УДК 519.85

Т.Н. БАРБОЛИНА

РЕШЕНИЕ ЧАСТИЧНО КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Ключевые слова: *мультимножество, частично комбинаторная евклидова задача оптимизации, лексикографический перебор.*

ВВЕДЕНИЕ

Актуальным направлением исследований в области оптимизации являются методы и алгоритмы евклидовой комбинаторной оптимизации [1–10]. Евклидовы задачи комбинаторной оптимизации классифицируют как по виду целевой функции и дополнительных ограничений, так и в соответствии с евклидовым комбинаторным множеством, которое определяет комбинаторное ограничение. Таким образом выделяют оптимизационные задачи на перестановках, сочетаниях, размещениях, полиперестановках и т.д. В настоящее время наиболее исследованны задачи на вершинно расположенных множествах, т.е. совпадающих с множеством вершин своею выпуклой оболочкой [1–5]. Однако у решения задач на множествах, которые такого свойства не имеют (например, общего множества размещений), есть ряд существенных особенностей.

Ранее были изучены свойства допустимой области [6, 7], особенности решения безусловных задач [1], предложены методы решения оптимизационных задач на размещениях [8–10]. Один из подходов к решению таких задач состоял в использовании разбиения многогранника на классы эквивалентности с последующим направленным перебором полученных классов [8–10]. В качестве отношения эквивалентности в этом случае использовалось отношение лексикографической эквивалентности точек пространства относительно размещений. Это отношение определялось для случая, когда размерность пространства u была равна длине выборки k, что позволяло применять метод только для решения полностью комбинаторных оптимизационных задач. В настоящей статье рассмотрено обобщение данного отношения для случая $k \le u$ и обоснованы алгоритмы решения линейных частично комбинаторных задач на размещениях с учетом исследуемых свойств отношения.

В изложении результатов относительно евклидовых комбинаторных множеств использованы терминология и обозначения из [1]. Под мультимножеством понимается совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые. Кортеж различных элементов мультимножества называется его основой.

Упорядоченной k-выборкой из мультимножества $G = \{g_1, \ldots, g_\eta\}$ называется набор $(g_{i_1}, \ldots, g_{i_k})$, где $g_{i_j} \in G$, $i_j \ne i_t \ \forall i_j$, $i_t \in J_\eta \ \forall j$, $t \in J_k$ (здесь и далее J_n — множество n первых натуральных чисел). Множество всех упорядоченных k-выборок из мультимножества G называется общим множеством k-размещений.

Относительно лексикографического порядка использована терминология из [11, 12]. В частности, вектор $x \in R^u$ лексикографически больше вектора $y \in R^u$ (записывается $x \succ y$), если первая отличная от нуля координата их разности положительна. Если вектор x лексикографически больше вектора y, то y лексикографически меньше x ($x \prec y$). Говорят также, что вектор x лексикографически не меньше вектора y ($x \succeq y$), если $x \succ y$ или $x = y$.

ОБОБЩЕННОЕ ОТНОШЕНИЕ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗМЕЩЕНИЙ

Пусть $k, u \in N$ $(k \leq u)$, для точки $x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_u) \in R^u$ обозначим $\xi_k(x) = (x_1, \dots, x_k)$. Пусть также $E_{\eta n}^k(G)$ — общее множество k-размещений из мультимножества $G = \{g_1, g_2, \dots g_\eta\}$ с основой $S(G) = (e_1, \dots, e_n)$. В дальнейшем полагаем, что элементы мультимножества упорядочены по неубыванию, а элементы основы — по возрастанию.

Определение 1. Точки x, $y \in R^u$ $(x \succeq y)$ называются лексикографически эквивалентными относительно k-размещений (λ_k-эквивалентыми), если выполняется одно из двух условий:

— не существует такого $z = (z_1, \dots, z_k) \in E_{\eta n}^k(G)$, что $\xi_k(x) \succeq z \succeq \xi_k(y)$;

— справедливо равенство $\xi_k(x) = \xi_k(y)$.

Если точки x и y являются λ_k-эквивалентыми, будем записывать $x \simeq y$, в противном случае $x \not\simeq y$.

Утверджение 1. Отношение λ_k лексикографической эквивалентости точек пространства относительно k-размещений является отношением эквивалентности.

Доказательство. Поскольку для любой точки $x \in R^u$ выполняется условие $\xi_k(x) = \xi_k(x)$, имеет место рефлексивность отношения λ_k. Симметричность следует непосредственно из определения. Для доказательства утверждения остается доказать транзитивность отношения.

Пусть для точек x_1, x_2, $x_3 \in R^u$ выполняются соотношения $x_1 \simeq x_2$, $x_2 \simeq x_3$. Не нарушая общности, можем считать, что $x_1 \succeq x_3$. Предположим, что $x_1 \not\simeq x_3$, тогда $\xi_k(x_1) \neq \xi_k(x_3)$, причем существует такое $z \in E_{\eta n}^k(G)$, что $\xi_k(x_1) \succeq z \succeq \xi_k(x_3)$. Для точек z и x_2 имеет место одно из соотношений: $z \succeq \xi_k(x_2)$ или $\xi_k(x_2) \succ z$. В первом случае имеем $\xi_k(x_1) \succeq z \succeq \xi_k(x_2)$, что противоречит λ_k-эквивалентности точек x_1 и x_2, во втором — вследствие соотношения $\xi_k(x_2) \succ z \succeq \xi_k(x_3)$ получаем противоречие с тем фактом, что $x_2 \simeq x_3$. Таким образом, предположение о неэквивалентности точек x_1 и x_3 неправильно и отношение λ_k является транзитивным. Утверждение доказано.

Из утверждения 1 следует, что отношение λ_k разбивает многогранник $M \subset R^u$ на классы эквивалентности, множество которых (фактор-множество по эквивалентности λ_k) обозначим F, т.е. $F = M / \lambda_k$.

Определение 2. Элементы фактор-множества по эквивалентности λ_k будем называть λ_k-классами.

Из определения 1 следует, что каждый элемент $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \in E_{\eta n}^k(G)$ определяет отдельный класс эквивалентности, элементами которого являются все точки многогранника M вида $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_u)$. Множество таких λ_k-классов обозначим F_E. Остальные классы эквивалентности не содержат точек, первые k координат которых образуют элемент множества $E_{\eta n}^k(G)$.

