УДК 519.21+62

В.Р. КУКУРБА, Я.М. ЧАБАНЮК

НЕПРЕРЫВНАЯ ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В СХЕМЕ ДИФФУЗИОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Ключевые слова: *стохастическая оптимизация, полумарковский процесс, компенсирующий оператор.*

ВВЕДЕНИЕ

Одной из задач оптимизации в случайной среде, описываемой полумарковским процессом, является установление условий сходимости процедур оптимизации. Множество примеров относительно процедур стохастической оптимизации при обработке и анализе экспериментальных данных, распознавании образов в системном анализе, оптимизации сложных систем свидетельствует об актуальности применений оптимизационных процедур.

Процедура стохастической оптимизация (ПСО) Кифера–Вольфовица [1] для функции регрессии $C(u)$ состоит в решении уравнения регрессии $C'(u)=0$, т.е. в поиске корня u^* этого уравнения при погрешностях измерения функции регрессии типа гауссовского белого шума. В работе [2] рассмотрен случай непрерывной ПСО, когда функция регрессии зависит от внешней полумарковской среды в схеме усреднения.

В настоящей статье сходимость непрерывной ПСО в полумарковской среде [4] в схеме диффузионной аппроксимации с условиями баланса на сингулярное возмущение функции регрессии устанавливается с использованием компенсирующего оператора расширенного процесса марковского восстановления [5]. При этом рассмотрены асимптотические разложения компенсирующего оператора (разд. 3) и решена проблема сингулярного возмущения [6] для асимптотического представления компенсирующего оператора (разд. 4).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Непрерывная ПСО с полумарковскими переключениями в схеме диффузионной аппроксимации задается эволюционным уравнением

$$\frac{du^{\varepsilon}(t)}{dt}=a(t)C^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}(t);x(t/\varepsilon^2)), \tag{1}$$

где

$$C^{\varepsilon}(u;x)=\nabla_{b(t)}C(u;x)\varphi'(u)+\varepsilon^{-1}C_0(u;x)\varphi'(u),$$

$\nabla_{b(t)}C(u;x)=\dfrac{(C(u+b(t);x)-C(u-b(t);x))}{2b(t)}$, $u\in R$. Функции регрессии $C(u;x)$, $u\in R$, $x\in X$, удовлетворяют условиям существования глобального решения сопровождающих систем [8]

$$du_x(t)/dt=C(u_x(t);x),\quad x\in X.$$

Задача рассматривается в условиях существования единственной точки экстремума u^*. Полумарковский процесс $x(t), t\ge 0$, является регулярным и равномерно эргодическим со стационарным распределением $\pi(B), B\in \mathbf{X}$, в стандартном фазовом пространстве $(X,\mathbf{X})$ и задается полумарковским ядром [5]

$$Q(x, B, t)=P(x, B)G_x(t),$$

где $G_x(t)$ — функция распределения времени пребывания в состоянии $x\in X$.

Стационарное распределение $\pi(B)$ для полумарковского процесса задается равенством

$$\pi(B) := \lim_{t\to\infty} P_t(x, B) = \int_B \rho(dx) g(x) / g\,,$$

где $P_t(x, B) = P(x(t) \in B | x(0) = x)$ — ядро переходных вероятностей полумарковского процесса.

Используем сопровождающий марковский процесс $x_0(t)$, $t \ge 0$, задаваемый генератором

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]\,. \tag{2}$$

Здесь $q(x) := 1/g(x), g(x) := E\theta_x := \int_0^\infty \overline{G}_x(t)dt,\ \overline{G}_x(t) := 1 - G_x(t)$.

