УДК 519.6

П.С. МАЛАЧИВСКИЙ, Я.В. ПИЗЮР, Н.В. ДАНЧАК, Э.Б. ОРАЗОВ

ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТЕПЕННЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ

Ключевые слова: *чебышевское (равномерное) приближение, точки альтернанса, схема Ремеза, погрешность приближения.*

ВВЕДЕНИЕ

Чебышевское приближение экспоненциально-степенным выражением

$$S(a;x)=Ax^b e^{cx^p},\ x>0,\ p\neq 0, \tag{1}$$

относительно неизвестных параметров A, b, c, p используется для описания термометрических характеристик германиевого сенсора [1]. Исследованию свойств чебышевского приближения экспоненциально-степенным выражением посвящены работы [2, 3]. В них определение параметров чебышевского приближения экспоненциально-степенным выражением с относительной погрешностью сведено к линейной задаче чебышевской интерполяции. Чебышевское приближение выражением (1) представляет нелинейную задачу. Ввиду наличия параметра p выражение (1) нельзя свести к линейной задаче. Выражение (1) не удовлетворяет условию Хаара [3], поэтому возникает вопрос существования и единственности чебышевского приближения таким выражением. В связи с этим необходимо исследовать свойства чебышевского приближения выражением (1) и определить класс функций, для которого такое чебышевское приближения существует.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТЕПЕННЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ

Класс функций $f(x)$, для которого существует чебышевское приближение выражением (1) с наименьшей относительной погрешностью, устанавливает теорема.

Теорема. Достаточным условием существования чебышевского приближения выражением (1) для непрерывной положительной функции $f(x)$ ($f(x)\in C[\alpha,\beta]$, $f(x)>0$) с наименьшей относительной погрешностью на отрезке $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$, является выполнение соотношений

$$W>0 \text{ и } W\neq W_0, \tag{2}$$

где

$$W=\frac{\dfrac{\ln(f(z_5))-\ln(f(z_3))}{\ln(z_5)-\ln(z_3)}-\dfrac{\ln(f(z_4))-\ln(f(z_2))}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}}{\dfrac{\ln(f(z_4))-\ln(f(z_2))}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}-\dfrac{\ln(f(z_3))-\ln(f(z_1))}{\ln(z_3)-\ln(z_1)}}, \tag{3}$$

$$W_0=\ln\left(\frac{z_5 z_3}{z_4 z_2}\right)\Big/\ln\left(\frac{z_4 z_2}{z_3 z_1}\right),$$

z_i $(i=\overline{1,5})$ — любые упорядоченные по возрастанию точки на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Доказательство. В соответствии с характеристическим свойством [3] для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей относительной погрешностью на отрезке $[\alpha,\beta]$ достаточно, чтобы система уравнений

$$\frac{f(z_j)-Az_j^b e^{cz_j^p}}{f(z_j)}=(-1)^j\mu,\ \ j=\overline{1,5},\tag{4}$$

имела единственное решение относительно неизвестных параметров A, b, c, p и погрешности μ, где z_i $(i=\overline{1,5})$ — любые упорядоченные по возрастанию точки на отрезке $[\alpha,\beta]$. Покажем, что в случае выполнения условия (2) система уравнений (4) имеет единственное решение.

Исключив из системы уравнений (4) неизвестные A и μ, получим относительно b, c и p систему уравнений

$$\frac{z_{j+2}^b e^{cz_{j+2}^p}}{f(z_{j+2})}=\frac{z_j^b e^{cz_j^p}}{f(z_j)},\ \ j=1,2,3.\tag{5}$$

Так как по условию теоремы функция $f(x)$ положительная, то система (5) эквивалентна следующей системе:

$$b(\ln(z_{j+2})-\ln(z_j))+c(z_{j+2}^p-z_j^p)=\ln(f(z_{j+2}))-\ln(f(z_j)),\ \ j=1,2,3.\tag{6}$$

Система уравнений (6) линейна относительно параметров b и c и нелинейна относительно p. Исключив неизвестные b и c, получим трансцендентное уравнение относительно p

$$G(p)=W,\tag{7}$$

где

$$G(p)=\frac{\dfrac{z_5^p-z_3^p}{\ln(z_5)-\ln(z_3)}-\dfrac{z_4^p-z_2^p}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}}{\dfrac{z_4^p-z_2^p}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}-\dfrac{z_3^p-z_1^p}{\ln(z_3)-\ln(z_1)}},$$

а W определяется по формуле (3). Такое исключение из системы (6) неизвестных b и c допустимо, так как точки z_i $(i=\overline{1,5})$ упорядочены по возрастанию и соответственно коэффициенты при них положительны.

