УДК 517.95:519.86:539.3

В.А. СТОЯН, К.В. ДВИРНИЧУК

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРЕХМЕРНОГО ПОЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ

Ключевые слова: *толстые упругие плиты, динамика систем с распределенными параметрами, математическое моделирование.*

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические основы исследования динамики упругих конструкций типа пластина и оболочка, получившие развитие во второй половине прошлого века, строились [1–3] в предположении малости толщины последних в сравнении с их основными геометрическими размерами. Разрешающие дифференциальные уравнения таких конструкций, как правило, двухмерные, рассмотрены только для частных [4–6] классически определенных начально-краевых условий. Исследование динамики пластин и оболочек конечной толщины всегда сопряжено [7–9] с определенными численно-аналитическими проблемами, которые возникают как при построении математической модели объекта и формировании начально-краевых наблюдений за ним, так и при решении задачи, связанной как с математической, так и вычислительной сложностью. Существует много [9, 10] подходов к построению уточненных уравнений динамики пластин конечной толщины, которые, однако, не были лишены определенных механических моделей. Безгипотезное решение проблемы, предложенное А.И. Лурье [11], ограничивалось только статическим случаем. Обобщение полученных в [11] результатов позволило развить [12] полутрехмерную математическую модель динамических процессов, которые имеют место в осесимметрически загруженном упругом слое. Здесь двухмерные дифференциальные уравнения, параметрически зависящие от вырожденной координаты слоя, полностью описывают трехмерное поле его упругих динамических деформаций. При некоторых ограничениях результаты работы [12] были распространены [13, 14] и на динамику упругого слоя, отнесенного к декартовой системе координат. Нерешенными при этом остались вопросы применения моделей к исследованию динамики толстых упругих плит конечных размеров. Решению начально-краевых задач динамики ограниченных в плане упругих плит посвящена настоящая статья. Применение методики [15, 16] математического моделирования начально-краевых внешнединамических воздействий пространственно распределенной динамической системы к механическим объектам, описанным моделями [13, 14], позволило решить эти задачи без ограничений на форму объекта, а также объем и качество информации о его начально-краевом состоянии. В настоящей статье построено поле динамических прогибов упругой плиты, которое, точно удовлетворяя ее дифференциальной модели, за среднеквадратическим критерием согласуется с дискретно- и непрерывно-заданными наблюдениями за ней. Установлены условия точности и однозначности полученного таким образом решения задачи.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамику плиты, вырезанной цилиндром $\Gamma(x, y) = 0$ из упругого слоя, ограниченного плоскостями $z = \pm h$ декартовой системы координат x, y, z. Обозначим S_0 пространственную область плиты. Предположим, что поверхности ее находятся под воздействием внешнединамических усилий $q_k^{\pm}(x, y, t)$ (здесь $t \in [0, T]$ — временная координата, $k = \overline{1, 2}$) таких, что

$$q_1^{\pm}(x, y, t) = \sigma_z(x, y, t)_{|z=\pm h},$$

$$q_2^{\pm}(x, y, t) = \tau_{zx}(x, y, t)_{|z=\pm h} + \tau_{zy}(x, y, t)_{|z=\pm h}, \tag{1}$$

где σ_z, τ_{zx}, τ_{zy} — общепринятые [1, 2] обозначения нормальных и касательных (в направлениях осей Ox, Oy) напряжений точки (x, y, z) плиты.

Построим функцию $w(x, y, z, t)$ смещений, поперечных к срединной плоскости $z = 0$ плиты, в предположении, что

$$L_r^0(\partial_t) w(s)_{|t=0, \sigma \in S_0} = Y_r^0(\sigma) \quad (r = \overline{1, R_0}), \tag{2}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) w(s)_{\substack{|t \in [0,T] \\ |\sigma = \sigma^\Gamma \in S_\Gamma}} = Y_\rho^\Gamma(s) \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma}). \tag{3}$$

Здесь $S_\Gamma = \Gamma(x, y) \times [-h, h]$; $\sigma = (x, y, z)$; $s = (\sigma, t)$; ∂_t и $\partial_\sigma = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — производные по временной координате t и пространственным координатам x, y, z; $L_r^0(\partial_t)$ $(r = \overline{1, R_0})$ и $L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ — линейные дифференциальные операторы. На количество начальных R_0 и краевых R_Γ наблюдений за смещениями $w(s)$ особых ограничений накладывать не будем.

Будем допускать также, что наблюдения (2), (3) за начально-краевым состоянием плиты могут выполняться и в дискретном режиме, т.е. когда

$$L_r^0(\partial_t) w(s)_{\substack{|t=0 \\ |\sigma = \sigma_j^0 \in S_0}} = Y_{rj}^0 \quad (r = \overline{1, R_0},\ j = \overline{1, J_0}), \tag{4}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) w(s)_{\substack{|t = t_j \in [0,T] \\ |\sigma = \sigma_j^\Gamma \in S_\Gamma}} = Y_{\rho j}^\Gamma \quad (\rho = \overline{1, R_\Gamma},\ j = \overline{1, J_\Gamma}). \tag{5}$$

При построении функции $w(s)$ поперечных динамических смещений точек рассматриваемой плиты будем исходить из того, что [13]

$$w(s) = w^{(1)}(s) + w^{(2)}(s), \tag{6}$$

где

$$Q^{(l)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) w^{(l)}(s) =$$

$$= d_1^{(l)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) q_1^{(l)}(x, y, t) + d_2^{(l)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) q_2^{(l)}(x, y, t) \quad (l = \overline{1, 2}) \tag{7}$$

при

$$Q^{(1)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) =$$

$$= (\Delta + D_2^2)((\lambda + 2\mu) D_1^2 - \lambda\Delta) \cos(hD_1) \frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 4\mu\Delta D_1^2 \frac{\sin(hD_1)}{D_1} \cos(hD_2),$$

$$Q^{(2)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) =$$

$$= (\Delta + D_2^2)(\lambda\Delta - (\lambda + 2\mu)D_1^2)\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(hD_2) + 4\mu\Delta D_2^2 \cos(hD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2}, \quad (8)$$

$$d_1^{(1)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = D_1^2\left[(\Delta + D_2^2)\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 2\Delta\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\frac{\sin(zD_2)}{D_2}\right],$$

$$d_2^{(1)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) =$$

$$= 2d\left[\frac{1}{\mu}((\lambda + 2\mu)D_1^2 - \lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(zD_2)}{D_2} - 2D_1^2\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\cos(hD_2)\right],$$

$$d_1^{(2)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) = (\Delta + D_2^2)\cos(zD_1)\cos(hD_2) - 2\Delta\cos(hD_1)\cos(zD_2), \quad (9)$$

$$d_2^{(2)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) =$$

$$= 2d\left[2D_2^2\cos(zD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2} + \frac{1}{\mu}(\lambda\Delta - (\lambda + 2\mu)D_1^2)\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(zD_2)\right],$$

$$q_1^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{2}(q_1^+(x, y, t) + q_1^-(x, y, t)),$$

$$q_2^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{2}(q_2^+(x, y, t) - q_2^-(x, y, t)),$$

$$q_1^{(2)}(x, y, t) = \frac{1}{2}(q_1^+(x, y, t) - q_1^-(x, y, t)),$$

$$q_2^{(2)}(x, y, t) = \frac{1}{2}(q_2^+(x, y, t) + q_2^-(x, y, t)). \quad (10)$$

