УДК 517.946

О. М. Болдовская, А. Ф. Тедеев

Оценки максимума решения задачи Неймана для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях, сужающихся на бесконечности. Случай быстрой диффузии

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

Досліджено початково-крайову задачу Неймана для рівняння

$$u_t = \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du),$$

де $0 < m + \lambda \leqslant 2$*. Встановлено двосторонні оцінки* L_∞ *норми розв'язку задачі, що залежать від геометрії необмеженої області (з некомпактною границею), в якій розглядається задача.*

Рассматривается следующая вторая смешанная задача:

$$u_t - \operatorname{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) = 0 \qquad \text{в} \qquad Q_T = \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

$$u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial\Omega \times (0, T), \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, — неограниченная область, $\operatorname{mes}_N \Omega = |\Omega|_N = \infty$; $\partial\Omega$-некомпактная достаточно гладкая граница Ω; $\overrightarrow{n}$ — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega \times (0, T)$, $T > 0$. Предполагаем, что $m + \lambda - 2 < 0$, $\lambda > 0$, $m + \lambda - 1 > \max\{0{,}1 - (\lambda + 1)/N\}$; $u_0(x) \geqslant 0$ п. в. $x \in \Omega$ и $u_0 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Известно [1], что при $m + \lambda - 2 < 0$ (1) относится к уравнениям, описывающим процесс с быстрой диффузией.

Опишем класс областей, в котором рассматривается задача (1)–(3). Определим функцию

$$l(v, \rho) = \inf\{|\partial Q \textstyle\bigcap \Omega_\rho|_{N-1} \colon Q \subset \Omega_\rho,\ |Q|_N = v,\ \partial Q \text{ — липшицева}\}$$

для всех $\rho > 0$ и $0 < v \leqslant |\Omega_\rho|_N/2$, где $\Omega_\rho = \{x \in \Omega \colon |x| < \rho\}$, предполагаем что Ω_ρ непусто.

Пусть $V(\rho) = |\Omega_\rho|_N$ такое, что для всех $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$\nu_0(\delta)V(\rho) \leqslant V(\delta\rho) \leqslant \nu_1(\delta)V(\rho) \qquad \text{для всех} \qquad \rho \geqslant \max\left(1, \frac{1}{\delta}\right), \tag{4}$$

где ν_0, ν_1 — две заданные неубывающие положительные функции такие, что $\nu_1(\delta) < 1$ для $\delta < 1$. Также требуем, чтобы

$$l(v, \rho) \geqslant c_0 \min\left(v^{(N-1)/N}, \frac{V(\rho)}{\rho}\right) := g(v, \rho), \tag{5}$$

для всех $\rho \geqslant 1$, $0 < v \leqslant V(\rho)/2$, и константа $c_0 > 0$, не зависящая от v. И

$$\rho \mapsto \frac{\rho^{1-\beta}}{V(\rho)} \qquad \text{не убывает для} \qquad \rho \geqslant 1, \tag{6}$$

$\beta > \dfrac{2-m-\lambda}{\lambda+1}$.

Определение 1. Будем говорить, что неограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, принадлежит классу $\mathbf{N_0}(g)$, если ее граница $\partial\Omega$ локально непрерывна по Липшицу и выполняются (4)–(6).

Отметим, что (5) — условие типа регулярности области, первая компонента, $v^{(N-1)/N}$, при $v < 1$ появляется благодаря классическому изопериметрическому неравенству в ограниченных областях с липшицевой границей, вторая компонента, $V(\rho)/\rho$, имеет смысл площади $\Omega \bigcap \partial\Omega_\rho$ при достаточно больших ρ. Из (4) следует, что $|\Omega|_N = \infty$. Класс $\mathbf{N_0}(g)$ описывает "сужающиеся на бесконечности" области, т. е. [2] такие, что $\lim\limits_{\rho\to\infty} V(\rho)/\rho = 0$; для этих областей $\lim\limits_{v\to\infty} l(v,\rho) = 0$. Классы областей типа $\mathbf{N_0}(g)$ были введены в работах [3, 4] (см. также близкие к ним в работах [2, 5, 6].)