Определение 3. Комбинаторным называется λ_k-класс V, если $\xi_k(x) \in E_{\eta n}^k(G)$ для любого $x \in V$, в противном случае λ_k-класс V называется некомбинаторным.

Рассмотрим возможность упорядочивания элементов фактор-множества F.

Определение 4. Будем говорить, что λ_k-класс V лексикографически больше λ_k-класса V' тогда и только тогда, когда $\forall x \in V$ и $\forall x' \in V'$ выполняется условие $x \succ x'$.

Обозначим $V \succ V'$ тот факт, что λ_k-класс V лексикографически больше λ_k-класса V'. Как и для случая $u = k$, процедуру сравнения λ_k-классов можно упростить на основе следующего утверждения.

Утверждение 2. Пусть V, $V' \in F$, причем $V \neq V'$ и для некоторых $x \in V$, $x' \in V'$ выполняется соотношение $x \succ x'$. Тогда λ_k-класс V лексикографически больше λ_k-класса V'.

Доказательство. Пусть y и y' — произвольные представители соответственно λ_k-классов V и V'. Покажем, что $y \succ y'$. Поскольку x и x' принадлежат разным λ_k-классам, то $x \not\simeq x'$, т.е. найдется такая точка $z \in E_{\eta n}^k(G)$, что $\xi_k(x) \succeq z \succeq \xi_k(x')$. Так как $x \simeq y$, то $\xi_k(y) \succeq z$. Аналогично из $x' \simeq y'$ следует, что $z \succeq \xi_k(y')$. Таким образом, $\xi_k(y) \succeq z \succeq \xi_k(y')$, откуда $\xi_k(y) \succeq \xi_k(y')$, а значит, и $y \succeq y'$. Но равенства не существует, поскольку y и y' принадлежат разным классам эквивалентности. Следовательно, $y \succ y'$, откуда $V \succ V'$. Утверждение доказано.

Несложно убедиться, что введенное на множестве λ_k-классов отношение $\succ$ (лексикографически больше) является отношением строгого линейного порядка. Учитывая это и тот факт, что фактор-множество $F = M / \lambda_k$ конечное вследствие конечности множества $E_{\eta n}^k(G)$, можем представить фактор-множество F в виде кортежа λ_k-классов, упорядоченных по возрастанию:

$$F = (V_1, V_2, \ldots, V_{|F|}), \; V_i \prec V_{i+1} \quad \forall i \in J_{|F|-1} . \tag{1}$$

Далее рассмотрим многогранник M такой, что для любого $x \in M$ имеет место $\xi_k(x) \in \Pi_{\eta n}^k(G)$. Как показано в [8], для любой точки $\xi_k(x) \in \Pi_{\eta n}^k(G)$ такой, что $\xi_l(x) \in E_{\eta n}^l(G)$ $(l \leq k)$, найдутся такие точки $x', x'' \in E_{\eta n}^k(G)$, что

$$\xi_l(x') = \xi_l(x'') = \xi_l(x), \; x' \succeq \xi_k(x) \succeq x''.$$

Утверждение 3. Пусть $V \in M / \lambda_k$ — некомбинаторный λ_k-класс; $\rho(x)$ — наименьшее число такое, что для точки $x \in V$ выполняется условие $\xi_{\rho(x)}(x) \notin E_{\eta n}^{\rho(x)}(G)$. Тогда $\forall \bar{x}, \tilde{x} \in V \;\; \rho(\bar{x}) = \rho(\tilde{x})$.

Доказательство. Предположим для определенности $\rho(\bar{x}) \geq \rho(\tilde{x})$. Поскольку V — некомбинаторный λ_k-класс, для любого $x \in V$ $\rho(x) \leq k$. Если $\rho(\bar{x}) = 1$, то из предположения также $\rho(\tilde{x}) = 1$.

Пусть теперь $\rho(\bar{x}) > 1$. Обозначим $l = \rho(\bar{x}) - 1$, тогда $\xi_l(x) \in E_{\eta n}^l(G)$; пусть также s — первая различная координата точек $\bar{x}$ и $\tilde{x}$, т.е. $\bar{x}_s \neq \tilde{x}_s$, и если $s > 1$, то $\xi_{s-1}(\bar{x}) = \xi_{s-1}(\tilde{x})$. Предположим, что $s \leq l$. Поскольку $\bar{x}_s \neq \tilde{x}_s$, имеет место одно из двух неравенств: $\bar{x}_s > \tilde{x}_s$ или $\bar{x}_s < \tilde{x}_s$.

Рассмотрим случай, когда $\bar{x}_s > \tilde{x}_s$. Из свойств множества $E_{\eta n}^k(G)$ следует, что существует такая точка $x'' \in E_{\eta n}^k(G)$, что $\xi_k(\bar{x}) \succeq x''$ и $\xi_l(\bar{x}) = \xi_l(x'')$. Так как $s \leq l$, то $x''_s = \bar{x}_s > \tilde{x}_s$, причем s — первая различная координата точек x'' и $\tilde{x}$. Таким образом, $x'' \succ \xi_k(\tilde{x})$. Учитывая также $\xi_k(\tilde{x}) \succeq x''$, имеем, что точка $x'' \in E_{\eta n}^k(G)$ удовлетворяет соотношению $\xi_k(\bar{x}) \succeq x'' \succeq \xi_k(\tilde{x})$, что противоречит λ_k-эквивалентности точек $\bar{x}$ и $\tilde{x}$.

В случае, когда $\bar{x}_s < \tilde{x}_s$, имеем $x'_s = \bar{x}_s < \tilde{x}_x$, где точка $x' \in E_{\eta n}^k(G)$ такова, что $x' \succ \xi_k(\bar{x})$, $\xi_s(\bar{x}) = \xi_s(x')$. Значит, $x' \prec \xi_k(\tilde{x})$ и имеет место соотношение $\xi_k(\tilde{x}) \succeq x' \succeq \xi_k(\bar{x})$, что противоречит $\bar{x} \simeq \tilde{x}$.

Таким образом, предположение неправильно, т.е. $s > l$, а значит, $\xi_l(\bar{x}) = \xi_l(\tilde{x})$. Следовательно, $\xi_l(\tilde{x}) = \xi_l(\bar{x}) \in E^l_{\eta n}(G)$, т.е. $\rho(\tilde{x}) \geq \rho(\bar{x})$. Учитывая, что по предположению $\rho(\bar{x}) \geq \rho(\tilde{x})$, имеем $\rho(\bar{x}) = \rho(\tilde{x})$. Утверждение доказано.