Здесь и далее $\Delta = d(\partial_x + \partial_y)$, $D_1^2 = \Delta_1 - \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2$, $\Delta_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\Delta + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\Delta_2$, $D_2^2 = \Delta_2 - \frac{1}{c_2^2}\partial_t^2$, $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, λ и μ — модули упругости материала плиты, $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ — скорости распространения упругих волн расширения и сдвига в бесконечной упругой среде, а оператор d удовлетворяет соотношению $\partial_x u + \partial_y v = d(u + v)$.

Здесь и далее $\frac{\sin(zD_m)}{D_m}$ и $\cos(zD_m)$ $(m = \overline{1, 2})$ — дифференциальные операторы, значения которых получим после разложения функций $\sin(zD_m)$ и $\cos(zD_m)$ в ряды по степеням zD_m и возвращения операторного значения символам D_1^2, D_2^2. Удержание различного числа членов в этих разложениях позволяет получить определенной точности модель динамических смещений $w(s)$ точек рассматриваемой плиты.

КРИТЕРИЙ И ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Структура дифференциального уравнения (7), которым определяется зависимость смещений $w^{(l)}(s)$ $(l=\overline{1,2})$ от внешнединамических возмущающих факторов $q_1^{\pm}(x,y,t)$ и $q_2^{\pm}(x,y,t)$, а также универсальность задания начально-краевых условий (2), (3) и (4), (5) делают задачу построения функции $w(s)$ трудно разрешимой как аналитически, так и численно. Проблема заключается в некорректности (по количеству и качеству) начально-краевых наблюдений за динамикой рассматриваемой плиты при точно сформулированной математической модели последней. Исходя из этого функцию $w(s)$, определенную согласно (6), построим так, чтобы:

1) составляющие $w^{(l)}(s)$ $(l=\overline{1,2})$ этой функции точно удовлетворяли дифференциальному соотношению (7);

2) сумма (6) составляющих $w^{(l)}(s)$ $(l=\overline{1,2})$ (т.е. функция смещений $w(s)$) за среднеквадратическим критерием удовлетворяла начально-краевым наблюдениям (2), (3) или (4), (5), что эквивалентно

$$\Phi_1=\sum_{r=1}^{R_0}\int_{S_0}(L_r^0(\partial_t)w(s)|_{t=0}-Y_r^0(\sigma))^2d\sigma+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_{S_\Gamma\times[0,T]}(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)-Y_\rho^\Gamma(s))^2ds\to\min_{w(s)},\tag{11}$$

$$\Phi_2=\sum_{r=1}^{R_0}\sum_{j=1}^{J_0}\left(L_r^0(\partial_t)w(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in S_0}}-Y_{rj}^0\right)^2+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{j=1}^{J_\Gamma}\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)|_{s=s_j^\Gamma\in S_\Gamma\times[0,T]}-Y_{\rho j}^\Gamma\right)^2\to\min_{w(s)}\tag{12}$$

при непрерывно- (согласно (2), (3)) и дискретно-определенных (согласно (4), (5)) начально-краевых условиях плиты.

Для решения задачи построения удовлетворяющей этим условиям функции $w(s)$ воспользуемся методикой решения подобных задач, предложенной в [12] и развитой в [15, 16]. Согласно [15, 16] функцию $w(s)$ представим суммой

$$w(s)=w^{(1)}(s)+w^{(2)}(s)=\sum_{l=1}^{2}(w_\infty^{(l)}(s)+w_0^{(l)}(s)+w_\Gamma^{(l)}(s)),\tag{13}$$

составляющие $w_\infty^{(l)}(s)$, $w_0^{(l)}(s)$ и $w_\Gamma^{(l)}(s)$ $(l=\overline{1,2})$ которой определяются функциями $G^{(1)}(\xi-\xi',z)$ и $G^{(2)}(\xi-\xi',z)$ аргумента $\xi=(x,y,t)$ такими, что

$$Q^{(l)}(\partial_x,\partial_y,\partial_t)G^{(l)}(\xi-\xi',z)=\sum_{k=1}^{2}d_k^{(l)}(\partial_x,\partial_y,z,\partial_t)\delta(\xi-\xi')\ \ (l=\overline{1,2})\tag{14}$$

(здесь $\delta(\xi-\xi')$ — δ-функция Дирака). Не останавливаясь детально на особенностях решения уравнения (14), заметим, что определенная согласно этому уравнению функция

$$G^{(l)}(\xi-\xi',z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2}d_k^{(l)}(i\lambda,i\mu,z,i\theta)}{Q^{(l)}(i\lambda,i\mu,i\theta)}e^{i\lambda(x-x')+i\mu(y-y')+i\theta(t-t')}d\lambda d\mu d\theta \tag{15}$$

(здесь i — мнимая единица). Из (15) с учетом (8), (9) заключаем, что

$$G^{(l)}(\xi-\xi',z)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2}d_k^{(l)}(p_1,p_2,z,q)}{Q^{(l)}(p_1,p_2,q)}e^{p_1(x-x')+p_2(y-y')+q(t-t')}dp_1dp_2dq. \tag{16}$$

Заметим, что соотношение (16), которое определяет аналитические выражения функций $G^{(1)}(\xi-\xi',z)$ и $G^{(2)}(\xi-\xi',z)$, упрощается, если математическая модель (7) рассматривается с определенной точностью. Так, при точности h^3 для осесимметрической задачи [12, 13] динамики плиты, что соответствует неклассическим уточненным математическим моделям [10], компоненты $Q^{(l)}(p_1,p_2,q)$, $d_k^{(l)}(p_1,p_2,z,q)$ имеют вид

$$Q^{(1)}(p_1,p_2,q)=\mu h\{\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)-\frac{\rho}{\mu}q^2\}-$$

$$-\mu\frac{h^3}{3!}\left\{\frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)^2-\frac{4(2\lambda^2+8\lambda\mu+7\mu^2)}{(\lambda+2\mu)^2}(p_1^2+p_2^2)\frac{\rho}{\mu}q^2+\frac{\lambda+5\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\rho}{\mu}q^2\right)^2\right\},$$

