

## АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, метод Петрова–Галёркина, уравнение конвекции–диффузии, сосредоточенные аппроксимации, искусственная диссипация и дисперсия.

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее распространенных подходов к построению численных аппроксимаций для различных уравнений с частными производными является метод Петрова–Галёркина в форме метода конечных элементов (МКЭ) [1–4]. При этом приближенное решение задачи находится в виде элемента некоторого конечномерного пространства, образованного совокупностью так называемых базисных функций с компактным носителем (финитных функций) [1–4], а коэффициенты разложения по базисным функциям определяются из условия ортогональности невязки другому пространству, образованному совокупностью так называемых весовых финитных функций. Надлежащим выбором весовых функций можно гибко влиять на свойства получаемых численных аппроксимаций (например, обеспечивать их устойчивость при интегрировании уравнений с доминирующей конвекцией) [2, 4].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Применение МКЭ к решению некоторых типов нестационарных задач вызывает определенные сложности. Так, при пространственной аппроксимации нестационарного параболического уравнения конвективно-диффузионного типа получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) вида [1–4]

$$M\dot{\vec{a}} = F(t, \vec{a}) \quad (1)$$

относительно вектора  $\vec{a}(t)$  зависящих от времени  $t$  коэффициентов разложения приближенного решения по базисным функциям. Здесь  $F$  — некоторая вектор-функция,  $M$  — квадратная матрица (матрица масс), которая в общем случае оказывается разреженной [2]. Матрица  $M$  несимметрична и не является диагональной. Поэтому для приведения системы (1) к нормальному виду Коши (системе, разрешенной относительно производных) матрицу  $M$  необходимо обращать. При замене в (1) производных по времени разностями с последующим переходом от СОДУ (1) к разностной схеме ввиду недиагональности  $M$  схема становится неявной [2, 3]. В случае применения МКЭ к определенным типам задач сама матрица  $M$  может оказаться зависимой от времени (это относится к некоторым задачам расчета конвективных процессов с изменяющимися во времени направлениями течений [1, 5], задачам с подвижными границами [1, 2] или это возможно вследствие применения подвижных сеток и конечных элементов [2, 4]). Тогда может возникнуть ситуация, когда на каждом шаге интегрирования СОДУ (1) приходится обращать матрицу  $M$  (или выполнять какую-либо ее факторизацию) [2, 3], что при большом количестве узлов сетки требует значительных вычислительных затрат.

Во избежание этих трудностей в вычислительной практике МКЭ довольно давно [1, 2] применяется прием сосредоточения (mass lumping), сводящий

матрицу  $M$  к диагональной: все элементы каждой строки матрицы суммируются и эта сумма приписывается элементу строки, который находится на главной диагонали. Всем остальным элементам строки приписывается нулевое значение. Существуют и другие формы и разновидности этого приема [1, 6]. Естественно, что при этом операция обращения матриц становится тривиальной и с вычислительной точки зрения данный прием является весьма привлекательным.

Известно [6, 1], что при использовании приема сосредоточения (сосредоточенных аппроксимаций, *lumped approximations*) происходит внесение в численную схему искусственной диссипации (особенно это относится к нестационарным задачам). С одной стороны, это приводит к сглаживанию решений при расчете потоков с резкими скачками и неоднородностями (ударными волнами) и, как правило, к увеличению запаса устойчивости получаемой в результате схемы, что является положительным свойством приема сосредоточения (заметим, что искусственные диссипации с этой же целью часто используются в гидродинамике) [1, 4]. С другой стороны, применение приема сосредоточения в ряде случаев (особенно в задачах с преобладанием конвективных процессов) приводит к значительным погрешностям численного решения, поскольку оно ввиду внесенной искусственной диссипации может более точно аппроксимировать решение модифицированной «сглаженной» задачи, чем исходной [2, 4, 7]. Достаточно подробный обзор работ в пользу или против использования сосредоточенных аппроксимаций приведен в [7].