Стационарное распределение $\pi(B), B \in \mathbf{X}$, определяет проектор Π в банаховом пространстве $B(X)$ действительных функций $\varphi(x)$, $x \in X$, с супремум-нормой $\|\varphi(x)\| := \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$:

$$\Pi\varphi(x) = \hat{\varphi}\,\mathbf{1}(x),\ \hat{\varphi} := \int_X \pi(dx)\varphi(x),\ \mathbf{1}(x) \equiv 1,\ x \in X.$$

Потенциальный оператор $\mathbf{R_0}$ сопровождающего марковского процесса $x_0(t)$, $t \ge 0$, определяется равенством [5] $\mathbf{R_0} = [\mathbf{Q} + \Pi]^{-1} - \Pi$ и удовлетворяет соотношению $\mathbf{QR_0} = \mathbf{R_0 Q} = I - \Pi$. Стационарное распределение $\rho(B), B \in X$, вложенной цепи Маркова $x_n := x(\tau_n)$, $n \ge 0$, задается уравнением

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx) P(x, B)\,,\ \rho(X) = 1\,.$$

Таким образом, имеет место связь между стационарными распределениями

$$\pi(dx) q(x) = q\rho(dx),\ q := \int_X \pi(dx) q(x) \tag{3}$$

либо

$$\pi(dx) = \rho(dx) g(x) / g,\quad g := \int_X \pi(dx) g(x) = 1/q\,.$$

Функция сингулярного возмущения $C_0(u, x)$, $u \in R$, $x \in X$, удовлетворяет условию баланса [6]

$$\int_X \pi(dx) C_0(u, x) \equiv 0\,. \tag{4}$$

Сходимость ПСО (1) рассматривается в условиях экспоненциальной устойчивости усредненной динамической системы [1, §4.4]:

$$du(t)/dt = C'(u(t))\,,\quad C(u) := \int_X \pi(dx) C(u; x)\,, \tag{5}$$

которая имеет единственную точку экстремума u^* усреднения функции регрессии $C(u)$. Без уменьшения обобщенности примем $u^* = 0$.

Рассмотрим элементы ПСО (1), получаемые вследствие решения проблемы сингулярного возмущения (более подробно они рассмотрены в разд. 4):

$$\mathbf{L}_t(x) V(u) = a(t)\mathbf{C}_t(x) V(u) + a^2(t)\mathbf{L}_0(x) V(u)\,, \tag{6}$$

$$\mathbf{L}_t = a(t)\Pi\mathbf{C}_t(x)\Pi + a^2(t)\Pi\mathbf{L}_0(x)\Pi\,, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{L}_0(x) = \mathbf{C}_0(x)\mathbf{P}\mathbf{R}_\mathbf{0}\mathbf{C}_0(x) + \mu_2(x)\mathbf{C}_0^2(x), \tag{8}$$

$$\mathbf{L}_0 V(u) = \Pi \mathbf{L}_0(x) V(u) \Pi = b(u) V'(u) + \frac{1}{2} B(u) V''(u),$$

$$b(u) = b_0(u) + b_\mu(u), \tag{9}$$

$$b_0(u) := \int_X \pi(dx) C_0(u;x) \mathbf{R}_\mathbf{0} C_0'(u;x), \;\; b_\mu(u) := \int_X \pi(dx) \mu(x) C_0(u;x) C_0'(u;x),$$

$$B(u) = B_0(u) + B_\mu(u), \tag{10}$$

$$B_0(u) := 2\int_X \pi(dx) C_0(u;x) \mathbf{R}_\mathbf{0} C_0(u;x), \; B_\mu(u) := \int_X \pi(dx) \mu(x) C_0(u;x) C_0(u;x),$$

$$\mu(x) := (g_2(x) - 2g^2(x)) / g(x),$$

$g_2(x)$ — второй момент времени пребывания,

$$g_2(x) := \int_0^\infty t^2 G_x(dt) = 2\int_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(t)dt, \quad \overline{G}_x^{(2)}(t) := \int_t^\infty \overline{G}_x(s)ds.$$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. Пусть существует функция Ляпунова $V(u), u \in R$, которая обеспечивает экспоненциальную устойчивость усредненной системы (5) согласно условиям $C1-C7$:

$$C1\colon C'(u)V'(u) \le -c_0 V(u), \; c_0 > 0,$$

$$C2\colon |V'(u)| \le c_1(1 + V(u)),$$

$$C3\colon |\nabla_{b(t)} C(u) - C'(u)| \le kb(t).$$

При $\nabla_{b(t)} \widetilde{C}(u;x) := \nabla_{b(t)} C(u) - \nabla_{b(t)} C(u;x)$, $\widetilde{\mathbf{L}}_t(x) := \mathbf{L}_t(x) - \mathbf{L}_t$ имеют место дополнительные условия:

$$C4\colon \quad |C_0(u;x)[\mathbf{R}_\mathbf{0} C_0(u;x) V'(u)]'| \le c_2(1 + V(u)),$$

$$|C_i(u;x)\mathbf{R}_\mathbf{0}[\nabla_{b(t)} \widetilde{C}(u;x) V'(u)]'| \le c_3(1 + V(u)),$$

$$|C_0(u;x)[C_0(u;x)\mathbf{R}_\mathbf{0}[\nabla_{b(t)} \widetilde{C}(u;x) V'(u)]']'| \le c_4(1 + V(u)),$$

$$|C_i(u;x)\mathbf{R}_\mathbf{0}[C_0(u;x)\mathbf{R}_\mathbf{0}[C_0(u;x) V'(u)]']'| \le c_5(1 + V(u)),$$

$$|C_i(u;x)\mathbf{R}_\mathbf{0}[\widetilde{\mathbf{L}}_t(x) V'(u)]'| \le c_6(1 + V(u)),$$

$$|C_0(u;x)[C_0(u;x)\mathbf{R}_\mathbf{0}[\widetilde{\mathbf{L}}_t(x) V'(u)]']'| \le c_7(1 + V(u)),$$

где $i = \overline{0,1}$. Кроме того, функции распределения $G_x(t), x \in X$, удовлетворяют условию Крамера равномерно по $x \in X$:

$$C5\colon \sup_{x \in X} \int_0^\infty e^{ht} \overline{G}_x(t) dt \le H < \infty, \quad h > 0.$$

Наконец, нормирующие функции $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют условиям

$$C6\colon \int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty, \int_0^\infty a(t)b(t)dt < \infty, \quad t, s \ge 0,$$

$$C7\colon \frac{a(t+\varepsilon^2 s)b'(t+\varepsilon^2 s)}{2b(t+\varepsilon^2 s)} < A,\ a'(t+\varepsilon^2 s) < A,\ \frac{a(t+\varepsilon^2 s)}{a(t)} < A,\ A < \infty .$$

Тогда при каждом положительном $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 — достаточно малое, ПСО (1) сходится при $t \to \infty$ с вероятностью единица к единственной точке экстремума усредненной эволюционной системы (5)

$$P\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1 .$$

3. СВОЙСТВА КОМПЕНСИРУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА ПСО (1)

Рассмотрим расширенный процесс марковского восстановления (ПМВ), задаваемого последовательностью

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon),\ x_n^\varepsilon = x^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon),\ \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n, \tag{11}$$

где $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \ge 0$, $\tau_0 = 0$, — моменты восстановления полумарковского процесса $x(t)$, $t \ge 0$ [2].

Рассмотрим класс неоднородных полугрупп $\mathbf{C}_{t+\varepsilon^2 s}^{\varepsilon, t}(x)$, $t \ge 0$, $x \in X$, порождаемый сопровождающей ПСО, которая на тест-функциях $\varphi(u) \in C^1(R)$ имеет представление

$$\mathbf{C}_{t+\varepsilon^2 s}^{\varepsilon, t}(x)\varphi(u) = \varphi(u_x(t+\varepsilon^2 s)),\ u_x(t) = u\,, \tag{12}$$

где $u_x(t+s) := u_x(t+s, u)$, $u_x(t) := u_x(t, u)$.

Порождающий оператор $\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)$ полугруппы (12) определяется формулой

$$\mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u) = a(t)\mathbf{C}_t(x)\varphi(u) + \varepsilon^{-1}a(t)\mathbf{C}_0(x)\varphi(u)\,, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{C}_t(x)\varphi(u) = \nabla_{b(t)}C(u; x)\varphi'(u),\ \mathbf{C}_0(x)\varphi(u) = C_0(u; x)\varphi'(u)\,.$$

Определение. Компенсирующий оператор (КО) ПМВ, определяемый соотношением

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u; x) = \varepsilon^{-2}q(x)E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u; x) \mid u_n^\varepsilon = u,\ x_n^\varepsilon = x]\,,$$