$$Q^{(2)}(p_1,p_2,q)=h\rho q^2+\mu\frac{h^3}{3!}\times$$

$$\times\left\{\frac{8(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)^2-\frac{4(3\lambda+4\mu)}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)\frac{\rho}{\mu}q^2+\frac{3\lambda+7\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\rho}{\mu}q^2\right)^2\right\}, \tag{17}$$

$$d_1^{(1)}(p_1,p_2,z,q)=zh\left\{p_1^2+p_2^2-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}q^2\right\},$$

$$d_2^{(1)}(p_1,p_2,z,q)=z(p_1+p_2)\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}+\frac{1}{2}h^2\left[p_1^2+p_2^2-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}q^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{3!}z^3(p_1+p_2)\left\{\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)-\frac{\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2}{(\lambda+2\mu)^2}\frac{\rho}{\mu}q^2\right\},$$

$$d_1^{(2)}(p_1,p_2,z,q)=1-\frac{1}{2}h^2\left\{\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)-\frac{\rho}{\mu}q^2\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}z^2\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)+\frac{\rho}{\lambda+2\mu}q^2\right\},$$

$$d_2^{(2)}(p_1,p_2,z,q)=z(p_1+p_2)\left\{1-\frac{1}{3!}h^2\left[\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}(p_1^2+p_2^2)-\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\rho}{\mu}q^2\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}z^2h(p_1+p_2)\left\{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(p_1^2+p_2^2-\frac{\rho}{\mu}q^2\right)\right\}. \tag{18}$$

Методика вычисления интегралов (16), записанных с учетом (17), (18), детально рассмотрена в [17]. Открытым при этом остается вопрос построения составляющих $w_\infty^{(l)}(s)$, $w_0^{(l)}(s)$, $w_\Gamma^{(l)}(s)$, с помощью которых согласно (13) определяется функция $w(s)$. Выражения для $w_0^{(l)}(s)$ и $w_\Gamma^{(l)}(s)$ построим ниже для каждой задачи (1), (2), (3) и (1), (4), (5). Составляющие $w_\infty^{(l)}(s)$, которые являются общими для обеих задач, представим [15, 16] соотношениями

$$w_\infty^{(l)}(s) = \int_S G^{(l)}(\xi - \xi', z) q^{(l)}(\xi') d\xi' \quad (l = \overline{1,2}), \tag{19}$$

где $q^{(l)}(\xi') = \sum_{k=1}^{2} q_k^{(l)}(\xi')$ $(l = \overline{1,2})$, $S = (S_0 \cap (\{z = h\} \cup \{z = -h\})) \times [0, \mathrm{T}]$, $s \in S_0^T =$ $= \{s = (\sigma, t) : \sigma \in S_0;\ t \in [0, \mathrm{T}]\}$.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ ПЛИТЫ, ДИСКРЕТНО НАБЛЮДАЕМОЙ ЗА НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ СОСТОЯНИЕМ

Рассмотрим особенности построения определенной соотношением (13) функции $w(s)$, которая при удовлетворяющих уравнению (7) составляющих $w^{(l)}(s)$ $(l = \overline{1,2})$ за среднеквадратическим критерием (12) согласуется с наблюдениями (4), (5) за начально-краевым состоянием рассматриваемой плиты.

Представленная согласно (13) функция $w(s)$ будет точно удовлетворять [15, 16] дифференциальной модели (7), если при определенных согласно (16) функциях $G^{(1)}(\xi - \xi', z)$ и $G^{(2)}(\xi - \xi', z)$ в дополнение к (19) составляющие $w_0^l(s)$ и $w_\Gamma^{(l)}(s)$ $(l = \overline{1,2})$, фигурирующие в (13), представить соотношениями

$$w_0^{(l)}(s) = \int_{S^0} G^{(l)}(\xi - \xi', z) u_0^{(l)}(\xi') d\xi', \tag{20}$$

$$w_\Gamma^{(l)}(s) = \int_{S^\Gamma} G^{(l)}(\xi - \xi', z) u_\Gamma^{(l)}(\xi') d\xi' \quad (l = \overline{1,2}). \tag{21}$$

Функции $u_0^{(l)}(\xi')$ $(\xi' \in S^0)$ и $u_\Gamma^{(l)}(\xi')$ $(\xi' \in S^\Gamma)$ этих соотношений при

$$S^0 = (S_0 \cap (\{z = h\} \cup \{z = -h\})) \times (-\infty, 0],$$

$$S^\Gamma = ((R^3 \setminus S_0) \cap (\{z = h\} \cup \{z = -h\})) \times [0, \mathrm{T}]$$

определим согласно (12) или, что эквивалентно,

$$\Phi_2 \to \min_{\substack{u_0^{(l)}(\xi') \\ u_\Gamma^{(l)}(\xi')\ (l = \overline{1,2})}} . \tag{22}$$

Для решения задачи (22) выражение (13), записанное с учетом (19)–(21), подставим в (4), (5). В результате получим систему интегральных уравнений

$$\int A(\xi') \bar{u}(\xi') d\xi' = \bar{Y} \tag{23}$$

для определения вектор-функции

$$\bar{u}(\xi) = \mathrm{col}\left(\begin{pmatrix} u_0^{(l)}(\xi), & \xi \in S^0 \\ u_\Gamma^{(l)}(\xi), & \xi \in S^\Gamma \end{pmatrix}, l = \overline{1,2} \right)$$

при известном векторе $\bar{Y} = \begin{pmatrix} Y^0 \\ Y^\Gamma \end{pmatrix}$ и матричной функции

$$A(\xi) = \mathrm{str}\left(\begin{pmatrix} A_{11}^{(l)}(\xi), \ \xi \in S^0 & A_{12}^{(l)}(\xi), \ \xi \in S^\Gamma \\ A_{21}^{(l)}(\xi), \ \xi \in S^0 & A_{22}^{(l)}(\xi), \ \xi \in S^\Gamma \end{pmatrix}, \ l = \overline{1,2} \right),$$

в которых

$$Y^0 = \mathrm{col}\,((\bar{Y}_{rj}^0, \ j = \overline{1, J_0}), \ r = \overline{1, R_0}),$$

$$Y^\Gamma = \mathrm{col}\,((\bar{Y}_{\rho j}^\Gamma, \ j = \overline{1, J_\Gamma}), \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$\bar{Y}_{rj}^0 = Y_{rj}^0 - L_r^0(\partial_t) w_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ \sigma=\sigma_j^0 \in S_0}} \quad (j = \overline{1, J_0}, \ r = \overline{1, R_0}),$$

$$\bar{Y}_{\rho j}^\Gamma = Y_{\rho j}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) w_\infty(s)_{|s = s_j^\Gamma \in S_\Gamma \times [0,T]} \ \ (j = \overline{1, J_\Gamma}, \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{1i}^{(l)}(\xi') = \mathrm{col}\left(\left(L_r^0(\partial_t) G^{(l)}(\xi - \xi', z)\Big|_{\substack{t=0 \\ \sigma=\sigma_j^0 \in S_0}}, \ j = \overline{1, J_0} \right), \ r = \overline{1, R_0} \right),$$

$$A_{2i}^{(l)}(\xi') = \mathrm{col}\left(\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) G^{(l)}(\xi - \xi', z)_{|s = s_j^\Gamma \in S_\Gamma \times [0,T]}, \ j = \overline{1, J_\Gamma} \right), \rho = \overline{1, R_\Gamma} \right)$$

$$(l, \ i = \overline{1,2}).$$

Заметим, что интегрирование в (23) проводится по области изменения аргумента ξ векторной $\bar{u}(\xi)$ и матричной $A(\xi)$ функций.