Из утверждения следует, что наименьшее число ρ такое, что $\xi_\rho(x) \notin E^\rho_{\eta n}(G)$, является характеристикой некомбинаторного λ_k-класса. Очевидно также, что если V — комбинаторный λ_k-класс, то для любого $\rho \in J_k$ кортеж $\xi_\rho(x)$ — элемент множества $E^\rho_{\eta n}(G)$.

Определение 5. Рангом некомбинаторного λ_k-класса V с представителем x есть наименьшее число ρ такое, что кортеж $\xi_\rho(x)$ не является элементом множества $E^\rho_{\eta n}(G)$; ранг комбинаторного λ_k-класса равен $k+1$.

ПОИСК КОМБИНАТОРНЫХ λ_k-КЛАССОВ

В алгоритмах метода построения лексикографической эквивалентности в качестве вспомогательных используются задачи поиска комбинаторных λ_k-классов, ближайших к заданному классу $\bar{V}$ в порядке (1) слева и справа, т.е. λ_k-классов $\lfloor \bar{V} \rfloor$ и $\lceil \bar{V} \rceil$, удовлетворяющих соответственно условиям:

$$\bar{V} \succ \lfloor \bar{V} \rfloor \ \forall V' \in F_E (V' \prec \bar{V} \Rightarrow \lfloor \bar{V} \rfloor \succeq V');$$

$$\bar{V} \prec \lceil \bar{V} \rceil \ \forall V' \in F_E (V' \succ \bar{V} \Rightarrow \lceil \bar{V} \rceil \preceq V').$$

В приведенных ниже алгоритмах решения оптимизационных задач необходимо также учитывать дополнительные ограничения, возникающие в процессе решения задачи и формирующие некоторое выпуклое подмножество $Q \subseteq M$. В связи с этим целесообразно сформулировать задачи поиска λ_k-классов $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q$ и $\lceil \bar{V} \rceil_Q$, которые являются ближайшими слева и справа к $\bar{V}$ в порядке (1) среди всех комбинаторных λ_k-классов, имеющих непустое пересечение с множеством Q. Обозначим $F_E(Q)$ множество комбинаторных λ_k-классов, которые имеют непустое пересечение с множеством Q. С учетом введенного обозначения определения классов $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q$ и $\lceil \bar{V} \rceil_Q$ запишутся следующим образом:

$$\lfloor \bar{V} \rfloor_Q \in F_E(Q),\ \bar{V} \succ \lfloor \bar{V} \rfloor_Q \ \ \forall V' \in F_E(Q)(V' \prec \bar{V} \Rightarrow \lfloor \bar{V} \rfloor_Q \succeq V');$$

$$\lceil \bar{V} \rceil_Q \in F_E(Q),\ \bar{V} \prec \lceil \bar{V} \rceil_Q \ \ \forall V' \in F_E(Q)(V' \succ \bar{V} \Rightarrow \lceil \bar{V} \rceil_Q \preceq V').$$

По аналогии с $\lfloor \bar{V} \rfloor$-задачей [8] $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q$-задачей назовем задачу поиска лексикографически максимальной точки множества $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q \cap Q$, а $\lceil \bar{V} \rceil_Q$-задачей будем называть задачу поиска лексикографически минимальной точки множества $\lceil \bar{V} \rceil_Q \cap Q$.

Рассмотрим решение $\lceil \bar{V} \rceil_Q$-задачи, где λ_k-класс $\bar{V}$ определен точкой $\bar{x} \in M$. Пусть $\rho \in J_k$. Обозначим

$$S_L(\bar{x}, \rho) = \{e_i \in S(G) | (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{\rho-1}, e_i) \in E^k_{\eta n}(G),\ e_i < \bar{x}_\rho\},$$

$$S_R(\bar{x}, \rho) = \{e_i \in S(G) | (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{\rho-1}, e_i) \in E^k_{\eta n}(G),\ e_i > \bar{x}_\rho\}.$$

Очевидно, что $S_L(\bar{x},\rho)=S_R(\bar{x},\rho)=\varnothing$ при $\rho>\rho(\bar{V})$. Если $\bar{V}$ является некомбинаторным λ_k-классом, то $S_L(\bar{x},\rho)\neq\varnothing$ и $S_R(\bar{x},\rho)\neq\varnothing$ при $\rho=\rho(\bar{V})$. Действительно, для $\bar{x}\in\bar{V}$ существуют $x', x''\in E_{\eta n}^k(G)$ такие, что $x'\succeq\xi_k(\bar{x})\succeq x''$ и $\xi_{\rho-1}(x')=\xi_{\rho-1}(\bar{x})=\xi_{\rho-1}(x'')$, если $\rho>1$. Тогда $x'_\rho\geq\bar{x}_\rho\geq x''_\rho$. А поскольку $\xi_\rho(x'), \xi_\rho(x'')\in E_{\eta n}^k(G)$, $\xi_\rho(\bar{x})\notin E^\rho$, ни одного из равенств не существует. Следовательно, $x'_\rho\in S_L(\bar{x},\rho)$, $x''_\rho\in S_L(\bar{x},\rho)$. Отметим, что при $\rho<\rho(\bar{V})$ множества $S_L(\bar{x},\rho)$ и $S_R(\bar{x},\rho)$ необязательно являются непустыми.

Утверждение 4. Если для всех $\rho\in J_k$ множество $S_L(\bar{x},\rho)=\varnothing$, то $\bar{V}$ — первый в порядке (1) комбинаторный λ_k-класс.

Доказательство. Поскольку для некомбинаторного λ_k-класса множества $S_L(\bar{x},\rho)$ и $S_R(\bar{x},\rho)$ являются непустыми при $\rho=\rho(\bar{V})\in J_k$, то $\bar{V}\in F_E$.

Пусть λ_k-класс V' такой, что $V'\prec\bar{V}$; $x'\in V'$, l — индекс первой различной координаты точек x' и $\bar{x}$. Так как $\bar{V}\in F_E$, то $\xi_{l-1}(\bar{x})\in E_{\eta n}^{l-1}(G)\ \forall l\in\{2,\ldots,k\}$, а тогда также $\xi_{l-1}(x')\in E_{\eta n}^{l-1}(G)$. Следовательно, $l\leq\rho(V')$.