По теореме Коши [4] об отношении приращений функций левую часть уравнения (7) можно представить в виде

$$G(p)=\frac{\xi_3^p-\xi_2^p}{\xi_2^p-\xi_1^p},\tag{8}$$

где ξ_j $(j=\overline{1,3})$ — некоторые средние точки на отрезке $[z_j,z_{j+2}]$ $(\xi_j\in[z_j,z_{j+2}])$.

Применив к (8) теорему Лагранжа [4] о конечных приращениях, получим

$$G(p)=K(\varsigma_2/\varsigma_1)^{p-1},\tag{9}$$

где $\varsigma_1\in[z_1,z_4]$, $\varsigma_2\in[z_2,z_5]$, $K=(\xi_2-\xi_1)/(\xi_3-\xi_2)$.

Поскольку степенная функция строго монотонная, то в соответствии со свойством монотонности средних значений [5] имеем $\xi_j<\xi_{j+1}$ $(j=1,2)$. Отсюда следует, что коэффициент K больше нуля. Итак, для любых упорядоченных по возрастанию чисел z_i $(i=\overline{1,5})$ на отрезке $[\alpha,\beta]$ левая часть уравнения (7) принимает положительное значение.

В точке $p=0$ левая часть уравнения (7) имеет разрыв первого рода. Поскольку

$$\lim_{p\to-\infty}G(p)=0,\ \ \lim_{p\to-0}G(p)=\lim_{p\to+0}G(p)=W_0\ \ \text{и}\ \ \lim_{p\to\infty}G(p)=\infty,$$

для $p\in(-\infty, 0)$ левая часть уравнения (7) принимает значение $G(p)\in(0, W_0)$ на интервале $(0, W_0)$, а для $p\in(0,\infty)$ — на интервале $G(p)\in(W_0,\infty)$. Поэтому при выполнении условия (2) уравнение (7) и соответственно система уравнений (4) имеют единственное действительное решение. Сходимость итерационной схемы Ремеза [3] указывает на существование чебышевского приближения для непрерывных и положительных функций $f(x)$ выражением (1) на отрезке $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$, в случае выполнения условия (2).

Итак, для непрерывных и положительных функций $f(x)$, которые удовлетворяют условию (2), существует чебышевское приближение выражением (1) с наименьшей относительной погрешностью на отрезке $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$. Теорема доказана.

Исследуем достаточное условие (2) существования чебышевского приближения выражением (1). По теореме Коши [4] об отношении приращений функций значение величины W (3) можно представить в виде

$$W=\frac{\xi_3 f'(\xi_3)/f(\xi_3)-\xi_2 f'(\xi_2)/f(\xi_2)}{\xi_2 f'(\xi_2)/f(\xi_2)-\xi_1 f'(\xi_1)/f(\xi_1)}, \tag{10}$$

где ξ_j $(j=\overline{1,3})$ — некоторые средние точки на отрезке $[z_j, z_{j+2}]$ $(\xi_j\in[z_j, z_{j+2}])$.

Из (10) следует, что величина W принимает положительные значения на отрезке $[\alpha,\beta]$, если функция $\psi(x)=xf'(x)/f(x)$ на нем строго монотонная. Значение выражения W совпадает со значением W_0 для функций $f(x)$, которые совпадают с функциями вида

$$Ax^b \quad \text{или} \quad A\ln x, \tag{11}$$

где A и b — произвольные постоянные.

Итак, достаточному условию (2) существования чебышевского приближения выражением (1) с наименьшей относительной погрешностью на отрезке $[\alpha,\beta]$ удовлетворяют, в частности, непрерывно дифференцируемые выпуклые или вогнутые на $[\alpha,\beta]$ функции $f(x)$, за исключением функций (11).