Результатом псевдообращения системы (23) такого, чтобы

$$\left\| \int A(\xi) \bar{u}(\xi) d\xi - \bar{Y} \right\|^2 \to \min_{\bar{u}(\xi)}, \tag{24}$$

будет [16] вектор-функция

$$\bar{u}(\xi) = A^T(\xi) P_1^+ \bar{Y} + \bar{v}(\xi) - A^T(\xi) P_1^+ A_v \tag{25}$$

при любой интегрируемой в области определения вектор-функции

$$\bar{v}(\xi) = \mathrm{col}\,(\mathrm{col}\,((v_0^{(l)}(\xi), \ \xi \in S^0), \ (v_\Gamma^{(l)}(\xi), \ \xi \in S^\Gamma)), \ l = \overline{1,2}),$$

матрице и векторе

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \ A_v = \begin{pmatrix} A_{v1} \\ A_{v2} \end{pmatrix},$$

в которых

$$P_{ij} = \sum_{l=1}^{2} \left(\int_{S^0} A_{i1}^{(l)}(\xi) (A_{j1}^{(l)}(\xi))^T d\xi + \int_{S^\Gamma} A_{i2}^{(l)}(\xi) (A_{j2}^{(l)}(\xi))^T d\xi \right),$$

$$A_{vi} = \sum_{l=1}^{2} \left(\int_{S^0} A_{i1}^{(l)}(\xi) v_0^{(l)}(\xi) d\xi + \int_{S^\Gamma} A_{i2}^{(l)}(\xi) v_\Gamma^{(l)}(\xi) d\xi \right) (i, j = \overline{1,2}).$$

Из (25) находим

$$u_0^{(l)}(\xi)=((A_{11}^{(l)}(\xi))^T,(A_{21}^{(l)}(\xi))^T)P_1^+\bar{Y}+v_0^{(l)}(\xi)-((A_{11}^{(l)}(\xi))^T,(A_{21}^{(l)}(\xi))^T)P_1^+A_v$$

$$(\xi\in S^0),$$

$$u_\Gamma^{(l)}(\xi)=((A_{12}^{(l)}(\xi))^T,(A_{22}^{(l)}(\xi))^T)P_1^+\bar{Y}+v_\Gamma^{(l)}(\xi)-((A_{12}^{(l)}(\xi))^T,(A_{22}^{(l)}(\xi))^T)P_1^+A_v$$

$$(\xi\in S^\Gamma)\ \ (l=\overline{1,2}).$$

Исходя из этого с учетом (19)–(21) получаем решение задачи построения функции $w(s)$, определенной согласно (12).

Точность, с которой построенная таким образом функция $w(s)$ будет согласовываться с наблюдениями (4), (5) за начально-краевым состоянием плиты, определяется точностью решения задачи (12) или (что эквивалентно) задачи (22). Последнее определяется [16] среднеквадратической точностью

$$\varepsilon^2=\min_{\bar{u}(\xi)}\left\|\int A(\xi)\bar{u}(\xi)d\xi-\bar{Y}\right\|^2=\bar{Y}^T\bar{Y}-\bar{Y}^T P_1 P_1^+\bar{Y}, \tag{26}$$

с которой решена система (23).

Решение рассматриваемой задачи будет однозначным ($\bar{v}(\xi)\equiv 0$), если [16]

$$\lim_{N\to\infty}\det[A^T(\xi_i)A(\xi_j)]_{i,j=1}^N>0. \tag{27}$$

Задача (12) построения функции $w(s)$ может быть успешно решена, если моделирующие функции $u_0^{(1)}(\xi)$, $u_\Gamma^{(1)}(\xi)$, $u_0^{(2)}(\xi)$ и $u_\Gamma^{(2)}(\xi)$ определять векторами

$$u_0^{(l)}=\mathrm{col}\,(u_{0m}^{(l)}=u_0^{(l)}(\xi_m^{0(l)}),\ m=\overline{1,M_0^{(l)}}), \tag{28}$$

$$u_\Gamma^{(l)}=\mathrm{col}\,(u_{\Gamma m}^{(l)}=u_\Gamma^{(l)}(\xi_m^{\Gamma(l)}),\ m=\overline{1,M_\Gamma^{(l)}})\ \ (l=\overline{1,2}) \tag{29}$$

их значений $u_{0m}^{(l)}$ $(m=\overline{1,M_0^{(l)}})$ и $u_{\Gamma m}^{(l)}$ $(m=\overline{1,M_\Gamma^{(l)}})$ $(l=\overline{1,2})$ в точках $\xi_m^{0(l)}\in S^0$ $(m=\overline{1,M_0^{(l)}})$ и $\xi_m^{\Gamma(l)}\in S^\Gamma$ $(m=\overline{1,M_\Gamma^{(l)}})$ соответственно.

В этом случае с учетом функций $w_\infty^{(l)}(s)$ $(l=\overline{1,2})$ составляющие $w_0^{(l)}(s)$ и $w_\Gamma^{(l)}(s)$ $(l=\overline{1,2})$ в (13) представим соотношениями

$$w_0^{(l)}(s)=\sum_{m=1}^{M_0^{(l)}}G^{(l)}(\xi-\xi_m^{0(l)},z)u_{0m}^{(l)}, \tag{30}$$

$$w_\Gamma^{(l)}(s)=\sum_{m=1}^{M_\Gamma^{(l)}}G^{(l)}(\xi-\xi_m^{\Gamma(l)},z)u_{\Gamma m}^{(l)}\ \ (l=\overline{1,2}). \tag{31}$$

В результате задача (12) сведется к построению вектора

$$\bar{u}=\mathrm{col}\,(\mathrm{col}\,(u_0^{(l)},u_\Gamma^{(l)}),\ l=\overline{1,2})=\arg\min_{\substack{u_0^{(l)}\in R^{M_0^{(l)}},\\ u_\Gamma^{(l)}\in R^{M_\Gamma^{(l)}}\ (l=\overline{1,2})}}\Phi_2, \tag{32}$$