Типичным представителем класса $\mathbf{N_0}(g)$ является область [4]

$$\Omega^\epsilon = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : |x'| < x_N^{-\epsilon},\ x_N > d\} \subset \mathbb{R}^N, \qquad d > 0,$$

для $0 < \epsilon < 1/(N-1)$. Здесь $V(\rho) = c\rho^{1-\epsilon(N-1)}$, $\rho = x_N > 2d$. Очевидно, что $|\Omega^\epsilon|_N = \infty$ и для всех $v > 0$ $l(v,\infty) = 0$. Различные примеры можно найти в работах [3, 4].

Наша цель — исследовать поведение решения задачи (1)–(3) в Q_T в зависимости от геометрии области Ω, а именно получить точные оценки сверху и снизу максимума решения $u(x,t)$.

В работах [7, 8], в которых изучалась вторая смешанная задача для линейных дивергентных равномерно параболических уравнений с измеримыми коэффициентами, для "не сужающихся на бесконечности" областей, удовлетворяющих глобальному условию изопериметрического типа, получены двусторонние оценки

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty,\Omega} \sim \|u_0\|_{L_1,\Omega} V(\sqrt{t})^{-1} \tag{7}$$

для всех $t > 1$. Для получения этих оценок требовалась только конечность массы начальной функции. В работах [2, 5], в которых рассматривались "сужающиеся на бесконечности" области, точная оценка $\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty,\Omega}$ дается также (7), но помимо конечности $\|u_0\|_{L_1,\Omega}$ требуется дополнительно предположить конечность момента начальной функции, т. е. $u_0(x)|x| \in$ $\in L_1(\Omega)$. Касаясь исследования начально-краевых задач в областях с некомпактными границами, отметим также работы [9] (случай третьей краевой задачи) и [10] (случай задачи Дирихле). В работе [11] получены оценки типа (7) для решения задачи (1)–(3) при $m = 1$ в случае "не сужающихся" областей. Оказалось, что геометрической характеристикой, дающей точную оценку $\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty,\Omega}$, также является $V(\rho)$. При этом имеет место оценка

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_\infty,\Omega} \sim \|u_0\|_{L_1,\Omega} V(R(t))^{-1}, \tag{8}$$

где $R(t)$ — обратная к $s^{\lambda+1}V(s)^{\lambda-1}$ функция. В работах [3, 4, 12] для решения задачи (1)–(3) в случае медленной диффузии, т. е. при $m + \lambda - 2 > 0$, в узких и широких областях были получены аналогичные (8) оценки. Данная работа продолжает исследования, начатые в работах [4, 12].

Определение 2. Будем говорить, что $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(3), если $u(x,t) \geqslant 0$ такое, что

$$u(x,t) \in C(0,T; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) \bigcap L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times (0,T)), \qquad u^{m-1}|Du|^{\lambda+1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times (0,T))$$

и, что

$$\int_0^T \int_\Omega (-u\xi_t + u^{m-1}|Du|^{\lambda-1} DuD\xi)\, dxdt = -\int_\Omega u_0(x)\xi(x,0)\, dx,$$

$\forall \xi \in C_1^0(\mathbb{R}^N \times [0,T])$.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть* $\Omega \in \mathbf{N_0}(g)$, $u_0 \geqslant 0$, $u_0 \in L_1(\Omega)$, $\mu(0) < \infty$. *Тогда задача* (1)–(3) *имеет глобальное решение, определенное для всех* $t > 0$ *и удовлетворяющее оценкам*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \leqslant \gamma \max\Bigg(t^{-\frac{N}{k}} \|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{k}}, t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}} \mu(0)^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}, t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}} \|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}} \times$$
$$\times \left[\frac{P(\tau)}{V(P(\tau))}\right]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\Bigg) \tag{9}$$