Если $\rho(V')>l$, то $\xi_l(x')\in E_{\eta n}^l(G)$. Учитывая, что также $x'_l<\bar{x}_l$, имеем $x'_l\in S_L(\bar{x},l)$, что противоречит $S_L(\bar{x},\rho)=\varnothing$.

Пусть теперь $\rho(V')=l$. Тогда $\rho(V')\leq k$, т.е. $V'\notin F_E$. Следовательно, существует элемент e_i мультимножества такой, что $e_i\in S_L(x',l)$. Так как $e_i<x'_l<\bar{x}_l$, то также $e_i\in S_L(\bar{x},l)$, т.е. $S_L(\bar{x},\rho)\neq\varnothing$ при $\rho=l$. Утверждение доказано.

Аналогично доказывается, что из $S_R(\bar{x},\rho)=\varnothing\ \forall\rho\in J_k$ следует, что $\bar{V}$ — последний в порядке (1) комбинаторный λ_k-класс.

Пусть множество $Q\subseteq M$ является выпуклым, точка $\bar{x}\in Q$, как и раньше, определяет λ_k-класс $\bar{V}$, число $\rho\in J_k$ такое, что $S_L(\bar{x},\rho)\neq\varnothing$, $e_i=\max\{e|\,e\in S_L(x,p)\}$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$x'_\rho=\operatorname{lex}\max_{x\in Q}x_\rho,\ x'=\operatorname{arglex}\max_{x\in Q}x_\rho, \tag{2}$$

$$x_t=\bar{x}_t\quad\forall t\in J_{\rho-1}, \tag{3}$$

$$x_\rho\leq e_i. \tag{4}$$

Очевидно, что задача (2)–(4) имеет решение, если только ее допустимое множество непусто, так как по крайней мере $x_\rho\leq e_n$.

Утверждение 5. Решение x' задачи (2)–(4) определяет λ_k-класс V', лексикографически меньший λ_k-класса $\bar{V}$, причем x' является лексикографически максимальной точкой множества $V'\cap Q$.

Доказательство. Очевидно, что решение x' задачи (2)–(4), если оно существует, имеет вид $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{\rho-1},e_i,x'_{\rho+1},\ldots,x'_u)$, причем точка x' является лексикографически максимальной из всех точек такого вида. Так как $e_i\in S_L(\bar{x},\rho)$, то $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{\rho-1},e_i)\in E_{\eta n}^\rho(G)$. Учитывая также, что вследствие утверждения 3 $\forall x\in V'\ \xi_\rho(x)=\xi_\rho(x')$, получаем, что x' — лексикографически максимальная точка множества $V'\cap Q$.

Из $e_i\in S_L(\bar{x},\rho)$ также следует, что $\bar{x}_\rho>e_i$. Поскольку при этом $\xi_{\rho-1}(\bar{x})=\xi_{\rho-1}(x')$, имеем $\bar{x}\succ x'$. Кроме того, точки $\bar{x}$ и x' не являются λ_k-эквивалентными (в противном случае имело бы место соотношение $\bar{x}_\rho=x'_\rho=e_i$), значит, $\bar{V}\neq V'$. Таким образом, решение задачи (2)–(4) определяет λ_k-класс, лексикографически меньший данного. Утверждение доказано.

Теорема 1. Если $\rho \in J_k$ — наибольшее число, для которого задача (2)–(4) имеет решение, причем это решение x' определяет λ_k-класс V', то не существует λ_k-класса из множества $F_E(Q)$, который бы располагался в порядке (1) между λ_k-классами $\bar{V}$ и V'.

Доказательство теоремы проведем от противного. Предположим, что существует λ_k-класс $V \in F_E(Q)$ такой, что $\bar{V} \succ V \succ V'$. Пусть $x \in V \cap Q$, тогда также имеет место соотношение $\bar{x} \succ x \succ x'$. Учитывая, что $\xi_{\rho-1}(\bar{x}) = \xi_{\rho-1}(x')$, имеем $\xi_{\rho-1}(x) = \xi_{\rho-1}(x')$, а значит, $\bar{x}_\rho \geq x_\rho \geq x'_\rho = e_i$. Но так как x' — решение задачи (2)–(4) и $x \succ x'$, то x не удовлетворяет (4), т.е. $x_\rho > e_i$.

Однако из $V \in F_E$ следует, что $\xi_k(x) \in E^k_{\eta n}(G)$, а значит, $\xi_\rho(x) \in E^\rho_{\eta n}(G)$. При $\bar{x}_\rho > x_\rho$ получим $x_\rho \in S_L(\bar{x}, \rho)$, что вследствие $x_\rho > e_i$ противоречит тому, что e_i — максимальный элемент множества $S_L(\bar{x}, \rho)$.

Таким образом, $\bar{x}_\rho = x_\rho > e_i$. Это означает, что индекс l первой различной координаты точек $\bar{x}$ и x больше ρ. Тогда из $x_l < \bar{x}_l$ (вследствие $x \prec \bar{x}$) и $\xi_l(x) \in E^l_{\eta n}(G)$ следует, что $x_l \in S_L(\bar{x}, l)$. Учитывая, что в (4) e_i — максимальный элемент множества $S_L(\bar{x}, \rho)$, получаем, что x удовлетворяет (3), (4) при $\rho = l$. Поскольку также $x \in Q$, задача вида (2)–(4) имеет решение при $l > \rho$, что противоречит факту, что ρ — наибольшее число, при котором задача (2)–(4) имеет решение. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что решение задачи (2)–(4) можно положить в основу решения $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q$-задачи. Действительно, пусть $\rho \in J_k$ — наибольшее число, для которого задача (2)–(4) имеет решение x'; если $\xi_k(x') \in E^k_{\eta n}(G)$, то согласно теореме 1 также $x' \in \lfloor \bar{V} \rfloor_Q$. Если $\xi_k(x') \notin E^k_{\eta n}(G)$, т.е. λ_k-класс V', определенный точкой x', является некомбинаторным, то положим $\bar{x} = x'$ и снова решим задачу вида (2)–(4). Процесс завершается в одном из двух случаев:

1) комбинаторным является λ_k-класс, определенный решением x' задачи вида (2)–(4);

2) при $\rho = 1$ задача (2)–(4) не имеет решения.

В первом случае x' есть решение $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q$-задачи, так как каждый следующий λ_k-класс лексикографически меньше предыдущего, причем между λ_k-классами, определенными решениями любых двух последовательных задач, в порядке (1) не содержится λ_k-классов из $F_E(Q)$.