В настоящей статье на примере нестационарного одномерного уравнения конвекции–диффузии проиллюстрировано влияние приема сосредоточения на погрешность численного решения. Проанализированы причины возникновения данных погрешностей, рассмотрена модификация метода Петрова–Галёркина и построены соответствующие численные аппроксимации в виде СОДУ и разностных схем, в которых использование приема сосредоточения не приводит к описанным дефектам численного решения. Показано, что имеется возможность такого выбора весовых функций в методе Петрова–Галёркина с использованием сосредоточенных аппроксимаций, при которой результат расчета будет приближенно совпадать с результатом расчета по методу Петрова–Галёркина с наперед заданными весовыми функциями, где сосредоточенные аппроксимации не используются. Это подтверждается численными расчетами. Данный вопрос составляет основу настоящей работы. Для предложенных разностных схем проведено исследование устойчивости.

## 2. ПОЛУДИСКРЕТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРИЕМА СОСРЕДОТОЧЕНИЯ

Рассмотрим уравнение конвекции–диффузии [8, 9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(t) \frac{\partial u}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t), \quad x \in [L_1; L_2], \quad t \in [0; T], \quad (2)$$

где  $\lambda(t)$  — некоторая зависящая от времени  $t$  функция,  $\kappa$  — положительная константа. Предполагается, что для уравнения (2) задано начальное условие  $u(0, x) = u_0(x)$ , а в точках  $x = L_1$  и  $x = L_2$  задано одно из стандартных граничных условий [9].

Пусть на отрезке  $[L_1; L_2]$  задана система равномерно распределенных точек (узлов)  $x_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , с шагом  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $x_1 = L_1$ ,  $x_N = L_2$ . В соответствии с терминологией, принятой в МКЭ, каждый отрезок  $[x_i; x_{i+1}]$  будем называть элементом [1]. С каждым узлом  $x_i$  свяжем непрерывную кусочно-линейную финитную базисную функцию  $N_i(x)$ . Функция  $N_i(x)$  отлична от нуля только на отрезке  $[x_{i-1}; x_{i+1}]$ , равна нулю на концах отрезка, линейная на элементах  $[x_{i-1}; x_i]$  и  $[x_i; x_{i+1}]$  и равна единице в точке  $x_i$ .

В качестве весовой функции (соответствующей узлу  $x_i$  сетки) в методе Петрова–Галёркина зададим функции вида

$$W_i(x) = N_i(x) + \alpha_i W_i^*(x), \quad (3)$$

здесь  $\alpha_i$  — настроечный параметр (коэффициент изгиба весовой функции),

$$W_i^*(x) = \begin{cases} {}^2W((x_i - x)/h), & x \in [x_{i-1}; x_i], \\ -{}^2W((x_{i+1} - x)/h), & x \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}], \end{cases} \quad (4)$$

где  ${}^2W(\lambda) \equiv 3\lambda(1-\lambda)$  [2, 3–5].

Особенности построения различных весовых функций, выбора настроечных параметров и требования к ним приведены в [2–5]. В данной статье для определенности были использованы квадратичные весовые функции, однако приведенные ниже выкладки без особых затруднений могут быть перенесены на другие весовые функции и классы таких функций.

Приближенное решение уравнения (2) будем находить в виде

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) N_j(x), \quad (5)$$

где  $\vec{a}(t) = \{a_j(t)\}_{j=1}^N$  — вектор искоемых коэффициентов разложения по базисным функциям (см. также систему (1)). В соответствии с процедурой метода Петрова–Галёркина [1, 2] умножим уравнение конвекции–диффузии (2) на весовую функцию  $W_i(x)$ , соответствующую произвольному узлу сетки  $i$ , и проинтегрируем по области  $\Omega \equiv [L_1; L_2]$ . В результате получим слабую форму [10, 4] уравнения (2)

$$\int_{\Omega} W_i \cdot (L\tilde{u} - f) dx = 0, \quad (6)$$

где  $L$  — дифференциальный оператор уравнения (2),  $f$  — его неоднородная правая часть (тождественно нулевая в данном случае). Видно, что подстановка вместо приближенного решения  $\tilde{u}$  истинного решения задачи обращает (6) в тождество (поскольку  $Lu - f \equiv 0$ ), что выражает важное свойство согласованности [10] численных аппроксимаций, получаемых из слабой формы. Данное свойство подробно рассмотрено ниже.