для всех $t > 0$, *где* $k = N(m+\lambda-2)+\lambda+1$. *Здесь* $P(\tau) \geqslant 1$ $(\tau = t\|u_0\|_{1,\Omega}^{m+\lambda-2})$ *определяется как наибольшее решение* ρ *такое, что*

$$\rho \left[\frac{\rho}{V(\rho)}\right]^{-\frac{m+\lambda-2}{2\lambda+m-1}} = \max\left(\tau^{\frac{1}{2\lambda+m-1}}, 1\right). \tag{10}$$

Также для достаточно больших t *имеет место двусторонняя оценка*

$$\gamma_1 \frac{\|u_0\|_{1,\Omega}}{V(P(\tau))} \leqslant \|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \leqslant \gamma_2 \frac{\|u_0\|_{1,\Omega}}{V(P(\tau))}. \tag{11}$$

Основным инструментом доказательства являются комбинации локальных подходов работ [3, 4, 13].

Всюду в дальнейшем через γ, γ_i будем обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от известных параметров задачи.

Замечание 1. Отметим, что для достаточно больших t третья компонента в (9) является наибольшей. Следовательно, из (10) получаем

$$t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}} \|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}} \left[\frac{P(\tau)}{V(P(\tau))}\right]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}} = \frac{\|u_0\|_{1,\Omega}}{V(P(\tau))}.$$

Кроме того, очевидно, что $P(\tau)$ — обратная к $V(R)^{m+\lambda-2}R^{\lambda+1}$ функция. Первая компонента в функции максимума оценки (9) будет наибольшей при $t \to 0$, это ожидаемый результат, так как такая оценка имеет место для задачи Коши и имеет локальный характер.

Замечание 2. Результаты, изложенные в работе, остаются справедливыми и для случая $m+\lambda-2=0$, а следовательно, и в линейном случае ($m=1$, $\lambda=1$), при этом доказательство проводится аналогично. (В последнем случае наши результаты следуют из работ [2, 5].)

Не уменьшая общности, положим

$$\frac{\rho}{V(\rho)}=1, \qquad 0\leqslant\rho\leqslant 1.$$

Одними из ключевых моментов в доказательстве теоремы являются нижеприведенные утверждения.

Локальная оценка максимума решения. Для простоты будем полагать, что решение задачи (1)–(3) достаточно гладкое.

Предложение 1. *Пусть u — ограниченное решение задачи* (1)–(3) *в* $\Omega_{2\rho}\times(0,t)$. *Тогда для любого $\theta>0$ справедлива оценка*

$$\|u\|_{\infty,\Omega_\rho\times(t/2,t)}\leqslant$$
$$\leqslant\gamma\max\left(t^{-\frac{N}{k_\theta}}G_\theta(t,\rho(1+\sigma))^{\frac{\lambda+1}{k_\theta}}, t^{-\frac{1}{H_\theta}}G_\theta(t,\rho(1+\sigma))^{\frac{\lambda+1}{H_\theta}}\left[\frac{\rho}{V(\rho)}\right]^{\frac{\lambda+1}{H_\theta}}, \left[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\right]^{\frac{1}{2-m-\lambda}}\right),$$

где

$$G_\theta(t,\rho)=\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\Omega_\rho}u(x,\tau)^\theta dx, \qquad t>0, \qquad \rho\geqslant 1,$$

$$0<\sigma<1, \qquad k_\theta=N(m+\lambda-2)+\theta(\lambda+1), \qquad H_\theta=m+\lambda-2+\theta(\lambda+1).$$

Замечание 3. Утверждение предложения остается справедливым, если формально заменить Ω_ρ на $A_\rho=\Omega_{2\rho}\setminus\Omega_\rho$, а $\Omega_{\rho(1+\sigma)}$ — на $\widetilde{A}_\rho=\Omega_{4\rho}\setminus\Omega_{\rho/2}$.

Локальная оценка L_1 нормы решения.