Следует отметить, что условие (2) не является необходимым для существования чебышевского приближения функции $f(x)$ с относительной погрешностью выражением (1). Его выполнение необходимо лишь в точках чебышевского альтернанса. Однако при использовании алгоритма Ремеза для нахождения параметров чебышевской аппроксимации выражением (1) условие (2) должно выполняться во всех точках промежуточных приближений к точкам альтернанса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТЕПЕННЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы, а z_i $(i=\overline{1,5})$ — точки альтернанса, то параметры A, b и c чебышевского приближения функции $f(x)$ выражением (1) с наименьшей относительной погрешностью определяются по формулам

$$c=\frac{\dfrac{\ln(f(z_4))-\ln(f(z_2))}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}-\dfrac{\ln(f(z_3))-\ln(f(z_1))}{\ln(z_3)-\ln(z_1)}}{\dfrac{z_4^p-z_2^p}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}-\dfrac{z_3^p-z_1^p}{\ln(z_3)-\ln(z_1)}}; \tag{12}$$

$$b=\frac{\ln(f(z_3))-\ln(f(z_1))-c(z_3^p-z_1^p)}{\ln(z_3)-\ln(z_1)}; \tag{13}$$

$$A=\frac{2f(z_1)f(z_2)}{f(z_2)z_1^b e^{cz_1^p}+f(z_1)z_2^b e^{cz_2^p}}. \tag{14}$$

Для определения точек альтернанса можно использовать итерационную схему Ремеза с уточнением точек альтернанса по алгоритму Валле–Пуссена [3]. Значение параметра p является решением уравнения (7). Учитывая степенной характер зависимости (9) от p, решение уравнения (7) целесообразно искать как корень уравнения

$$g(p)=V, \tag{15}$$

где $g(p)=\ln(G(p))$, $V=\ln(W)$.

Значение решения p уравнения (15) можно найти итерационным методом Ньютона

$$p_{i+1}=p_i-(g(p_i)-V)/g'(p_i),\ i=0,1,\dots, \tag{16}$$

где

$$g'(p)=\frac{\dfrac{\ln(z_5)z_5^p-\ln(z_3)z_3^p}{\ln(z_5)-\ln(z_3)}-\dfrac{\ln(z_4)z_4^p-\ln(z_2)z_2^p}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}}{\dfrac{z_5^p-z_3^p}{\ln(z_5)-\ln(z_3)}-\dfrac{z_4^p-z_2^p}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}}-$$

$$-\frac{\dfrac{\ln(z_4)z_4^p-\ln(z_2)z_2^p}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}-\dfrac{\ln(z_3)z_3^p-\ln(z_1)z_1^p}{\ln(z_3)-\ln(z_1)}}{\dfrac{z_4^p-z_2^p}{\ln(z_4)-\ln(z_2)}-\dfrac{z_3^p-z_1^p}{\ln(z_3)-\ln(z_1)}};$$

$$p_0=\operatorname{sign}(W-W_0)\left|1+\frac{V}{z_4-z_2}\right|. \tag{17}$$

Выбор начального значения p_0 по формуле (17) является достаточно близким к решению уравнения (7) и обеспечивает совпадение их знаков, что необходимо для соблюдения устойчивости итерационного метода (16). Функция $g(p)$ имеет разрыв в точке $p=0$, и переход промежуточных значений p_i через эту точку может нарушить сходимость метода (16). Выбор начального значения p_0 по формуле (17) обеспечивает обход точки разрыва $p=0$ функции $g(p)$ при уточнении решения уравнения по итерационной схеме (16).

При использовании программы, которая осуществляет итерационный процесс (16), его сходимость достигалась за три–четыре итерации.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТЕПЕННЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ

Известно [2], что взвешенная погрешность чебышевского приближения функции $f(x)$ нелинейным относительно параметров выражением $F(a;x)$ вычисляется по формуле

$$\mu=\frac{\eta(f,F)}{2^{2m+1}(m+1)!\,w(x)}\Delta x^{m+1}, \tag{18}$$

где $\Delta x=\beta-\alpha$, а $m+1$ — количество параметров. Функцию $\eta(f,F)$ называют ядром погрешности приближения функции $f(x)$ выражением $F(a;x)$. Для того чтобы применить формулу (18), нужно знать аналитическое выражение для ядра погрешности приближения конкретным нелинейным выражением $F(a;x)$.