Используя теперь в (6) выражение (5) для  $\tilde{u}$ , получим СОДУ (так называемую полудискретную аппроксимацию [2, 3, 11, 12]) относительно вектора неизвестных  $\vec{a}(t)$ ,  $i$ -е уравнение которой записано в виде

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{6} + \frac{\alpha_i}{4} \right) \dot{a}_{i-1} + \frac{2}{3} \dot{a}_i + \left( \frac{1}{6} - \frac{\alpha_i}{4} \right) \dot{a}_{i+1} = \\ & = \frac{\alpha_i \lambda}{2h} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}) - \frac{\lambda}{2h} (a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{\kappa}{h^2} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Вопросы учета начальных и граничных условий исходной начально-краевой задачи при решении (7) изложены в [2–5]. Из (7) видно, что применение метода Петрова–Галёркина приводит к появлению дополнительного диффузионного члена, величина которого зависит от числа  $\alpha_i$ .

Используя прием сосредоточения, вместо (7) получим уравнение

$$\dot{a}_i^{(L)} = \frac{\alpha_i^{(L)} \lambda}{2h} (a_{i-1}^{(L)} - 2a_i^{(L)} + a_{i+1}^{(L)}) - \frac{\lambda}{2h} (a_{i+1}^{(L)} - a_{i-1}^{(L)}) + \frac{\kappa}{h^2} (a_{i-1}^{(L)} - 2a_i^{(L)} + a_{i+1}^{(L)}). \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8), как видим, отличаются по структуре. Верхние индексы ( $L$ ) свидетельствуют об отличии значений этих величин от соответствующих величин, когда прием сосредоточения не используется. Устойчивость полудискретных аппроксимаций при пространственной конечноэлементной дискретизации (и соответствующих разностных схем при пространственно-временной) начально-краевых задач рассмотрена в [2–4, 11, 12].

Как уже было сказано, прием введения искусственных диссипаций часто используется при расчете различных гидродинамических задач. Но при этом конечноэлементные аппроксимации могут уже не удовлетворять свойству согласованности (consistency) (когда точное решение исходной задачи уже не удовлетворяет возмущенной диссипацией слабой форме задачи или решение возмущенной диссипацией задачи не удовлетворяет слабой форме исходной задачи). Как показывают исследования [10, 6, 7], это приводит к значительным вычислительным погрешностям. Аппроксимация Петрова–Галёркина (7) в отличие от сосредоточенной аппроксимации (8) является согласованной в указанном выше смысле, что вытекает непосредственно из слабой формы (6) уравнения (2).

Найдем связь между коэффициентами  $\alpha_i^{(L)}$  в (8) и  $\alpha_i$  в (7), исходя из условия совпадения решений систем уравнений (7) и (8), т.е. выполнения  $a_i(t) = a_i^{(L)}(t) \forall i, \forall t$ , что обеспечило бы согласованность сосредоточенных аппроксимаций. Вычитая (7) из (8), получаем

$$\frac{-1}{6}(\dot{a}_{i-1} - 2\dot{a}_i + \dot{a}_{i+1}) = -\frac{\alpha_i}{4}(\dot{a}_{i+1} - \dot{a}_{i-1}) + \frac{\lambda}{2h}(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1})(\alpha_i^{(L)} - \alpha_i),$$

откуда

$$\alpha_i^{(L)} = \alpha_i + \frac{\frac{\alpha_i}{2} \cdot \frac{\dot{a}_{i+1} - \dot{a}_{i-1}}{2h} - \frac{h}{6} \cdot \frac{\dot{a}_{i-1} - 2\dot{a}_i + \dot{a}_{i+1}}{h^2}}{\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2}}. \quad (9)$$

Далее из (5) получаем

$$\tilde{u}(x_i, t) = a_i(t), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{da_j(t)}{dt} N_j(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x_i, t) = \dot{a}_i(t).$$