Во втором случае, очевидно, задача вида (2)–(4) не имеет решения ни при каком значении ρ. Тогда не существует λ_k-классов из $F_E(Q)$, лексикографически меньших данного. Действительно, если бы существовал λ_k-класс $V \in F_E(Q)$, лексикографически меньший $\bar{V}$, то его представитель x удовлетворял бы условию (3) при ρ, равном индексу первой различной координаты точек $\bar{x}$ и x. Кроме того, поскольку $x \prec \bar{x}$, имели бы место соотношения $x_\rho < \bar{x}_\rho$ и $\xi_\rho(x) \in E^\rho_{\eta n}(G)$, так как $V' \in F_E$, вследствие чего число x_ρ являлось бы элементом множества $S(\bar{x}, \rho)$. Таким образом, множество $S(\bar{x}, \rho)$ было бы непустым и с учетом правила выбора элемента e_i в (4) число x_ρ удовлетворяло бы (4) и точка x являлась бы допустимой точкой задачи (2)–(4). Следовательно, существовало бы и решение задач (2)–(4).

Таким образом, алгоритм решения $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q$-задачи имеет следующий вид.

Шаг 1. Полагаем номер итерации $h = 0$, число $\rho = \rho(\bar{V})$, если $\bar{V} \notin F_E$, иначе $\rho = k$.

Шаг 2. Формируем множество $S_L(\bar{x}, \rho)$.

Шаг 3. Если $S_L(\bar{x}, \rho) = \varnothing$, то переходим к шагу 4, иначе к шагу 5.

Шаг 4. Если $\rho > 1$, то уменьшаем ρ на единицу и возвращаемся к шагу 2, иначе задача не имеет решения.

Шаг 5. Решаем задачу (2)–(4). Если она не имеет решения, то переходим к шагу 4, иначе обозначим решение x^h и положим $\rho = \rho(V^h)$, где λ_k-класс V^h определяется точкой x^h.

Шаг 6. Если $\rho = k + 1$, то x^h — искомая точка, иначе полагаем $\bar{x} = x^h$ и, увеличив h на единицу, переходим к шагу 2.

Аналогично обоснован и сформулирован алгоритм решения $\lceil \bar{V} \rceil_Q$-задачи.

РЕШЕНИЕ ЧАСТИЧНО КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Рассмотрим теперь решение линейной условной частично комбинаторной евклидовой задачи лексикографической максимизации на размещениях, под которой будем понимать задачу нахождения такой пары $\langle C(x^*), x^* \rangle$, что

$$C(x^*) = \underset{x \in R^u}{\text{lexmax}} \sum_{j=1}^{u} c_j x_j ; \; x^* = \underset{x \in R^u}{\text{arglexmax}} \sum_{j=1}^{u} c_j x_j \tag{5}$$

при комбинаторном условии

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E_{\eta n}^k (G) \tag{6}$$

и дополнительных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{u} a_{ij} x_j \le b_i , \; i \in J_m , \tag{7}$$

$$x_j \ge 0 \;\; \forall j \in J_u . \tag{8}$$

Здесь c_j, a_{ij}, b_i — заданные действительные числа $\forall j \in J_u$ и $\forall i \in J_m$.

Для решения задачи (5)–(8) можно использовать с незначительными видоизменениями алгоритмы метода построения лексикографической эквивалентности, предложенные и обоснованные в [8, 9].

Пусть многогранник M определяется дополнительными ограничениями (7), (8) рассматриваемой задачи и системой неравенств, которая описывает выпуклую оболочку множества размещений — общий многогранник размещений [1]:

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \le \sum_{t \in \omega} x_t \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta - j + 1} \;\; \forall \omega \subset J_k . \tag{9}$$

Первый алгоритм метода построения лексикографической эквивалентности используется для решения линейных условных задач оптимизации на размещениях при условии принадлежности значений целевой функции некоторому дискретному множеству A (элементы множества будем считать упорядоченными по возрастанию). В этом случае экстремаль задачи (5)–(8) может находиться только на одной гиперплоскости вида

$$\sum_{j=1}^{u} c_j x_j = \zeta , \tag{10}$$

где $\zeta \in A$.

Пусть $\langle C(\tilde{x}), \tilde{x} \rangle$ — решение задачи (5), (7)–(9), ζ^h — наибольший элемент множества A такой, что $C(\tilde{x}) \ge \zeta^h$. Рассмотрим задачу поиска пары (5) при условиях (7)–(9):

$$\sum_{j=1}^{u} c_j x_j \le \zeta^h. \qquad (11)$$

Как показано в [8], экстремаль x^* является лексикографически максимальной точкой многогранника $M(\zeta^h)$, который определяется условиями (7)–(10). Если при этом $\xi_k(x^*) \in E_{\eta n}^k(G)$, то получено решение исходной задачи (5)–(7). В противном случае решим $\lfloor \bar{V} \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задачу, где λ_k-класс $\bar{V}$ определяется точкой x^*. Если задача не имеет решения, то фактор-множество $M(\zeta^h) / \lambda_k$ не содержит комбинаторных λ_k-классов. Это означает, что не существует допустимых точек задачи (5)–(8), доставляющих целевой функции значение ζ^h. В этом случае заменим ζ^h предыдущим значением из множества A и повторим решение задачи вида (7)–(9), (11).

Пусть x' — решение $\lfloor \bar{V} \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задачи. Тогда для любой допустимой точки x задачи (5)–(8), для которой $C(x') = \zeta^h$, имеет место соотношение $x \preceq x'$. Учитывая также, что не существует допустимых точек, для которых значение целевой функции больше ζ^h, получаем, что $\langle C(x'), x' \rangle$ является решением задачи (5)–(8).

Если в процессе уменьшения ζ^h задача (5), (7)–(9), (11) окажется неразрешимой, то, очевидно, исходная задача (5)–(8) также не имеет решения.

Далее приведен первый алгоритм решения линейной условной частично комбинаторной евклидовой задачи лексикографической максимизации на размещениях.

Алгоритм 1

Шаг 1. Полагаем номер итерации $h = 0$.

Шаг 2. Решаем задачу поиска пары (5) при условиях (7)–(9). Если она не имеет решения, то не имеет решения и исходная задача (5)–(8), иначе обозначим решение $\langle \zeta^h, x^h \rangle$.

Шаг 3. Если $\zeta^h \in A$, то переходим к шагу 6, иначе к шагу 4.