представим в виде

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u; x) = \varepsilon^{-2}q(x)\left[\int_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}_{t+\varepsilon^2 s}^{\varepsilon, t}(x)\int_X P(x, dy)\varphi(u, y) - \varphi(u; x)\right]. \tag{14}$$

Лемма 1. КО (14) на функциях $\varphi(u; \cdot) \in C^3(R)$ допускает асимптотические представления

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u; x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u; x) + \mathbf{G}_t^{\varepsilon,1}(x)\mathbf{Q}_0\varphi(u; x)\,, \tag{15}$$

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u; x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u; x) + \varepsilon^{-1}a(t)\mathbf{C}_0(x)\mathbf{P}\varphi(u; x) +$$

$$+ a(t)\mathbf{C}_t(x)\mathbf{P}\varphi(u; x) + a^2(t)\mu_2(x)\mathbf{C}_0^2(x)\mathbf{P}\varphi(u; x) + \varepsilon\mathbf{G}_t^{\varepsilon,2}(x)\varphi(u; x)\,. \tag{16}$$

Здесь

$$\mathbf{G}_t^{\varepsilon,1}(x) = \int_0^\infty \overline{G}_x(s)\mathbf{C}_{t+\varepsilon^2 s}^\varepsilon(x)\mathbf{C}_{t+\varepsilon^2 s}^{\varepsilon, t}(x)ds\,, \tag{17}$$

$$\mathbf{G}_t^{\varepsilon,2}(x)\varphi(u;x)=a(t)\mathbf{C}_0(x)\mathbf{F}_t^{\varepsilon,22}(x)\mathbf{Q}_0\varphi(u;x)+\varepsilon\mathbf{C}_0^2(x)\mathbf{F}_t^{\varepsilon,31}(x)\mathbf{Q}_0\varphi(u;x)+$$

$$+\varepsilon\mathbf{C}_0^2(x)\mathbf{G}_t^{\varepsilon,32}(x)\mathbf{Q}_0\varphi(u;x)+\varepsilon\mathbf{G}_t^{\varepsilon,21}(x)\mathbf{Q}_0\varphi(u;x), \tag{18}$$

$$\mathbf{F}_t^{\varepsilon,22}(x)=\int_0^\infty \overline{G}_x^2(s)\frac{a'(t+\varepsilon^2 s)}{a(t)}\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)ds,$$

$$\mathbf{G}_t^{\varepsilon,32}(x)=\int_0^\infty \overline{G}_x^3(s)\frac{a^2(t+\varepsilon^2 s)}{a^2(t)}\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)\mathbf{C}^{\varepsilon}_{t+\varepsilon^2 s}(x)ds,$$

$$\mathbf{F}_t^{\varepsilon,31}(x)=\int_0^\infty \overline{G}_x^3(s)\frac{2a^2(t+\varepsilon^2 s)a'(t+\varepsilon^2 s)}{a^2(t)}\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)ds,$$

$$\mathbf{G}_t^{\varepsilon,21}(x)=\int_0^\infty \overline{G}_x^2(s)([\mathbf{C}^1_{t+\varepsilon^2 s}(x)+\mathbf{C}^2_{t+\varepsilon^2 s}(x)+(\mathbf{C}^{\varepsilon}_{t+\varepsilon^2 s}(x))^2]\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x))ds,$$

$$\mathbf{C}^1_{t+\varepsilon^2 s}(x)=\frac{a'(t+\varepsilon^2 s)b(t+\varepsilon^2 s)-a(t+\varepsilon^2 s)b'(t+\varepsilon^2 s)}{b(t+\varepsilon^2 s)}\nabla_{b(t+\varepsilon^2 s)}C(u;x),$$

$$\mathbf{C}^2_{t+\varepsilon^2 s}(x)=\frac{a(t+\varepsilon^2 s)b'(t+\varepsilon^2 s)}{2b(t+\varepsilon^2 s)}[C'(u+b(t+\varepsilon^2 s);x)+C'(u-b(t+\varepsilon^2 s);x)],$$

$$\mathbf{C}^0_{t+\varepsilon^2 s}(x)=\varepsilon^{-2}a'(t+\varepsilon^2 s)\mathbf{C}_0(x)=a'(t+\varepsilon^2 s)C_0(u;x),$$

$$\mathbf{Q}_0=q(x)\mathbf{P}\varphi(x),\ \mathbf{P}\varphi(x):=\int_X P(x,dy)\varphi(y).$$