Так как невязка  $L\tilde{u} - f$  стремится к нулю (именно она ортогонализируется в (6) при  $h \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) [1–4] и при соответствующем выборе параметров (обеспечивающим устойчивость аппроксимаций)  $\tilde{u}$  сходится к точному решению  $u$  задачи, тогда имеем

$$\frac{\dot{a}_{i+1} - \dot{a}_{i-1}}{2h} \approx \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{x=x_i}, \quad \frac{\dot{a}_{i-1} - 2\dot{a}_i + \dot{a}_{i+1}}{h^2} \approx \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{x=x_i}.$$

Теоремы о близости точных и приближенных конечноэлементных решений и их производных в различных нормах для параболических задач достаточно общего вида можно найти в работах [4, 13, 14]. Если допустить, что  $a_i = u(x_i) \equiv u_i$  (см. примечание ниже), то эти аппроксимации имеют второй порядок точности по  $h$ . В результате вместо (9) получаем следующее выражение:

$$\alpha_i^{(L)} \approx \alpha_i + \frac{\frac{\alpha_i}{2} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{x=x_i} - \frac{h}{6} \cdot \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{x=x_i}}{\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2}}.$$

Исходя из равенства  $a_i(t) = a_i^{(L)}(t)$ , на основании которого выводились формулы для  $\alpha_i^{(L)}$ , верхние индексы  $(L)$  в коэффициентах разложения (5) по базисным функциям в дальнейшем будем опускать. Подставим полученное значение  $\alpha_i^{(L)}$  в уравнение (8):

$$\dot{a}_i = \frac{\alpha_i h \lambda}{2} \cdot \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2} + h \left( \frac{\alpha_i}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x=x_i} - \frac{h}{6} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x=x_i} \right) - \frac{\lambda}{2h} (a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{\kappa}{h^2} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}).$$

Отсюда, выразив производную  $\frac{\partial u}{\partial t}$  из уравнения (2), имеем

$$\dot{a}_i = \frac{h \alpha_i \lambda}{2} \cdot \left( \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} \right) + \left( \frac{h \alpha_i \kappa}{2} + \frac{h^2 \lambda}{6} \right) \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} - \frac{h^2 \kappa}{6} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i} - \frac{\lambda}{2h} (a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{\kappa}{h^2} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}). \quad (10)$$

Аппроксимируем производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i}$  выражением  $\frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2}$

(с точностью  $O(h^2)$ , если  $a_i = u_i$ ). Тогда первый член правой части (10) опустим и получим уравнение

$$\dot{a}_i = \left( \frac{h \alpha_i \kappa}{2} + \frac{h^2 \lambda}{6} \right) \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} - \frac{h^2 \kappa}{6} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i} - \frac{\lambda}{2h} (a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{\kappa}{h^2} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}). \quad (11)$$

Как видим, вместо искусственного диффузионного слагаемого в (8) в уравнении (11) появляются искусственный дисперсионный член с коэффициентом  $\theta = \frac{h \alpha_i \kappa}{2} + \frac{h^2 \lambda}{6}$  и искусственная диссипация в форме четвертой производной

с коэффициентом  $\mu = -\frac{h^2 \kappa}{6}$ . Выражение (11) можно упростить, опустив члены величины  $O(h^2)$ . Это может быть обосновано, например, в случае, когда  $\alpha_i$  является некоторой фиксированной константой, не зависящей от  $h$ . Тогда получаем

$$\dot{a}_i = \frac{h \alpha_i \kappa}{2} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} - \frac{\lambda}{2h} (a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{\kappa}{h^2} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}). \quad (12)$$

Отметим, что на основании представленных в разд. 4 расчетов удаление этих членов может привести к потере точности.