Предложение 2. *Пусть $u_0\geqslant 0$, $u_0\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда*

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\Omega_\rho}u(x,\tau)\,dx\leqslant\gamma\left(\left[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\right]^{\frac{1}{2-m-\lambda}}|\Omega_{2\rho}|_N+\int\limits_{\Omega_{2\rho}}u_0dx\right), \qquad t>0, \qquad \rho\geqslant 1.$$

Оценка момента. Для $t\geqslant 0$ определим

$$\mu(t)=\int\limits_{\Omega}u(x,t)\frac{|x|}{V(|x|)}dx.$$

Предложение 3. *Имеет место следующая оценка:*

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho}u(x,t)\frac{|x|}{V(|x|)}dx\leqslant\gamma\mu(0)+\gamma\left(\frac{t}{\rho^{2\lambda+m-1}}\right)^{\frac{1}{2-m-\lambda}}. \tag{12}$$

Набросок доказательства теоремы. Будем искать решение нашей задачи как предел последовательности решений аппроксимирующих задач

$$u_{nt}-\mathrm{div}(u_n^{m-1}|Du_n|^{\lambda-1}Du_n)=0 \qquad \text{в} \qquad \Omega_n\times(0,\infty),$$

$$u_n(x,t)=0 \qquad \text{на} \qquad (\partial\Omega_n \bigcap \Omega)\times(0,\infty),$$
$$u_n^{m-1}|Du_n|^{\lambda-1}\frac{\partial u_n}{\partial \overrightarrow{n}}=0 \qquad \text{на} \qquad (\partial\Omega_n \bigcap \partial\Omega)\times(0,\infty),$$
$$u_n(x,0)=u_{0n}(x)\geqslant 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega_n.$$

Здесь $u_n \geqslant 0$, $n\geqslant 1$; $u_{0n}\in C_\infty(\overline{\Omega}_n)$, u_{0n} сходится к u_0 в $L_1(\Omega)$; и можно предполагать

$$\|u_{0n}\|_{1,\Omega}\leqslant \gamma\|u_0\|_{1,\Omega}, \qquad \int\limits_\Omega \frac{|x|}{V(|x|)}u_{0n}(x)\,dx\leqslant \gamma\mu(0).$$

Заметим, что мы всегда понимаем u_n определенными на Ω, полагая $u_n\equiv 0$ вне Ω_n.

Благодаря стандартным аргументам компактности и гладкости начальных данных из [14] следует, что вышеописанная задача глобально разрешима. В дальнейшем для удобства обозначим $u_n = u$.

Нам понадобится очевидная оценка

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,\Omega}\leqslant \|u_0\|_{1,\Omega}, \qquad t>0. \tag{13}$$

Воспользуемся результатом предложения 1 с $\theta=1$, учитывая (13), получаем

$$\|u(x,\tau)\|_{\infty,\Omega_\rho}\leqslant$$
$$\leqslant \gamma\max\left(\tau^{-\frac{N}{k}}\|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{k}}, \tau^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}}\|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\left[\frac{\rho}{V(\rho)}\right]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}, \left[\frac{t}{\rho^{\lambda+1}}\right]^{\frac{1}{2-m-\lambda}}\right). \tag{14}$$

Воспользуемся замечанием 3, и для $\rho\geqslant\gamma P(\tau)$ имеем

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,A_\rho}\leqslant \gamma\max\left(t^{-\frac{N}{k}}\|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{k}}, t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}}\left(\frac{\rho}{V(\rho)}\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\widetilde{A}_\rho}u(x,t)\,dx\right)^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\right). \tag{15}$$

Оценим следующее выражение, содержащееся в (15):

$$\frac{\rho}{V(\rho)}\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\widetilde{A}_\rho}u(x,t)\,dx\leqslant \gamma\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\widetilde{A}_\rho}\frac{|x|}{V(|x|)}u(x,t)\,dx. \tag{16}$$