Замечание. В условиях С6, С7 теоремы имеет место оценка

$$\mathbf{G}_t^{\varepsilon,2}(x)\varphi(u;x)\le M,\ M<\infty. \tag{19}$$

Доказательство леммы 1. Выделим в (14) генератор $\mathbf{Q}\varphi(x)$ (см. (2)), используя слагаемое $\pm\varphi(u,y)$ во внутреннем интеграле:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u;x)=\varepsilon^{-2}q(x)\left[\int_0^\infty G_x(ds)\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x))\int_X P(x,dy)\varphi(u,y)-\varphi(u;x)\right]=$$

$$=\varepsilon^{-2}q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(u,y)-\varphi(u;x)]+$$

$$+\varepsilon^{-2}q(x)\left[\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)-I]\int_X P(x,dy)\varphi(u,y)\right]. \tag{20}$$

В первом слагаемом (20) получаем генератор сопровождающего марковского процесса, а во втором слагаемом выполняем преобразования, используя интегрирования по частям. Для этого используем уравнение полугруппы $\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)$, $t\ge 0$, $x\in X$:

$$d_s\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)=\varepsilon^2\mathbf{C}^{\varepsilon}_{t+\varepsilon^2 s}(x)\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)ds.$$

По формуле интегрирования по частями имеем

$$\int_0^\infty G_x(ds)[\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)-I]=-\overline{G}_x(s)[\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+\varepsilon^2 s}(x)-I]|_0^\infty+\varepsilon^2\mathbf{G}_t^{\varepsilon,1}(x).$$

Из последнего равенства получаем представление (15).

Для получения асимптотического представления (16) используем интегрирование по частям для $\mathbf{G}_t^{\varepsilon,1}(x)$.

В результате имеем

$$\mathbf{G}_t^{\varepsilon,1}(x) = \mathbf{C}_t^{\varepsilon}(x)g(x) + a^2(t)\mathbf{C}_0^2(x)\mathbf{F}_t^{\varepsilon,23}(x) + \varepsilon^2\mathbf{G}_t^{\varepsilon,2}(x),$$

где $\mathbf{C}_t^{\varepsilon}(x)g(x) = \mathbf{C}_{t+\varepsilon^2 s}^{\varepsilon}(x)\mathbf{C}_{t+\varepsilon^2 s}^{\varepsilon,t}(x)\overline{G}_x^2(s)\Big|_0^{\infty}$.

Отсюда получим

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u;x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(u;x) + \mathbf{C}_t^{\varepsilon}(x)P\varphi(u;x) +$$
$$+ a^2(t)\mathbf{C}_0^2(x)\mathbf{F}_t^{\varepsilon,23}(x)\mathbf{Q}_0\varphi(u;x) + \varepsilon^2\mathbf{G}_t^{\varepsilon,2}(x)\mathbf{Q}_0\varphi(u;x).$$

Интегрирование по частям для оператора $\mathbf{F}_t^{\varepsilon,23}(x)$ дает возможность получить представление

$$\mathbf{F}_t^{\varepsilon,23}(x) = \frac{a^2(t+\varepsilon^2 s)}{a^2(t)}\mathbf{C}_{t+\varepsilon^2 s}^{\varepsilon,t}(x)\overline{G}_x^2(s)|_0^{\infty} + \varepsilon^2\mathbf{F}_t^{\varepsilon,31}(x) + \varepsilon^2\mathbf{G}_t^{\varepsilon,32}(x) =$$
$$= \frac{I}{2g_2(x)} + \varepsilon^2\mathbf{F}_t^{\varepsilon,31}(x) + \varepsilon^2\mathbf{G}_t^{\varepsilon,32}(x).$$

Это дает возможность получить асимптотическое представление генератора (16).

4. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СИНГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Ключевым моментом доказательства теоремы есть решение проблемы сингулярного возмущения для срезанного оператора

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon} = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q} + \varepsilon^{-1}a(t)\mathbf{C}_0(x)\mathbf{P} + a(t)[\mathbf{C}(x) + a(t)\mu_2(x)\mathbf{C}_0^2(x)]\mathbf{P}, \qquad (21)$$

поскольку имеет место оценка (19) для КО (16). Рассмотрим возмущенную функцию Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(u,x,t) = V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u;x) + \varepsilon^2 a(t)V_2(u;x). \qquad (22)$$

Функции возмущения $V_1(u;x)$, $V_2(u;x)$ определяются решением проблемы сингулярного возмущения (РПСВ) [6, с. 50].

Лемма 2. Компенсирующий оператор $\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}$ на возмущенной функции Ляпунова $V^{\varepsilon}(u,x,t)$ при $V(u) \in C^4(R)$ допускает представление

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x,t) = \mathbf{L}_t V(u) + \varepsilon\theta_0^{\varepsilon}(t)V(u), \qquad (23)$$

где

$$\mathbf{L}_t V(u) = a(t)\mathbf{C}_t^{\nabla}V(u) + a^2(t)\mathbf{L}_0 V(u),$$
$$\mathbf{C}_t^{\nabla}V(u) = \nabla_{b(t)}C(u)V'(u),$$
$$\mathbf{L}_0 V(u) = b(u)V'(u) + \frac{1}{2}B(u)V''(u). \qquad (24)$$

Остаточный оператор $\theta_0^{\varepsilon}(t)V(u)$ удовлетворяет условию $|\theta_0^{\varepsilon}(t)V(u)| \le M$.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим оператор $\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}$ на функциях $V^{\varepsilon}(u,x,t)$:

$$\mathbf{L}_{t0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x,t) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}V(u) + \varepsilon^{-1}a(t)[\mathbf{Q}V_1(u;x) + \mathbf{C}_0(x)PV(u)] +$$

$$+a(t)[\mathbf{Q}V_2(u;x)+a(t)\mathbf{C}_0(x)PV_1(u;x)+\mathbf{C}_t(x)PV(u)+$$
$$+a^2(t)\mu_2(x)\mathbf{C}_0^2(x)PV(u)]+\varepsilon\theta_0^\varepsilon(t)V(u).$$

В соответствии с утверждением 5.2 из [5] решение проблемы сингулярного возмущения для оператора (21) на функциях (22) приводит к системе уравнений

$$\mathbf{Q}V(u)=0, \tag{25}$$

$$\mathbf{Q}V_1(u;x)+\mathbf{C}_0(x)PV(u)=0, \tag{26}$$

$$a(t)\mathbf{Q}V_2(u;x)+a(t)\mathbf{C}_0(x)PV_1(u;x)+a(t)\mathbf{C}_t(x)PV(u)+$$
$$+a^2(t)\mu_2(x)\mathbf{C}_0^2(x)PV(u)=\mathbf{L}_tV(u) \tag{27}$$

с остаточным членом в виде

$$\theta_0^\varepsilon(t)V(u)=a^2(t)[[[\mathbf{C}_0(x)+\varepsilon\mathbf{C}_t(x)]\mathbf{P}V_2(u;x)+\mathbf{C}_t(x)\mathbf{P}V_1(u;x)]+ \tag{28}$$
$$+a(t)\mu_2(x)\mathbf{C}_0^2(x)\mathbf{P}[V_1(u;x)+\varepsilon V_2(u;x)]].$$

Уравнение (25) выполняется, поскольку $V(u)$ не зависит от $x\in X$. Условие баланса (4) обеспечивает разрешимость уравнения (26), решение которого можно представить в виде

$$V_1(u;x)=\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x)V(u). \tag{29}$$

Подставляя (29) в равенство (27), получаем (6). Используем следующее соотношение для правой части (8):

$$\mathbf{PR}_0=\mathbf{R}_0+g(x)[\Pi-I]$$

и получим

$$\mathbf{L}_0(x)=\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0+\mathbf{C}_0(x)g(x)\Pi\mathbf{C}_0-g(x)\mathbf{C}_0^2+\mu_2(x)\mathbf{C}_0^2(x)=$$
$$=\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x)+\mu(x)\mathbf{C}_0^2(x). \tag{30}$$