С целью упрощения записи разностных схем и проведения выкладок при исследовании устойчивости введем следующие сокращенные обозначения для выражения разностных соотношений от некоторой сеточной функции  $c$  относительно

выбранного узла  $i$  пространственной сетки [8, 15]:  $c_{\bar{s}} \equiv \frac{c_i - c_{i-1}}{h}$ ,  $c_s \equiv \frac{c_{i+1} - c_i}{h}$ ,  $c_{\bar{s}\bar{s}} \equiv \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2h}$ . Индекс  $i$  исключим, поскольку речь идет о значениях функции в

текущем узле  $i$  пространственной сетки. Тогда производные  $\left. \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \right|_{x=x_i}$  и  $\left. \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} \right|_{x=x_i}$

можно аппроксимировать формулами  $c_{\bar{s}\bar{s}s} = \frac{c_{i+2} - 2c_{i+1} + 2c_{i-1} - c_{i-2}}{2h^3}$  и

$c_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}s} = \frac{c_{i+2} - 4c_{i+1} + 6c_i - 4c_{i-1} + c_{i-2}}{h^4}$  соответственно, имеющими второй поряд-

док точности аппроксимации. Таким образом, заменив в уравнениях (11) и (12) третью и четвертую производные неизвестного точного решения  $u$  соотношениями  $\tilde{u}_{\bar{s}\bar{s}s}$  и  $\tilde{u}_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}s}$  для приближенного  $\tilde{u}$ , получим соответственно следующие уравнения:

$$\dot{a}_i = \left( \frac{h\alpha_i \kappa}{2} + \frac{h^2 \lambda}{6} \right) \cdot \frac{a_{i+2} - 2a_{i+1} + 2a_{i-1} - a_{i-2}}{2h^3} - \frac{h^2 \kappa}{6} \times \quad (13)$$

$$\times \frac{a_{i+2} - 4a_{i+1} + 6a_i - 4a_{i-1} + a_{i-2}}{h^4} - \frac{\lambda}{2h} (a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{\kappa}{h^2} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}),$$

$$\dot{a}_i = \frac{h\alpha_i \kappa}{2} \cdot \frac{a_{i+2} - 2a_{i+1} + 2a_{i-1} - a_{i-2}}{2h^3} -$$

$$- \frac{\lambda}{2h} (a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{\kappa}{h^2} (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}). \quad (14)$$

Представленные уравнения можно получить непосредственно из (8), положив

$$\alpha_i^{(L)} =$$

$$= \frac{\left( \frac{\alpha_i \kappa}{2} + \frac{h\lambda}{6} \right) \cdot \frac{a_{i+2} - 2a_{i+1} + 2a_{i-1} - a_{i-2}}{h} - \frac{\kappa}{3} \cdot \frac{a_{i+2} - 4a_{i+1} + 6a_i - 4a_{i-1} + a_{i-2}}{h}}{\lambda \cdot (a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1})}$$

или

$$\alpha_i^{(L)} = \frac{(a_{i+2} - 2a_{i+1} + 2a_{i-1} - a_{i-2})\alpha_i \kappa}{2h\lambda(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1})}$$

соответственно (что может быть целесообразным при проведении компьютерных расчетов с помощью СОДУ (8)). Из уравнений следует, что можно так подобрать коэффициенты  $\alpha_i^{(L)}$  изгиба весовых функций в методе Петрова–Галёркина с использованием сосредоточенных аппроксимаций, чтобы результат расчета совпадал с результатом расчета по стандартному методу Петрова–Галёркина (в котором сосредоточенные аппроксимации не используются) с коэффициентами  $\alpha_i$  изгиба весовых функций.

**Примечание.** Соотношения (13), (14) можно также получить, анализируя и сравнивая погрешности аппроксимации соотношениями (7), (8) уравнения (2) на его решении  $u(x, t)$ . Следует заметить, что часто аппроксимацию численными схемами соответствующих дифференциальных задач исследуют на выбранном классе функций, однако для сходимости линейных численных схем достаточно аппроксимировать дифференциальное уравнение лишь на его решении [15].