Шаг 4. Увеличивая номер h итерации на единицу, полагаем ζ^h равным ближайшему слева элементу множества A.

Шаг 5. Решаем задачу поиска пары (5) при условиях (7)–(9), (11). Если она не имеет решения, то также не имеет решения исходная задача, иначе пусть $\langle \zeta^h, x^h \rangle$ – решение.

Шаг 6. Если x^h удовлетворяет условию (6), то $\langle \zeta^h, x^h \rangle$ – решение исходной задачи.

Шаг 7. Решаем $\lfloor \bar{V}^h \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задачу, где $M(\zeta^h)$ — многогранник, который определяется условиями (7)–(10), λ_k-класс $\bar{V}^h$ имеет своим представителем точку x^h.

Шаг 8. Если $\lfloor \bar{V}^h \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задача не имеет решения, то полагаем ζ^h равным предыдущему значению множества A и переходим к шагу 4, иначе исходная задача решена и ее решением является пара $\langle \zeta^h, x' \rangle$, где x' – решение $\lfloor \bar{V}^h \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задачи.

Второй алгоритм метода построения лексикографической эквивалентности использует направленный перебор комбинаторных λ_k-классов в порядке лексикографического возрастания и лексикографического убывания, который предусматривает решение последовательности соответственно $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q$- и $\lceil \bar{V} \rceil_Q$-задач. При этом из рассмотрения следует исключить те λ_k-классы, представители которых доставляют целевой функции значения меньшие, чем полученные на предыдущих итерациях, т.е. не удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{u} c_j x_j \geq \sigma^h, \tag{12}$$

где σ^h — наибольшее значение целевой функции, полученное на предыдущих итерациях.

Отметим, что при решении полностью комбинаторных задач значение целевой функции для комбинаторного λ_k-класса определяется однозначно, так как такой класс состоит из одной точки. В случае обобщенного отношения λ_k-эквивалентности комбинаторный класс содержит множество точек, причем значения целевой функции в этих точках могут быть различными. Поэтому для нахождения максимального значения целевой функции для λ_k-класса $\bar{V}$ с известным представителем $\bar{x}$ решим задачу нахождения пары (5) при условии (7) и

$$x_t = \bar{x}_t \quad \forall t \in J_k. \tag{13}$$

Если целевая функция $C(x)$ ограничена сверху на множестве M, то также существует максимум $C(x^*)$ этой функции на непустом множестве (7)–(9), (13), причем $C(x^*) \geq C(\bar{x}) \geq \sigma^h$, т.е. максималь удовлетворяет условию (12).

Перебор комбинаторных λ_k-классов в порядке лексикографического возрастания с учетом описанных замечаний назовем l^+-перебором, а перебор в порядке лексикографического убывания — l^--перебором.

Рассмотрим сначала l^+-перебор. Пусть точка $x^h \in M$ определяет комбинаторный λ_k-класс V^h, причем x^h является лексикографической максималью функции $C(x)$ на множестве V^h. Пусть также множество $Q \subseteq M$ определяется условиями (7)–(9), (12), где $\sigma^h \geq C(x^h)$. Решим $\lceil V^h \rceil_Q$-задачу и, используя ее решение $\bar{x}^h$, найдем пару (5) при условиях (7)–(9), (13). Поскольку $x^* \in \lceil V^h \rceil_Q$, то x^* удовлетворяет (12) и для любой точки $x \in V^h$ имеет место $x^* \succ x$. Учитывая, что x^h — лексикографическая максималь функции $C(x)$ на множестве V^h, имеем, что для любого $x \in V^h$ либо $C(x^*) > C(x)$, либо $C(x^*) = C(x)$, но при этом $x^* \succ x$. Как и в [8], будем в таком случае говорить, что x^* является лучшим допустимым решением задачи (5)–(7), чем x, и обозначать этот факт $x^* \beta x$. Таким образом, $x^* \beta x$ для любого $x \in V^h$.

Точка x^* как решение задачи (5), (7)–(9), (13) также является лучшим допустимым решением, чем любой представитель λ_k-класса $\lceil V^h \rceil_Q$. Кроме того, не существует таких комбинаторных λ_k-классов, располагающихся между V^h и $\lceil V^h \rceil_Q$ в порядке (1), представители которых доставляют целевой функции значение не меньше $C(x^*)$. Поскольку также $x^* \beta \tilde{x}$ для всех $\tilde{x} \in V^h$, для любой точки x, удовлетворяющей соотношениям (6), (7) и $x^* \succ x \succ x^h$, имеем $x^* \beta x$.

Продолжая l^+-перебор, увеличим h на единицу и вновь решим $\lceil V^h \rceil_Q$-задачу, взяв в качестве начального λ_k-класс, определенный точкой x^*, $\sigma^h = C(x^*)$;

затем решим задачу (5), (7)–(9), (13). Продолжим описанный процесс до момента, когда при некотором $\sigma' \lceil V^h \rceil_Q$-задача будет неразрешима. Это означает, что не существует комбинаторных λ_k-классов, которые лексикографически больше V^h и имеют представителя, доставляющего целевой функции значение больше σ'.

Поскольку также не существует допустимых точек задачи (5)–(7), которые располагаются в лексикографическом порядке между точками x^h и x' (лексикографический максимум целевой функции на V^h) и при этом являются лучшим допустимым решением, чем x', точка x' — лексикографическая максималь функции $C(x)$ при условиях (6), (7) и $x \succ x^h$.

Приведем формальное изложение алгоритма l^+-перебора, начиная с точки $x^0 \in V^0$, причем x^0 — лексикографическая максималь функции $C(x)$ на множестве V^0.

Алгоритм l^+-перебора

Шаг 1. Полагаем номер итерации $h=0$.

Шаг 2. Решаем $\lceil V^h \rceil_Q$-задачу, где множество $Q \subseteq M$ определяется условиями (7)–(9), (12). Если $\lceil V^h \rceil_Q$-задача не имеет решения, то перебор завершен и пара $\langle \sigma^h, x^h \rangle$ является его результатом, иначе пусть $\bar{x}^h$ — решение $\lceil V^h \rceil_Q$-задачи.

Шаг 3. Решаем задачу вида (5), (7)–(9), (13), пусть $\langle \sigma^{h+1}, x^{h+1} \rangle$ — ее решение.

Шаг 4. Увеличив h на единицу, переходим к шагу 2.