что эквивалентно среднеквадратическому обращению системы линейных алгебраичных уравнений

$$A\bar{u} = \bar{Y}. \tag{33}$$

Векторы $\bar{u}$ и $\bar{Y}$ определены выше и

$$A = \mathrm{str}\left(\begin{pmatrix} A_{11}^{(l)} & A_{12}^{(l)} \\ A_{21}^{(l)} & A_{22}^{(l)} \end{pmatrix} l = \overline{1, 2}\right),$$

при

$$A_{11}^{(l)} = \mathrm{col}\left(\left(\mathrm{str}\left(L_r^0(\partial_t)G^{(l)}(\xi - \xi_m^{0(l)}, z)\Big|_{\substack{t=0 \\ \sigma=\sigma_j^0 \in S_0}}, m = \overline{1, M_0^{(l)}}\right), j = \overline{1, J_0}\right), r = \overline{1, R_0}\right),$$

$$A_{12}^{(l)} = \mathrm{col}\left(\left(\mathrm{str}\left(L_r^0(\partial_t)G^{(l)}(\xi - \xi_m^{\Gamma(l)}, z)\Big|_{\substack{t=0 \\ \sigma=\sigma_j^0 \in S_0}}, m = \overline{1, M_\Gamma^{(l)}}\right), j = \overline{1, J_0}\right), r = \overline{1, R_0}\right),$$

$$A_{21}^{(l)} =$$

$$= \mathrm{col}\left(\left(\mathrm{str}\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)G^{(l)}(\xi - \xi_m^{0(l)}, z)_{|s=s_j^\Gamma \in S_\Gamma \times [0,T]}, m = \overline{1, M_0^{(l)}}\right), j = \overline{1, J_\Gamma}\right), \rho = \overline{1, R_\Gamma}\right),$$

$$A_{22}^{(l)} =$$

$$= \mathrm{col}\left(\left(\mathrm{str}\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)G^{(l)}(\xi - \xi_m^{\Gamma(l)}, z)_{|s=s_j^\Gamma \in S_\Gamma \times [0,T]}, m = \overline{1, M_\Gamma^{(l)}}\right), j = \overline{1, J_\Gamma}\right), \rho = \overline{1, R_\Gamma}\right).$$

Решение (среднеквадратическое приближение к нему) системы (33) определяется как [16]

$$\bar{u} = A^T P_1^+ \bar{Y} + \bar{v} - A^T P_1^+ A\bar{v}, \tag{34}$$

где $\bar{v} = \mathrm{col}(\mathrm{col}(v_0^{(l)}, v_\Gamma^{(l)}),\ l = \overline{1, 2})$ при произвольных $v_0^{(l)} \in R^{M_0^{(l)}}$, $v_\Gamma^{(l)} \in R^{M_\Gamma^{(l)}}$ $(l = \overline{1, 2})$ и $P_1 = AA^T$.

Согласно (34) находим

$$u_0^{(l)} = ((A_{11}^{(l)})^T, (A_{21}^{(l)})^T) P_1^+ \bar{Y} + v_0^{(l)} - ((A_{11}^{(l)})^T, (A_{21}^{(l)})^T) P_1^+ A\bar{v},$$

$$u_\Gamma^{(l)} = ((A_{12}^{(l)})^T, (A_{22}^{(l)})^T) P_1^+ \bar{Y} + v_\Gamma^{(l)} - ((A_{12}^{(l)})^T, (A_{22}^{(l)})^T) P_1^+ A\bar{v} \quad (l = \overline{1, 2}),$$

а с учетом определения (28), (29) векторов $u_0^{(l)}$, $u_\Gamma^{(l)}$ $(l = \overline{1, 2})$ и составляющих $w_0^{(l)}(s)$, $w_\Gamma^{(l)}(s)$ $(l = \overline{1, 2})$ из (13) построим функцию $w(s)$.

Точность и однозначность ($\bar{v} \equiv 0$) решения рассматриваемой задачи при этом будет определяться [16] точностью и однозначностью псевдообращения системы (33), т.е. величиной $\varepsilon^2 = \min\limits_{\bar{u}} || A\bar{u} - \bar{Y} ||^2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P_1 P_1^+ \bar{Y}$ и условиями $\det(A^T A) > 0$ (решение однозначное и $v_0^{(l)} = v_\Gamma^{(l)} = 0$ $(l = \overline{1, 2})$), $\det(A^T A) = 0$ (решение неоднозначное и $v_0^{(l)}, v_\Gamma^{(l)} \neq 0$ $(l = \overline{1, 2})$) соответственно.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ ПЛИТЫ, НЕПРЕРЫВНО НАБЛЮДАЕМОЙ ЗА НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ СОСТОЯНИЕМ

Рассмотрим задачу построения функции (6) поперечных динамических смещений $w(s)$, которая бы при удовлетворяющих уравнению (7) составляющих

$w^{(l)}(s)$ $(l=\overline{1,2})$ согласно среднеквадратическому критерию (11) согласовалась с непрерывными наблюдениями (2), (3) за начально-краевым состоянием рассматриваемой плиты.

Как и в предыдущем случае, функции $w^{(l)}(s)$ $(l=\overline{1,2})$ представим соотношениями (13), (19), (30), (31). Определенные в (28), (29) векторы $u_0^{(l)}$, $u_\Gamma^{(l)}$ $(l=\overline{1,2})$ значений $u_{0m}^{(l)}$ $(m=\overline{1, M_0^{(l)}})$ и $u_{\Gamma m}^{(l)}$ $(m=\overline{1, M_\Gamma^{(l)}})$ моделирующих функций $u_0^{(l)}(\xi)$ и $u_\Gamma^{(l)}(\xi)$ найдем согласно критерию (11), т.е. чтобы

$$\Phi_1 \to \min_{u_0^{(l)}, u_\Gamma^{(l)} (l=\overline{1,2})}. \quad (35)$$

После подстановки соотношений (13), (19), (30), (31) в начально-краевые условия (2), (3) получим систему функциональных уравнений

$$A(s)\bar{u} = \bar{Y}(s) \quad (36)$$

для определения вектора $\bar{u} = \mathrm{col}(\mathrm{col}(u_0^{(l)}, u_\Gamma^{(l)}), l=\overline{1,2})$. Здесь

$$\bar{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y^0(\sigma), & \sigma \in S_0 \\ Y^\Gamma(s), & s \in S_\Gamma^T \end{pmatrix}, \; S_\Gamma^T = S_\Gamma \times [0, T],$$

$$A(s) = \mathrm{str}\left(\begin{pmatrix} A_{11}^{(l)}(\sigma), \, \sigma \in S_0 & A_{12}^{(l)}(\sigma), \, \sigma \in S_0 \\ A_{21}^{(l)}(s), \, s \in S_\Gamma^T & A_{22}^{(l)}(s), \, s \in S_\Gamma^T \end{pmatrix}, \, l=\overline{1,2} \right)$$