Обозначим  $L_h$  разностный оператор схемы (7), а  $L_h^{(L)}$  — разностный оператор схемы (8). Дифференциальный оператор уравнения (2) будем, как и ранее, обозначать символом  $L$ . Тогда погрешность  $\psi$  аппроксимации оператором  $L_h$  оператора  $L$  на решении  $u(x, t)$  в точке  $(x_i, t)$  выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi &\equiv L_h u - Lu = \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_i}{4}\right) \dot{u}_{i-1} + \frac{2}{3} \dot{u}_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_i}{4}\right) \dot{u}_{i+1} - \frac{\alpha_i \lambda}{2h} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \\ &+ \frac{\lambda}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{\kappa}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Bigg|_{x=x_i} = \\ &= \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_i}{4}\right) \dot{u}_{i-1} + \left(\frac{2}{3} - 1\right) \dot{u}_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_i}{4}\right) \dot{u}_{i+1} - \frac{\alpha_i \lambda}{2h} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \varepsilon = \\ &= \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_i}{4}\right) \dot{u}_{i-1} - \frac{1}{3} \dot{u}_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_i}{4}\right) \dot{u}_{i+1} - \frac{\alpha_i \lambda}{2h} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \varepsilon, \\ \varepsilon &\equiv \frac{\lambda}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Bigg|_{x=x_i} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Bigg|_{x=x_i} - \frac{\kappa}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) = \\ &= \lambda \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Bigg|_{x=x_i} - \kappa \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Bigg|_{x=x_i} + O(h^4). \end{aligned}$$

Аналогично для погрешности  $\psi^{(L)}$  аппроксимации оператором  $L_h^{(L)}$  оператора  $L$  на решении  $u(x, t)$  в точке  $(x_i, t)$  получаем

$$\begin{aligned} \psi^{(L)} &\equiv L_h^{(L)} u - Lu = \dot{u}_i - \frac{\alpha_i^{(L)} \lambda}{2h} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{\lambda}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \\ &- \frac{\kappa}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Bigg|_{x=x_i} = - \frac{\alpha_i^{(L)} \lambda}{2h} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Сопоставляя погрешности  $\psi$  и  $\psi^{(L)}$  для обычной схемы (7) Петрова–Галёркина и «сосредоточенной» схемы (8), имеем

$$\frac{1}{6} (\dot{u}_{i-1} + \dot{u}_{i+1}) - \frac{1}{3} \dot{u}_i = \frac{\alpha_i}{4} (\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_{i-1}) + \frac{\lambda}{2h} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) (\alpha_i - \alpha_i^{(L)}),$$

откуда получаем соотношение (9) (для функции  $u$ ), с которого начинался анализ. Все остальные выкладки при получении выражений (13), (14) остаются в силе. Таким образом, анализ сосредоточенных аппроксимаций и соответствующие выкладки, в результате которых получаем выражения (13), (14), могут также быть проведены в рамках сравнения и анализа структуры погрешностей  $\psi$  и  $\psi^{(L)}$  дискретизации системами (7) и (8) уравнения (2) на его решении.

### 3. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Введем на временном промежутке  $[0; T]$  равномерную сетку с узлами  $t_n = n \cdot \tau$ , где  $\tau$  — шаг по времени,  $n = 0, \dots, M$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_M = T$ . Используем следующие сокращенные обозначения для некоторой величины  $c = c(x, t)$  [15]:  $c_i^n \equiv c(x_i, t_n)$  (или просто  $c$  в случае текущего узла  $(i, n) \equiv (x_i, t_n)$ ) пространственно-времен-

ной сетки),  $\widehat{c} \equiv c_i^{n+1}$  (значение на следующем временном слое относительно текущего  $n$ -го),  $c_t \equiv \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\tau} = \frac{\widehat{c} - c}{\tau}$  (производная вперед по времени),  $c^{(\sigma)} \equiv \sigma\widehat{c} + (1-\sigma)c$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