В случае l^--перебора в результате решения $\lfloor V \rfloor_Q$-задачи будет получена точка x^*, лексикографически меньшая данной, поэтому для получения лучшего допустимого решения необходимо, чтобы значение целевой функции в точке x^* было строго больше σ^h. С учетом этого приведем алгоритм l^--перебора.

Алгоритм l^--перебора

Шаг 1. Полагаем номер итерации $h=0$.

Шаг 2. Решаем $\lfloor V^h \rfloor_Q$-задачу, где множество $Q \subseteq M$ определяется условиями (7)–(9), (12). Если $\lfloor V^h \rfloor_Q$-задача не имеет решения, то перебор завершен и пара $\langle \sigma^h, x^h \rangle$ является его результатом, иначе пусть $\bar{x}^h$ — решение $\lfloor V^h \rfloor_Q$-задачи.

Шаг 3. Решаем задачу (5), (7)–(9), (13), пусть $\langle \tilde{\sigma}, \tilde{x} \rangle$ — ее решение.

Шаг 4. Если $\tilde{\sigma} > \sigma^h$, то положим $\sigma^{h+1} = \tilde{\sigma}$, $x^{h+1} = \tilde{x}$, иначе $\sigma^{h+1} = \sigma^h$, $x^{h+1} = x^h$.

Шаг 5. Увеличив h на единицу, переходим к шагу 2.

Рассуждения, аналогичные проведенным для l^+-перебора, показывают, что точка, полученная в результате l^--перебора, является лексикографической максималью функции $C(x)$ при условиях (6), (7) и $x \prec x^0$.

Таким образом, с использованием алгоритмов l^+- и l^--перебора можно предложить следующий алгоритм решения задачи (5)–(8).

Алгоритм 2

Шаг 1. Решаем задачу поиска пары (5) при условиях (7)–(9). Если она не имеет решения, то не имеет решения и исходная задача (5)–(8), иначе пусть экстремаль $\bar{x}$ определяет λ_k-класс $\bar{V} \in M / \lambda_k$.

Шаг 2. Если $\xi_k(\bar{x}) \in E_{\eta n}^k(G)$, то $\langle C(\bar{x}), \bar{x} \rangle$ — решение задачи (5)–(8), иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Решаем $\lfloor \bar{V} \rfloor_M$- и $\lceil \bar{V} \rceil_M$-задачи.

Шаг 4. Если ни одна из задач не имеет решения, то не имеет решения и исходная задача, иначе переходим к шагу 5.

Шаг 5. Если $\lfloor \bar{V} \rfloor_M$-задача не имеет решения, а $\lceil \bar{V} \rceil_M$-задача имеет решение $\bar{x}$, то осуществляем l^+-перебор, в котором начальной точкой x^0 является решение задачи (5), (7)–(9), (13), и переходим к шагу 13.

Шаг 6. Если $\lceil \bar{V} \rceil_M$-задача не имеет решения, а $\lfloor \bar{V} \rfloor_M$-задача имеет решение $\bar{x}$, то осуществляем l^--перебор, в котором начальной точкой x^0 является решение задачи (5), (7)–(9), (13), и переходим к шагу 13.

Шаг 7. Пусть $\bar{x}^1$ и $\bar{x}^2$ — решения соответственно $\lceil \bar{V} \rceil_M$- и $\lfloor \bar{V} \rfloor_M$-задач. Решим задачи вида (5), (7)–(9), (13) для $\bar{x} = \bar{x}^1$ и $\bar{x} = \bar{x}^2$. Пусть x^1 и x^2 соответственно решения этих задач.

Шаг 8. Если x^1 является лучшим допустимым решением, чем x^2, то переходим к шагу 9, иначе к шагу 11.

Шаг 9. Полагаем $\sigma^0 = C(x^1)$ и осуществляем l^+-перебор, начиная с точки x^1. Пусть пара $\langle \sigma', x' \rangle$ получена в результате этого перебора.

Шаг 10. Осуществляем l^--перебор, начиная с точки x^2, с учетом полученного на предыдущей итерации значения σ', и переходим к шагу 13.

Шаг 11. Полагаем $\sigma^0 = C(x^2)$ и осуществляем l^--перебор, начиная с точки x^1. Пусть пара $\langle \sigma', x' \rangle$ получена в результате этого перебора.

Шаг 12. Осуществляем l^+-перебор, начиная с точки x^1, с учетом полученного на предыдущей итерации значении σ', и переходим к шагу 13.

Шаг 13. Решением исходной задачи (5)–(7) является пара, полученная в результате перебора.

Недостатком рассмотренных выше алгоритмов является то, что в случае их остановки на некоторой итерации невозможно определить, насколько близко полученное решение к оптимальному. Далее предложен приближенный алгоритм метода построения лексикографической эквивалентности, позволяющий получить допустимое решение, для которого значение целевой функции отличается от оптимума не более чем на заданную величину.

Пусть пара $\langle C(x'), x' \rangle$ является решением задачи (5), (7)–(9). Очевидно, что величина $C(x')$ дает верхнюю оценку ς^h $(h=1)$ значения целевой функции на множестве (6), (7), (8). Пусть также x'' — некоторая допустимая точка задачи (5)–(8). Значение $C(x'')$ будем считать нижней оценкой τ^h функции $C(x)$ на множестве (6), (7). Положим $\sigma^h = \dfrac{\tau^h + \varsigma^h}{2}$ и осуществим поиск тех комбинаторных λ_k-классов, представители которых удовлетворяют условиям (11), (12).

Если таких комбинаторных λ_k-классов не будет найдено, то оптимум целевой функции на множестве (6)–(8), очевидно, не превышает σ^h, т.е. $\zeta^{h+1} = \sigma^h$. В противном случае определим новое значение нижней оценки τ^{h+1} как лексикографический максимум функции $C(x)$ на множестве $\bar{V}$, где $\bar{V}$ — найденный комбинаторный λ_k-класс с представителем $\bar{x}$. Для этого решим задачу (7)–(9), (11)–(13).