при

$$Y^0(\sigma) = \mathrm{col}((\bar{Y}_r^0(\sigma), \, r=\overline{1, R_0}),$$

$$Y^\Gamma(s) = \mathrm{col}((\bar{Y}_\rho^\Gamma(s), \, \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$\bar{Y}_r^0(\sigma) = Y_r^0(\sigma) - L_r^0(\partial_t) w_\infty(s)_{|t=0}, \; r=\overline{1, R_0},$$

$$\bar{Y}_\rho^\Gamma(s) = Y_\rho^\Gamma(s) - L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) w_\infty(s), \; \rho=\overline{1, R_\Gamma},$$

$$A_{11}^{(l)}(\sigma) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t) G^{(l)}(\xi - \xi_m^{0(l)}, z)_{|t=0}, \, m=\overline{1, M_0^{(l)}}), \, r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{12}^{(l)}(\sigma) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t) G^{(l)}(\xi - \xi_m^{\Gamma(l)}, z)_{|t=0}, \, m=\overline{1, M_\Gamma^{(l)}}), \, r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{21}^{(l)}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) G^{(l)}(\xi - \xi_m^{0(l)}, z), \, m=\overline{1, M_0^{(l)}}), \, \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{22}^{(l)}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma) G^{(l)}(\xi - \xi_m^{\Gamma(l)}, z), \, m=\overline{1, M_\Gamma^{(l)}}), \, \rho=\overline{1, R_\Gamma}) \; (l=\overline{1,2}),$$

$$\xi_m^{0(l)} \in S^0 \; (m=\overline{1, M_0^{(l)}}), \; \xi_m^{\Gamma(l)} \in S^\Gamma \; (m=\overline{1, M_\Gamma^{(l)}}) \; (l=\overline{1,2}).$$

Решение задачи (35) в этом случае эквивалентно решению задачи среднеквадратического обращения системы (36) или построению вектора $\bar{u}$ такого, чтобы

$$\bar{u} = \arg \min_{\substack{u_0^{(l)}, u_\Gamma^{(l)} \\ (l=\overline{1,2})}} \int \| A(s)\bar{u} - \bar{Y}(s) \|^2 \, ds \quad (37)$$

(как и выше, здесь и далее интегрирование проводится в области изменения аргумента s). Решение (37) представляется вектором

$$\bar{u} \in \Omega_u = \{u: u = P_2^+ A_y + v - P_2^+ P_2 v \quad \forall\, v \in R^{M_0^{(1)} + M_\Gamma^{(1)} + M_0^{(2)} + M_\Gamma^{(2)}}\} \tag{38}$$

при произвольном $v = \mathrm{col}\,(\mathrm{col}\,(v_0^{(l)}, v_\Gamma^{(l)}),\ l = \overline{1,2})$, в котором $v_0^{(l)} \in R^{M_0^{(l)}}$, $v_\Gamma^{(l)} \in$ $\in R^{M_\Gamma^{(l)}}$ $(l = \overline{1,2})$,

$$P_2 = \int A^T(s) A(s) ds = [P_{ij}]_{i,j=1}^{i,j=4}, \quad A_y = \int A^T(s) \bar{Y}(s) ds = \mathrm{col}\,(A_{yi},\ i = \overline{1,4}),$$

$$P_{ij} = \int_{S_0} (A_{1i}^{(1)}(\sigma))^T A_{1j}^{(1)}(\sigma) d\sigma + \int_{S_\Gamma^T} (A_{2i}^{(1)}(s))^T A_{2j}^{(1)}(s) ds,$$

$$P_{i(j+2)} = \int_{S_0} (A_{1i}^{(1)}(\sigma))^T A_{1j}^{(2)}(\sigma) d\sigma + \int_{S_\Gamma^T} (A_{2i}^{(1)}(s))^T A_{2j}^{(2)}(s) ds,$$

$$P_{(i+2)j} = \int_{S_0} (A_{1i}^{(2)}(\sigma))^T A_{1j}^{(1)}(\sigma) d\sigma + \int_{S_\Gamma^T} (A_{2i}^{(2)}(s))^T A_{2j}^{(1)}(s) ds,$$

$$P_{(i+2)(j+2)} = \int_{S_0} (A_{1i}^{(2)}(\sigma))^T A_{1j}^{(2)}(\sigma) d\sigma + \int_{S_\Gamma^T} (A_{2i}^{(2)}(s))^T A_{2j}^{(2)}(s) ds,$$

$$A_{yi} = \int_{S_0} (A_{1i}^{(1)}(\sigma))^T Y^0(\sigma) d\sigma + \int_{S_\Gamma^T} (A_{2i}^{(1)}(s))^T Y^\Gamma(s) ds,$$

$$A_{y(i+2)} = \int_{S_0} (A_{1i}^{(2)}(\sigma))^T Y^0(\sigma) d\sigma + \int_{S_\Gamma^T} (A_{2i}^{(2)}(s))^T Y^\Gamma(s) ds \quad (i, j = \overline{1,2}).$$

Обозначая $Q = \mathrm{col}\,(\mathrm{col}\,(Q_i^{(l)},\ i = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2})$ матрицу, псевдообратную к P_2, из (38) находим

$$u_0^{(l)} \in \Omega_0^{(l)} = \{u \in R^{M_0^{(l)}} :\ u = Q_1^{(l)} A_y + v_0^{(l)} - Q_1^{(l)} P_2 v \quad \forall\, v_0^{(l)} \in R^{M_0^{(l)}}\}, \tag{39}$$

$$u_\Gamma^{(l)} \in \Omega_\Gamma^{(l)} = \{u \in R^{M_\Gamma^{(l)}} :\ u = Q_2^{(l)} A_y + v_\Gamma^{(l)} - Q_2^{(l)} P_2 v \quad \forall\, v_\Gamma^{(l)} \in R^{M_\Gamma^{(l)}}\}. \tag{40}$$

Найденные согласно (39), (40) векторы $u_0^{(l)}$, $u_\Gamma^{(l)}$ $(l = \overline{1,2})$ с учетом (13), (19), (30), (31) позволяют найти функцию $w(s)$, которая удовлетворяет соотношению (7) [16] точно, а начально-краевым условиям (2), (3) — с точностью

$$\varepsilon^2 = \int_{S_0} (Y^0(\sigma))^T Y^0(\sigma) d\sigma + \int_{S_\Gamma^T} (Y^\Gamma(s))^T Y^\Gamma(s) ds - A_y^T P_2^+ A_y.$$

Заметим, что решение задачи однозначно ($v \equiv 0$), если $\det P_2 > 0$.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Остановимся на особенностях решения рассмотренных выше задач для случаев, когда влиянием начальных или краевых условий на процесс динамики исследуемой плиты можно пренебречь. При этом будем исходить из того, что:

1) для плит, динамика которых исследуется в неограниченной пространственной области, отсутствуют краевые условия (3), (5) и функции $u_{\Gamma}^{(l)}(\xi)$ $(l=\overline{1,2})$, их моделирующие, а критерии решения задачи будут определяться соотношениями

$$\Phi_1^0 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t) w(s)|_{t=0} - Y_r^0(\sigma))^2 d\sigma \to \min_{w(s)}, \tag{41}$$

$$\Phi_2^0 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{j=1}^{J_0} (L_r^0(\partial_t) w(s)|_{t=0,\, \sigma=\sigma_j^0 \in S_0} - Y_{rj}^0)^2 \to \min_{w(s)}; \tag{42}$$

2) для плит, динамика которых исследуется без учета действия начальных внешне-динамических возмущений, отсутствующими будут начальные условия (2), (4) и функции $u_0^{(l)}(\xi)$ $(l=\overline{1,2})$, их моделирующие, а решение поставленной задачи определяется критериями

$$\Phi_1^{\Gamma} = \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \int_{S_{\Gamma}^T} (L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\sigma}) w(s) - Y_{\rho}^{\Gamma}(s))^2 ds \to \min_{w(s)}, \tag{43}$$

$$\Phi_2^{\Gamma} = \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \sum_{j=1}^{J_{\Gamma}} (L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\sigma}) w(s)|_{s=s_j^{\Gamma} \in S_{\Gamma}^T} - Y_{\rho j}^{\Gamma})^2 \to \min_{w(s)}. \tag{44}$$

Это означает, что в первом случае (неограниченная пространственная область)

$$w(s) = \sum_{l=1}^{2} (w_{\infty}^{(l)}(s) + w_0^{(l)}(s)), \tag{45}$$

где $w_{\infty}^{(l)}(s)$ определяется согласно (19), а $w_0^{(l)}(s)$ — соотношениями (20), (30), в которых

$$u_0^{(l)}(\xi) = (A_{11}^{(l)}(\xi))^T P_1^+ Y^0 + v_0^{(l)}(\xi) - (A_{11}^{(l)}(\xi))^T P_1^+ A_{v0} \quad (\xi \in S^0)$$
$$\forall\, v_0^{(l)}(\xi) \quad (\xi \in S^0), \tag{46}$$

$$P_1 = \sum_{l=1}^{2} \left(\int_{S^0} A_{11}^{(l)}(\xi)(A_{11}^{(l)}(\xi))^T d\xi \right),\ A_{v0} = \sum_{l=1}^{2} \left(\int_{S^0} A_{11}^{(l)}(\xi) v_0^{(l)}(\xi) d\xi \right)$$

и

$$u_0^{(l)} = (A_{11}^{(l)})^T P_1^+ Y^0 + v_0^{(l)} - (A_{11}^{(l)})^T P_1^+ A_{11}^{(l)} v_0 \,\forall v_0 = \mathrm{col}\,(v_0^{(l)} \in R^{M_0^{(l)}},\ l=\overline{1,2}), \tag{47}$$

$$P_1 = \sum_{l=1}^{2} A_{11}^{(l)} (A_{11}^{(l)})^T$$

в случае дискретных наблюдений (4) за начальным состоянием плиты. При непрерывных наблюдениях (2) за начальным состоянием плиты составляющая $w_0^{(l)}(s)$ определяется соотношением (30), в котором

$$u_0^{(l)} = Q_1^{(l)} A_{y0} + v_0^{(l)} - Q_1^{(l)} P_2 v_0 \quad \forall\, v_0 = \mathrm{col}(v_0^{(l)} \in R^{M_0^{(l)}},\ l=\overline{1,2}), \tag{48}$$

$$P_2 = \left[\int_{S_0} A_{11}^{(i)}(\sigma)^T A_{11}^{(j)}(\sigma) d\sigma \right]_{i,j=1}^{2},\ P_2^+ = \mathrm{col}\,(Q_1^{(l)},\ l=\overline{1,2}),$$

$$A_{y0} = \mathrm{col} \left(\int_{S_0} (A_{11}^{(l)}(\sigma))^T Y^0(\sigma) d\sigma,\ l=\overline{1,2} \right).$$

Во втором случае (неограниченный временной интервал)

$$w(s)=\sum_{l=1}^{2}(w_{\infty}^{(l)}(s)+w_{\Gamma}^{(l)}(s)), \tag{49}$$

где $w_{\infty}^{(l)}(s)$, как и в первом случае, определяется соотношением (19), а $w_{\Gamma}^{(l)}(s)$ для дискретных наблюдений (5) за краевым состоянием — соотношениями (21), (31), в которых

$$u_{\Gamma}^{(l)}(\xi)=(A_{22}^{(l)}(\xi))^T P_1^+ Y^{\Gamma}+v_{\Gamma}^{(l)}(\xi)-(A_{22}^{(l)}(\xi))^T P_1^+ A_{v\Gamma}\quad(\xi\in S^{\Gamma}) \tag{50}$$

при $\forall\, v_{\Gamma}^{(l)}(\xi)\ (\xi\in S^{\Gamma})$,

$$P_1=\sum_{l=1}^{2}\left(\int_{S^{\Gamma}}A_{22}^{(l)}(\xi)(A_{22}^{(l)}(\xi))^T d\xi\right),\ A_{v\Gamma}=\sum_{l=1}^{2}\left(\int_{S^{\Gamma}}A_{22}^{(l)}(\xi)v_{\Gamma}^{(l)}(\xi)d\xi\right)$$

и

$$u_{\Gamma}^{(l)}=(A_{22}^{(l)})^T P_1^+ Y^{\Gamma}+v_{\Gamma}^{(l)}-(A_{22}^{(l)})^T P_1^+ A_{22}^{(l)}v_{\Gamma} \tag{51}$$

$$\forall\, v_{\Gamma}=\mathrm{col}(v_{\Gamma}^{(l)}\in R^{M_{\Gamma}^{(l)}},\ l=\overline{1,2}),$$

$$P_1=\sum_{l=1}^{2}A_{22}^{(l)}(A_{22}^{(l)})^T.$$

Для случая непрерывных наблюдений (3) за краевым состоянием плиты составляющая $w_{\Gamma}^{(l)}(s)$ определяется соотношением (31), в котором

$$u_{\Gamma}^{(l)}=Q_2^{(l)}A_{y\Gamma}+v_{\Gamma}^{(l)}+Q_2^{(l)}P_2 v_{\Gamma}\quad\forall\, v_{\Gamma}=\mathrm{col}(v_{\Gamma}^{(l)}\in R^{M_{\Gamma}^{(l)}},\ l=\overline{1,2}), \tag{52}$$

$$P_2=\left[\int_{S_{\Gamma}^{T}}A_{22}^{(i)}(s)^T A_{22}^{(j)}(s)ds\right]_{i,j=1}^{2},\quad P_2^+=\mathrm{col}(Q_2^{(l)},\ l=\overline{1,2}),$$

$$A_{y\Gamma}=\mathrm{col}\left(\int_{S_{\Gamma}^{T}}(A_{22}^{(l)}(s))^T Y^{\Gamma}(s)ds,\ l=\overline{1,2}\right).$$