В соответствии с утверждением 5.2 из [5] предельный оператор $\mathbf{L}_t$ в (23) имеет вид $\mathbf{L}_t=\Pi\mathbf{L}_t(x)\Pi$. Таким образом, используя (30) в (6), получим (7). Из первого слагаемого в (7) получим первое слагаемое в (23), из второго слагаемого (7) получим

$$\Pi\mathbf{L}_0(x)\Pi V(u)=\Pi\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0\Pi V(u)+\mu(x)\Pi\mathbf{C}_0^2(x)\Pi V(u)=$$
$$=\Pi\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0C_0(u;x)V'(u)+\mu(x)\Pi\mathbf{C}_0(x)(u;x)V'(u)=$$
$$=\Pi C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0'(u;x)V'(u)+\Pi C_0(u;x)\mathbf{R}_0C_0(u;x)V''(u)+$$
$$+\Pi\mu(x)C_0(u;x)C_0'(u;x)V'(u)+\Pi\mu(x)C_0(u;x)C_0(u;x)V''(u).$$

Исходя из этого, получим (24), откуда легко выделить функцию смещения (9) и матрицу диффузии (10). Из (27), (29), а также равенства

$$V_2(u,x)=\mathbf{R}_0[\mathbf{L}_t(x)-\mathbf{L}_t]V(u)$$

имеем ограниченность остаточного члена $\theta_0^\varepsilon(t)V(u)$ (см. (28)) для $V(u)\in C^4(R)$.

Лемма 3. Компенсирующий оператор на возмущенной функции Ляпунова в условиях теоремы допускает оценку

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u, x, t) \le -c_0 a(t) V(u) + k a(t) b(t)(1+V(u)) + a^2(t) c(1+V(u)) .$$

Доказательство леммы 3. Используя условия C1–C3 из теоремы, имеем возможность получить оценку для первого слагаемого (7):

$$a(t)\nabla_{b(t)} C(u) V'(u) = a(t) |\nabla_{b(t)} C(u) - C'(u) + C'(u)| V'(u) \le$$

$$\le a(t) C'(u) V'(u) + k a(t) b(t) V'(u) \le -c_0 a(t) V(u) + k c_1 a(t) b(t)(1+V(u)) .$$

Далее оценим действие оператора $\mathbf{L}_0$, используя условия C4, C5 теоремы:

$$\mathbf{L}_0 V(u) \le c(1+V(u)) .$$

Ключевое неравенство леммы 3 и ограниченность остаточных членов в леммах 1 и 2 дают возможность завершить доказательство теоремы, используя результаты Невельсона–Хасьминского [1, теорема 2.8.1].

Замечание. Условие C2 теоремы можно заменить неравенством из [1, пример 5.2]

$$|V'(u)| + |\frac{1}{2} B(u) V''(u)| \le c_1 (1+V(u)) .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы получено представление компенсирующего оператора расширенного процесса марковского восстановления для ПСО в схеме диффузионной аппроксимации, что является основным в асимптотическом анализе случайной эволюции. Параметром случайной эволюции служит полумарковский процесс. Полученный результат позволяет рассмотреть асимптотическую нормальность данной процедуры [7], а также условия сходимости модификаций ПСО и флуктуаций с импульсными возмущениями [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1972. — 304 с.

2. Кукурба В.Р., Ярка У.Б. Сходимость одномерной процедуры стохастической оптимизации в полумарковской среде // Приклад. статистика. Актуарная и финансовая математика. — 2012. — № 1. — С. 64–69.

3 Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их применение. — Киев: Наук. думка, 1976. — 184 с.

4. Королюк В.С. Устойчивость стохастических систем в схеме диффузионной аппроксимации // Укр. мат. журнал. — 1998.— **50**, № 1. — С. 36–47.

5. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. — World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.

6. Чабанюк Я.М. Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 3. — С. 133–139.

7. Ljung L., Pflug G., Walk H. Stochastic approximation and optimization of random systems. — Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verlag, 1992. — 113 p.

8. Korolyuk V. S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 185 p.

9. Chabanyuk Ya., Korolyuk V. S., Limnios N. Fluctuations of stochastic systems with average equilibrium point // C.R. Acad. Sci. Ser. I., Paris. — 2007. — **345**. — P. 405–410.

Поступила 09.11.2012