Повторим поиск комбинаторных λ_k-классов, представители которых удовлетворяют условиям (11), (12) для новых значений оценок. Процесс завершится, когда будет достигнута требуемая точность ε, т.е. величина $\zeta^h - \tau^h$ не превысит ε. Поскольку для значения τ^h целевой функции известно соответствующее допустимое решение задачи (5)–(7), оно с заданной точностью дает решение задачи максимизации функции $C(x)$ при условиях (6), (7). Однако необязательно эта точка является лексикографически максимальной из всех максималей, так как могут существовать комбинаторные λ_k-классы, представители которых доставляют целевой функции то же значение τ^h. Поскольку значение целевой функции известно, задача сводится к нахождению лексикографически максимальной допустимой точки многогранника $M(\tau^h)$, определенного условиями (7)–(9) и (10) при $\zeta = \tau^h$. Как показано выше, для этого необходимо решить задачу вида (5), (7)–(9), (11) и, если ее решение определяет некомбинаторный λ_k-класс V, решить $\lfloor V \rfloor_{M(\tau^h)}$-задачу.

Замечание. Если известно дискретное множество, которому принадлежат значения целевой функции, то можно получить точное решение исходной задачи, остановив процесс, когда величина $\zeta^h - \sigma^h$ станет не больше разности двух соответствующих соседних элементов множества.

Для поиска комбинаторных λ_k-классов можно использовать алгоритмы решения $\lfloor V \rfloor_{Q(h)}$- и $\lceil V \rceil_{Q(h)}$-задач, где многогранник $Q(h)$ задается условиями (7)–(8), (11), (12); λ_k-класс V определяется точкой x'. Решим сначала $\lfloor V \rfloor_{Q(h)}$-задачу. Если она не имеет решения, то решим $\lceil V \rceil_{Q(h)}$-задачу. Если последняя также не имеет решения, то это означает, что не существует комбинаторных λ_k-классов, представители которых принадлежат множеству $Q(h)$. Отметим, что если на некотором подмножестве $Q(h)$ многогранника M $\lfloor V \rfloor_{Q(h)}$-задача не имеет решения, то она, очевидно, не имеет решения и для любого $Q \subset Q(h)$. Это означает, что при поиске комбинаторных λ_k-классов на множестве Q можно осуществлять решение только $\lceil V \rceil_Q$-задачи.

На основании изложенных выше рассуждений можно сформулировать следующий алгоритм решения задачи (5)–(8) с точностью ε.

Алгоритм 3

Шаг 1. Решаем задачу (5), (7)–(9). Если она не имеет решения, то не имеет решения и исходная задача, иначе пусть $\langle C(x'), x' \rangle$ — решение, точка x' определяет λ_k-класс $V \in M / \lambda_k$.

Шаг 2. Полагаем номер итерации $h = 1$.

Шаг 3. Решаем $\lfloor V \rfloor_M$-задачу. Если она имеет решение x^h, то полагаем $l^h = 1$ и переходим к шагу 5, иначе полагаем $l^h = 0$.

Шаг 4. Решаем $\lceil V \rceil_M$-задачу. Если она не имеет решения, то также не имеет решения и исходная задача, иначе пусть x^h — решение.

Шаг 5. Полагаем $\zeta^h = C(x')$, $\tau^h = C(x^h)$.

Шаг 6. Если $\zeta^h - \tau^h \le \varepsilon$, то переходим к шагу 12.

Шаг 7. Полагаем $\sigma^h = \dfrac{\tau^h + \varsigma^h}{2}$.

Шаг 8. Если $l^h = 1$, то решаем $\lfloor V \rfloor_{Q(h)}$-задачу, где многогранник $Q(h)$ определяется условиями (7)–(9), (11), (12). Если задача имеет решение $\bar{x}^h$, то переходим к шагу 10.

Шаг 9. Решаем $\lceil V \rceil_{Q(h)}$-задачу, где многогранник $Q(h)$ определяется условиями (7)–(9), (11), (12). Если она имеет решение $\bar{x}^h$, то полагаем $l^{h+1} = 0$ и переходим к шагу 10, иначе полагаем $\zeta^{h+1} = \sigma^h$, $\tau^{h+1} = \tau^h$, $l^{h+1} = l^h$ и переходим к шагу 6.

Шаг 10. Решаем задачу (5), (7)–(9), (11)–(13). Пусть $\langle C(\tilde{x}), \tilde{x} \rangle$ — ее решение.

Шаг 11. Полагаем $\tau^{h+1} = C(\tilde{x})$, $\zeta^{h+1} = \zeta^h$, увеличиваем h на единицу и переходим к шагу 6.

Шаг 12. Решаем задачу поиска пары (5) на множестве $M(\tau^h)$, определяемого условиями (7)–(9), (11). Пусть ее решение x'' определяет λ_k-класс V''.

Шаг 13. Если λ_k-класс V'' является комбинаторным, то $\langle C(x''), x'' \rangle$ — решение исходной задачи (5)–(7), иначе решение задачи (5)–(7) — пара $\langle C(x^*), x^* \rangle$, где точка x^* — решение $\lfloor V'' \rfloor_{M(\tau^h)}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье предложено обобщение введенного ранее отношения лексикографической эквивалентности относительно размещений, обоснованы алгоритмы решения частично комбинаторных задач оптимизации на размещениях, которые основаны на свойствах рассмотренного отношения. Описанные идеи можно также использовать при решении иных классов евклидовых задач комбинаторной оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.
2. Гребенник И.В., Баранов А.В. Оценки минимума выпуклых функций на классах комбинаторных множеств перестановок // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. — 2009. — № 1. — С. 81–87.
3. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними функціями. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.
4. Яковлев С.В., Валуйская О.А. Оптимизация линейных функций на вершинах перестановочного многогранника с дополнительными линейными ограничениями // Укр. мат. журн. — 2001. — № 9. — С. 1278–1280.
5. Емец О.А., Емец Е.М. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизации на вершинно расположенных множествах // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 129–136.
6. Ємець О.О., Роскладка О.В., Недобачій С.С. Незвідна система обмежень для загального многогранника розміщень // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 1. — С. 3–11.
7. Ємець О.О., Черненко О.О. Оптимізація дробово-лінійної функції на розміщеннях: властивості допустимої області // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2006. — № 5. — С. 22–29.
8. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
9. Емец О.А., Барболина Т.Н. Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 5. — С. 115–125.
10. Емец О.А., Барболина Т.Н., Черненко О.А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями на размещениях // Там же. — 2006. — № 5. — С. 79–85.
11. Колоколов А.А., Леванова Т.В. Алгоритмы декомпозиции и перебора L-классов для решения некоторых задач размещения // Вестн. Омск. ун-та. — 1996. — Вып. 1. — С. 21–23.
12. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

Поступила 06.12.2011