdot 10^6 p^8 + 1,9 \cdot 10^8 p^7 + 6,1 \cdot 10^9 p^6 + 1,2 \cdot 10^{11} p^5 + 1,4 \cdot 10^{12} p^4 + 9,5 \cdot 10^{12} p^3 + 2,9 \cdot 10^{13} p^2 + 2,6 \cdot 10^{13} p + 0,012}$$

3. *Аппроксимация передаточных функций.* Аналитический метод (п. 1) получения модели приемника теплового потока приводит, как

правило, к сложным передаточным функциям $R(x_1, x_2; p) = \frac{Y(x_2, p)}{F(x_1, p)}$,

где $Y(x_2, p)$ и $F(x_1, p)$ — преобразования Лапласа по времени выходного сигнала и входного воздействия.

Типичными примерами сложных передаточных функций являются иррациональные и трансцендентные зависимости, в частности, e^{-p} , $ch(p)$, $sh(p)$, $th(p)$, $cth(p)$, \sqrt{p} , $e^{-\sqrt{p}}$ и др. [5]. Для компьютерного воспроизведения этих моделей при решении практических задач необходимо предварительно осуществить аппроксимационное преобразование этих выражений.

В современной математике приближенное представление функций обычно ищется в виде многочленов от независимой переменной. Между тем, дробно-рациональные приближения успешно заменяют эту функцию в тех областях изменения аргумента, где разложение функции в степенной ряд не обеспечивает сходимости к исходной функции и где, соответственно, приближение в виде многочленов недопустимо. Вместе с тем, при использовании дробно-рациональных приближений нужно вычислять высокие степени аргументов. Для многих практических задач применение дробно-рациональных приближений значительно упрощает расчетные формулы [1].

При выборе методов приближения необходимо учитывать скорость сходимости рядов, информативность параметров полученных моделей и т.п. Одним из наиболее эффективных методов аппроксимации передаточных функций является метод аппроксимации с помощью цепных дробей [8].

При построении приближенных моделей динамических систем с распределенными параметрами, описываемых сложными передаточными функциями $W(p)$ иррационального и трансцендентного типа, достаточно эффективным является следующий алгоритм построения цепно-дробных аппроксимационных моделей [1].

1. Выполнить замену переменной p выражением $p + a$ (если точка 0 есть особенной точкой $W(p)$).
2. Преобразовать функцию $W(p)$ в степенной ряд $W(p) = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \dots$
3. Аппроксимировать $W(p)$ конечным степенным рядом.
4. Преобразовать конечный степенной ряд в цепную дробь.
5. По коэффициентам цепной дроби построить подходящую дробь, что и будет дробно-рациональной передаточной функцией.
6. Выполнить обратную замену переменной p выражением $p - a$ (если выполнялся пункт 1).

Дробно-рациональная аппроксимационная модель может иметь различный вид в зависимости от использованного алгоритма преобразования степенного ряда в цепную дробь. Для преобразования конечного степенного ряда в цепную дробь можно воспользоваться целым рядом алгоритмов [1].

Для достижения требуемой точности аппроксимации и минимальной сложности аппроксимирующего выражения максимальная степень n дробно-рациональной передаточной функции $\tilde{W}(p)$ подбирается такой, чтобы интегральная погрешность амплитудно-частотной или фазо-частотной характеристики не превышала заданного значения:

$$\max_n \left(\int_0^{\omega_m} |A(\omega) - \tilde{A}_n(\omega)| d\omega \right) \leq \varepsilon_A, \quad \max_n \left(\int_0^{\omega_m} |\psi(\omega) - \tilde{\psi}_n(\omega)| d\omega \right) \leq \varepsilon_\psi,$$

где ω_m — максимальная частота, $\varepsilon_A, \varepsilon_\psi$ — заданные ошибки амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик.