Точность, с которой решения (45)–(52) согласуются с начальными и краевыми наблюдениями (2)–(5), в рамках принятых выше обозначений определяется [16] величинами

$$\varepsilon_0^2=\min_{w(s)}\Phi_2^0=\min_{u_0^{(1)}(\xi),\,u_0^{(2)}(\xi)}\left\|\sum_{l=1}^{2}\int_{S^0}A_{11}^{(l)}(\xi)u_0^{(l)}(\xi)\,d\xi-Y^0\right\|^2=$$

$$=(Y^0)^T Y^0-(Y^0)^T P_1 P_1^+ Y^0$$

(решение (45), (46)),

$$\varepsilon_{\Gamma}^2=\min_{w(s)}\Phi_2^{\Gamma}=\min_{u_{\Gamma}^{(1)}(\xi)\,u_{\Gamma}^{(2)}(\xi)}\left\|\sum_{l=1}^{2}\int_{S^{\Gamma}}A_{22}^{(l)}(\xi)u_{\Gamma}^{(l)}(\xi)d\xi-Y^{\Gamma}\right\|^2=$$

$$=(Y^{\Gamma})^T Y^{\Gamma}-(Y^{\Gamma})^T P_1 P_1^+ Y^{\Gamma}$$

(решение (49), (50)),

$$\varepsilon_0^2 = \min_{w(s)} \Phi_2^0 = \min_{u_0^{(1)}, u_0^{(2)}} \left\| \sum_{l=1}^{2} A_{11}^{(l)} u_0^{(l)} - Y^0 \right\|^2 = (Y^0)^T Y^0 - (Y^0)^T P_1 P_1^+ Y^0$$

(решение (45), (47)),

$$\varepsilon_\Gamma^2 = \min_{w(s)} \Phi_2^\Gamma = \min_{u_\Gamma^{(1)}, u_\Gamma^{(2)}} \left\| \sum_{l=1}^{2} A_{22}^{(l)} u_\Gamma^{(l)} - Y^\Gamma \right\|^2 = (Y^\Gamma)^T Y^\Gamma - (Y^\Gamma)^T P_1 P_1^+ Y^\Gamma$$

(решение (49), (51)),

$$\varepsilon_0^2 = \min_{w(s)} \Phi_1^0 = \min_{u_0^{(1)}, u_0^{(2)}} \left\| \int_{S_0} (\sum_{l=1}^{2} A_{11}^{(l)}(\sigma) u_0^{(l)} - Y^0(\sigma)) d\sigma \right\|^2 =$$

$$= \int_{S_0} (Y^0(\sigma))^T Y^0(\sigma) d\sigma - A_{y0}^T P_2^+ A_{y0}$$

(решение (45), (48)),

$$\varepsilon_\Gamma^2 = \min_{w(s)} \Phi_1^\Gamma = \min_{u_\Gamma^{(1)}, u_\Gamma^{(2)}} \left\| \int_{S_\Gamma^T} \left(\sum_{l=1}^{2} A_{22}^{(l)}(s) u_\Gamma^{(l)} - Y^\Gamma(s) \right) ds \right\|^2 =$$

$$= \int_{S_\Gamma^T} (Y^\Gamma(s))^T Y^\Gamma(s) ds - A_{y\Gamma}^T P_2^+ A_{y\Gamma}$$

(решение (49), (52)).

Однозначность полученных решений определяется следующими условиями:

$$\lim_{N \to \infty} \det [[(A_{11}^{(i)}(\xi_n))^T A_{11}^{(j)}(\xi_m)]_{i,j=1}^2]_{n,m=1}^N > 0 \ (\xi_n, \xi_m \in S^0),$$

$$\det [(A_{11}^{(i)})^T A_{11}^{(j)}]_{i,j=1}^2 > 0 \ \text{(для задачи (42))},$$

$$\lim_{N \to \infty} \det [[(A_{22}^{(i)}(\xi_n))^T A_{22}^{(j)}(\xi_m)]_{i,j=1}^2]_{n,m=1}^N > 0 \ (\xi_n, \xi_m \in S^\Gamma),$$

$$\det [(A_{22}^{(i)})^T A_{22}^{(j)}]_{i,j=1}^2 > 0 \ \text{(для задачи (44))}$$

$$\det P_2 > 0 \ \text{(для задач (41) и (43))}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье решена сложная задача исследования трехмерного поля поперечных динамических смещений толстой упругой плиты конечных размеров. Задача решена без ограничений на вид, количество и качество дискретных или непрерывных начально-краевых наблюдений за состоянием плиты. Исходными для этого выбраны построенные ранее параметрически зависимые от поперечной координаты двухмерные дифференциальные уравнения бесконечно высокого порядка. Свернутое символическое представление этих уравнений позволило построить их интегральный эквивалент — основу для математического моделирования реальных начально-краевых возмущающих факторов фиктивными внешнединамическими возмущениями, определенными вне рассматриваемой пространственно-временной области. Построено аналитические решение задачи, которое, точно удовлетворяя дифференциальной модели динамики плиты, за среднеквадратическим критерием согласуется с начально-краевыми наблюдениями за ней. В работе рассмотрены особенности решения задачи для плит, динамика которых мало зависима от начальных и краевых внешнединамических возмущающих факторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. — М.: Физматлит, 1966. — 635 с.
2. Лурье А.И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
3. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. — М.: Наука, 1982. — 568 с.
4. Немиш Ю.Н., Хома И.Ю. Напряженно-деформируемое состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (Обзор) // Приклад. механика. — 1993. — **29**, № 11. — С. 3–34.
5. Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А, Гузь А.Н., Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 5: Динамика упругих тел. — К.: Наук. думка, 1986. — 288 с.
6. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. — М.: Физматлит, 2002. — 416 с.
7. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. — К.: Изд-во АН УССР, 1963. — 353 с.
8. Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Муха И.С. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения // Приклад. механика. — 2000. — **36**, № 8. — С. 3–27.
9. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. — К.: Академпериодика, 2006. — 472 с.
10. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5: Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — М.: ВИНИТИ, 1973. — 272 с.
11. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955. — 370 с.
12. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. — К.: Наук. думка, 2002. — 361 с.
13. Стоян В.А., Двирничук К.В. К построению дифференциальной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 4. — С. 74–83.
14. Стоян В.А., Двирничук К.В. Об интегральной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Там же. — 2013. — № 1. — С. 70–82.
15. Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. — К.: Сталь, 2008. — 316 с.
16. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2011. — 310 с.
17. Стоян В.А., Двірничук К.В. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей // Доп. НАН України. — 2012. — № 9. — С. 36–43.

Поступила 19.09.2012