Соединяя оценки (15), (16), а также (14) с $\rho=P(\tau)$, получаем

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega}\leqslant\gamma\max\left(t^{-\frac{N}{k}}\|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{k}}, t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}}\left[\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho}\frac{|x|}{V(|x|)}u(x,t)\,dx\right]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}},\right.$$
$$\left. t^{-\frac{1}{2\lambda+m-1}}\|u_0\|_{1,\Omega}^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\left[\frac{P(\tau)}{V(P(\tau))}\right]^{\frac{\lambda+1}{2\lambda+m-1}}\right).$$

Принимая во внимание оценку (12) с $\rho=P(\tau)$, а также само определение $P(\tau)$, получаем нужную оценку (9). Правая часть оценки (11) следует из замечания 1. Осталось доказать левую часть (11), т. е. оценку снизу. В силу закона сохранения массы, для любого $t > 0$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} u_0 dx = \int\limits_{\Omega_R} u(x,t)\, dx + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_R} u(x,t)\, dx. \tag{17}$$

С учетом (12) из (17) имеем

$$\int\limits_{\Omega} u_0 dx \leqslant \|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} V(R) + \frac{V(R)}{R} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_R} \frac{|x|}{V(|x|)} u dx \leqslant$$

$$\leqslant \|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} V(R) + \gamma \biggl[\mu(0) + \left(\frac{t}{R^{2\lambda+m-1}}\right)^{\frac{1}{2-m-\lambda}}\biggr] \frac{V(R)}{R}. \tag{18}$$

Возьмем в (18) $R = CP(\tau) = CP(t\|u_0\|_{1,\Omega}^{m+\lambda-2})$, с учетом определения $P(\tau)$, т. е. (10), вычислим

$$\left(\frac{t}{P(\tau)^{2\lambda+m-1}}\right)^{\frac{1}{2-m-\lambda}} \frac{V(P(\tau))}{P(\tau)} = \|u_0\|_{1,\Omega},$$

откуда при достаточно больших t и будет следовать левая часть оценки (11). Теорема доказана.

1. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, № 2. – С. 135–176.
2. *Гущин А. К.* Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка // Мат. сб. – 1976. – **101(143)**, № 4(12). – С. 459–499.
3. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Optimal bounds and blow up phenomena for parabolic problems in narrowing domains // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1998. – **128A**. – P. 1163–1180.
4. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infinity // Adv. Different. Equat. – 2000. – **5**. – P. 833–860.
5. *Лежнев А. В.* О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Мат. сб. – 1986. – **129(171)**, № 2. – С. 186–200.
6. *Гущин А. К., Михайлов В. П., Михайлов Ю. А.* О равномерной стабилизации решения второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Там же. – 1985. – **128(170)**, № 2(10). – С. 147–168.
7. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1973. – **126**. – С. 5–45.
8. *Гущин А. К.* О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Мат. сб. – 1982. – **119(161)**. – С. 451–508.
9. *Ушаков В. И.* Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Там же. – 1980. – **111(153)**. – С. 95–115.
10. *Мукминов Ф. Х.* Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Там же. – 1980. – **111(153)**. – С. 503–521.
11. *Тедеев А. Ф.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 10. – С. 1795–1806.
12. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543–567.
13. *Di Benedetto E., Herrero M. A.* Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$ // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1990. – **111**. – P. 225–290.

14. *Tsutsumi M.* On solutions of some doubly nonlinear parabolic equations with absorbtion // J. Math. Anal. and Appl. – 1988. – **132**. – P. 187–212.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 03.11.2008

O. M. Boldovskaya, A. F. Tedeev

Maximum estimates of a Neumann problem's solution for quasilinear parabolic equations in unbounded domains narrowing at infinity. A fast diffusion case

An initial boundary-value Neumann problem for the equation

$$u_t = \mathrm{div}(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du)$$

is considered, where $0 < m + \lambda \leqslant 2$. *Two-sided estimates of the* L_∞ *norm of the problem's solution depending on the geometry of a domain (with noncompact boundary), where the problem is considered, are established.*