Аппроксимационные преобразования необходимы и при применении метода по п. 2. Получение передаточных функций в этом случае является достаточно сложной вычислительной процедурой, особенно при значительном числе n блоков дифференциально-разностной схемы приемника теплового потока. Однако эта задача без затруднений решается в численном виде при использовании современных программных комплексов, в частности MATLAB [7].

Особенностью полиномов числителя и знаменателя передаточных функций (13) для большинства приемников теплового потока является высокий порядок, что вызвано стремлением охватить из-

лишний для реальных приемников диапазон высоких частот входных воздействий, но существенно усложняет дальнейшее использование передаточных функций. В связи с этим целесообразно попытаться уменьшить порядок указанных полиномов. Для упрощения системы, заданной дробно-рациональной передаточной функцией высокого порядка (13), можно воспользоваться возможностями аппарата цепных дробей [1]. Алгоритм преобразования заключается в следующем.

1. Разместить полиномы числителя и знаменателя передаточной функции по возрастанию степени оператора p .
2. Преобразовать передаточную функцию в непрерывную дробь.
3. Выполнить усечения непрерывной дроби.
4. Перейти от непрерывной дроби к отношению двух полиномов; при этом будет получена передаточная функция более низкого порядка, чем исходная.

Для достижения требуемой точности аппроксимации и минимальной сложности аппроксимирующего выражения максимальная степень дробно-рациональной передаточной функции $\tilde{W}(p)$ подбирается такой, чтобы выполнялось условие:

$$\max_n \left(\int_0^t |f(t) - \tilde{f}_n(t)| dt \right) \leq \varepsilon,$$

где t — время моделирования, ε — заданная максимальная погрешность.

4. *Идентификация передаточной функции на основе преобразования Лапласа-Карсона.* Не для всех реальных приемников параметры передаточной функции априорно известны. Поэтому определение этих параметров экспериментальным путем, т.е. путем параметрической идентификации, является одной из важных задач теории автоматического управления.

Для получения передаточной функции

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m p^m}{\sum_{n=0}^N a_n p^n}, \quad (14)$$

на вход приемника подается единичный ступенчатый сигнал. Переходная характеристика $G(\tau)$, полученная при этом, аппроксимируется посредством выражения

$$G(\tau) \approx \tilde{G}(\tau) = d_0 + e^{-v\tau} \sum_{i=1}^n d_i \tau^{i-1}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (15)$$

где d_0, d_1, ν — постоянные коэффициенты. Выражение (15) позволяет просто определить передаточную функцию (14) исследуемого приемника на основе преобразования Лапласа-Карсона [2].

На основе данного подхода проведен эксперимент во временной области [2]. Используя выражение (15) при $n = 3$ построена передаточная функция

$$K(p) = 0,1119 + \frac{1,505}{6,85p + 1} - \frac{1,067}{(6,85p + 1)^2} + \frac{0,45}{(6,85p + 1)^3}$$

или

$$K(p) = \frac{35,95p^3 + 86,37p^2 + 15,61p + 1}{321,32p^3 + 140,74p^2 + 20,55p + 1}. \quad (16)$$

При $n = 5$ получаем передаточную функцию

$$K(p) = 0,109 + \frac{1,67}{5,227p + 1} - \frac{2,227}{(5,227p + 1)^2} + \frac{2,875}{(5,227p + 1)^3} - \frac{2,041}{(5,227p + 1)^4} + \frac{0,66}{(5,227p + 1)^5},$$

или

$$K(p) = \frac{427,2p^5 + 1655,3p^4 + 791,9p^3 + 199,7p^2 + 22p + 1}{3901,7p^5 + 3732p^4 + 1428p^3 + 273,2p^2 + 26p + 1}. \quad (17)$$

В табл. 1 приведены результаты аппроксимации переходной характеристики приемника передаточными функциями (16)—(17).