Для оценки погрешности приближения экспоненциально-степенным выражением (1) прологарифмируем его: $U(a;x)=\ln A+b\ln x+Cx^p$ и функцию x^p заменим ее разложением в ряд Тейлора

$$U(a;x)=\ln A+a_0+\sum_{i=1}^{m-1}a_ix^i+b\ln x. \tag{19}$$

Первые два слагаемых в (19) образуют свободный член полинома степени $m-1$. В работе [3] получено аналитическое выражение для ядра погрешности приближения нелинейным выражением $\psi_m(x)$ в виде суммы полинома и однопараметрической нелинейной функции:

$$\psi_m(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i x^{i-1}+b\varphi(x),\ \ m=1,2,\ldots,\tag{20}$$

где $\psi(x)\in C^{m+1}[\alpha,\beta]$, $\varphi^{(m)}(x)\neq 0$ при $x\in[\alpha,\beta]$. Ядро погрешности приближения функции $f(x)$ выражением (20) имеет вид

$$\eta(f,\psi_m)=f^{(m+1)}(x)-\varphi^{(m+1)}(x)f^{(m)}(x)/\varphi^{(m)}(x).$$

В данном случае $\varphi(x)=\ln x$ и формула для ядра погрешности приближения выражением $U(a;x)$ (19) определяется как

$$\eta(f,U)=f^{(m+1)}(x)-\frac{m}{x}f^{(m)}(x).\tag{21}$$

В соответствии со свойством 4 ядер погрешностей из работы [3] ядро погрешности приближения функции $f(x)$ экспонентой от выражения $F(a;x)$ имеет вид

$$\eta(f,\exp F)=f(x)\eta(\ln f,F),$$

где $f(x)\in C^{m+1}[\alpha,\beta]$, $f(x)>0$, $x\in[\alpha,\beta]$. Таким образом, для ядра погрешности приближения функции $f(x)\in C^{m+1}[\alpha,\beta]$ экспоненциально-степенным выражением (1) получим оценку

$$\eta(f,S)=\eta(f,\exp U)=f(x)\eta(\ln f,U)=$$
$$=f(x)\left[(\ln f(x))^{(m+1)}+\frac{m}{x}(\ln f(x))^{(m)}\right].\tag{22}$$

Учитывая, что в выражении (1) количество параметров равно $m+1=4$, для ядра погрешности приближения функции $f(x)$ экспоненциально-степенным выражением (1) получим

$$\eta(f,S)=f(x)\left[(\ln f(x))^{(4)}+\frac{3}{x}(\ln f(x))^{(3)}\right]=f^{(4)}(x)-\frac{3(f''(x))^2+4f'(x)f''(x)}{f(x)}+$$
$$+12\frac{(f'(x))^2 f''(x)}{f^2(x)}-6\frac{(f'(x))^4}{f^3(x)}+\frac{3}{x}\left(f''(x)-3\frac{f'(x)f''(x)}{f(x)}+2\frac{(f'(x))^3}{f^2(x)}\right).\tag{23}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достаточным условием существования чебышевского приближения экспоненциально-степенным выражением (1) с наименьшей относительной погрешностью является выполнение неравенства (2). Тогда параметры чебышевского приближения экспоненциально-степенным выражением (1) определяют по формулам (12)–(14). Значение параметра p находят решением трансцендентного уравнения (7) с использованием метода Ньютона (16). Оценка погрешности чебышевского приближения определяется по формуле (18), а ее ядро — по формуле (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mitin V.F., Kholevchuk V.V., Kolodych B.P. Ge-on-GaAs film resistance thermometers: Low-temperature conduction and magnetoresistance // Cryogenics. — 2011. — **51**, N 1. — P. 68–73.
2. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. — Киев: Наук. думка, 1980. — 352 с.
3. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. — М.: Мир, 1977. — 831 с.
5. Малачівський П. Чебишовське наближення сумою многочлена і функції з одним нелінійним параметром // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2005. — Вип. 1. — С. 134–145.

Поступила 18.12.2012