Таблица 1

Результаты аппроксимации переходной характеристики приемника

№ п/п	τ	$G(\tau)$	$\tilde{G}(\tau)$ $n = 3$	$\tilde{G}(\tau)$ $n = 5$	№ п/п	τ	$G(\tau)$	$\tilde{G}(\tau)$ $n = 3$	$\tilde{G}(\tau)$ $n = 5$
1	0,00	0,00	0,111	0,062	15	1,50	0,41	0,387	0,411
2	0,01	0,06	0,133	0,093	16	1,70	0,44	0,416	0,443
3	0,20	0,13	0,154	0,123	17	1,90	0,46	0,444	0,458
4	0,30	0,18	0,175	0,152	18	2,20	0,50	0,483	0,510
5	0,40	0,19	0,195	0,179	19	2,60	0,54	0,531	0,555
6	0,50	0,23	0,215	0,205	20	3,00	0,57	0,574	0,592
7	0,60	0,26	0,234	0,230	21	3,40	0,61	0,613	0,624
8	0,70	0,28	0,253	0,254	22	3,80	0,63	0,648	0,652
9	0,80	0,29	0,271	0,277	23	4,20	0,66	0,679	0,676
10	0,90	0,32	0,289	0,299	24	5,60	0,73	0,765	0,738
11	1,00	0,34	0,306	0,320	25	8,60	0,83	0,868	0,820
12	1,10	0,35	0,323	0,340	26	13,6	0,91	0,925	0,903
13	1,20	0,36	0,340	0,359	27	19,6	0,94	0,946	0,952
14	1,30	0,38	0,356	0,377	28	39,6	0,98	0,985	0,985

Выводы. Изложенные методы позволяют получить необходимые передаточные функции приемников тепловых потоков. Применение аналитического метода (п. 1) вместе с аппроксимацией цепными дробями (п. 3), наиболее приемлемо, однако при этом могут возникнуть трудности в математических расчетах в случае достаточно сложной структуры приемника теплового потока. В таком случае более предпочтителен метод, основанный на дифференциально-разностной модели (п. 2) с использованием аппроксимации цепными дробями (п. 3). Вместе с тем, использование метода идентификации передаточной функции (п. 4) можно считать наиболее универсальным подходом, который может применяться в случае неизвестных характеристик приемника теплового потока.

Список использованной литературы:

1. Верлань А. Ф. Комп'ютерне моделювання в задачах динаміки електромеханічних систем : монографія / А. Ф. Верлань, В. А. Федорчук, В. А. Іванюк. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — 204 с.
2. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусаров, А. А. Игнатченко, Н. А. Максимович. — К. : Наук. думка, 1993. — 208 с.
3. Геращенко О. А. Основы теплотметрии / О. А. Геращенко. — К. : Наук. думка, 1971. — 192 с.
4. Жученко А. И. Динамика объектов с распределенными параметрами : учебное пособие / А. И. Жученко, Н. А. Кубрак, И. М. Голинко. — К. : ЕКМО, 2005. — 121 с.
5. Іванюк В. А. Інтегральні моделі ірраціональних та трансцендентних ланок / В. А. Іванюк, В. А. Тихоход, С. Ю. Протасов // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — 224 с.
6. Киселев Н. В. Электроприводы с распределенными параметрами / Н. В. Киселев, В. Н. Мядзель, Л. Н. Рассудов. — Л. : Судостроение, 1985. — 220 с.
7. Пилипенко Н. В. Методы и приборы нестационарной теплотметрии на основе решения обратных задач теплопроводности / Н. В. Пилипенко. — СПб. : СПбГУ ИТМО, 2011. — 180 с.
8. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике / В. Я. Скоробогатько. — М. : Наука, 1983. — 312 с.
9. Шевяков А. А. Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами / А. А. Шевяков, Р. В. Яковлева. — М. : Энергоатомиздат, 1986. — 208 с.

The work is devoted to obtaining mathematical models of the receivers of the heat flux in the form of transfer functions. The analytical method, based on the differential of the difference pattern, the method of identification of the transfer function of the Laplace-Carson transform.

Key words: receiver heat flow, the transfer function, integral transform.

Отримано: 16.04.2013