От полудискретных аппроксимаций СОДУ (13) и (14) можно перейти к полностью дискретным (по времени и пространству) разностным схемам, заменив производные по времени  $\dot{a}$  в точке  $x_i$  ( $i$ -м узле) разностными соотношениями  $a_t$  на сетке. В результате получаем следующие схемы в безындексной записи:

$$a_t + \lambda^{(\sigma)} a_{\widetilde{s}}^{(\sigma)} = \kappa a_{\widetilde{ss}}^{(\sigma)} + \theta a_{\widetilde{sss}}^{(\sigma)} + \mu a_{\widetilde{ssss}}^{(\sigma)}, \quad (15)$$

$$a_t + \lambda^{(\sigma)} a_{\widetilde{s}}^{(\sigma)} = \kappa a_{\widetilde{ss}}^{(\sigma)} + \theta_1 a_{\widetilde{sss}}^{(\sigma)}, \quad (16)$$

где  $\theta = h\alpha_i \kappa / 2 + h^2 \lambda^{(\sigma)} / 6$ ,  $\theta_1 = h\alpha_i \kappa / 2$ ,  $\mu = -h^2 \kappa / 6$ , коэффициенты  $\theta$  и  $\theta_1$  ввиду наличия в них  $\alpha_i$  зависят от номера узла  $i$ . Представим развернутую запись схем (15) и (16):

$$\begin{aligned} \frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\tau} + \lambda^{(\sigma)} \sigma \frac{a_{i+1}^{n+1} - a_{i-1}^{n+1}}{2h} + \lambda^{(\sigma)} (1-\sigma) \frac{a_{i+1}^n - a_{i-1}^n}{2h} &= \kappa \sigma \frac{a_{i+1}^{n+1} - 2a_i^{n+1} + a_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \\ &+ \kappa (1-\sigma) \frac{a_{i+1}^n - 2a_i^n + a_{i-1}^n}{h^2} + \theta_i \sigma \frac{a_{i+2}^{n+1} - 2a_{i+1}^{n+1} + 2a_{i-1}^{n+1} - a_{i-2}^{n+1}}{2h^3} + \\ &+ \theta_i (1-\sigma) \frac{a_{i+2}^n - 2a_{i+1}^n + 2a_{i-1}^n - a_{i-2}^n}{2h^3} + \mu \sigma \frac{a_{i+2}^{n+1} - 4a_{i+1}^{n+1} + 6a_i^{n+1} - 4a_{i-1}^{n+1} + a_{i-2}^{n+1}}{h^4} + \\ &+ \mu (1-\sigma) \frac{a_{i+2}^n - 4a_{i+1}^n + 6a_i^n - 4a_{i-1}^n + a_{i-2}^n}{h^4}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\tau} + \lambda^{(\sigma)} \sigma \frac{a_{i+1}^{n+1} - a_{i-1}^{n+1}}{2h} + \lambda^{(\sigma)} (1-\sigma) \frac{a_{i+1}^n - a_{i-1}^n}{2h} &= \kappa \sigma \frac{a_{i+1}^{n+1} - 2a_i^{n+1} + a_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \\ &+ \kappa (1-\sigma) \frac{a_{i+1}^n - 2a_i^n + a_{i-1}^n}{h^2} + \theta_{1,i} \sigma \frac{a_{i+2}^{n+1} - 2a_{i+1}^{n+1} + 2a_{i-1}^{n+1} - a_{i-2}^{n+1}}{2h^3} + \\ &+ \theta_{1,i} (1-\sigma) \frac{a_{i+2}^n - 2a_{i+1}^n + 2a_{i-1}^n - a_{i-2}^n}{2h^3}. \quad (18) \end{aligned}$$

При  $\sigma = 0$  получаем полностью явные схемы, при  $\sigma = 0,5$  — симметричные схемы типа Кранка–Николсона [15], при  $\sigma = 1$  — полностью неявные схемы. При  $\sigma > 0$  из (17), (18) получаем системы сеточных уравнений относительно величин на  $(n+1)$ -слое, которые удобно решать с помощью метода пятиточечной прогонки [8]. Погрешность аппроксимации разностными соотношениями (17), (18) уравнения (2) по пространству представляется величиной  $O(h)$ ; для случая  $\alpha_i = O(h)$  порядок аппроксимации повышается до второго, т.е. до величины  $O(h^2)$ . Погрешность аппроксимации по времени при  $\sigma \neq 0,5$  является величиной  $O(\tau)$ , для схемы Кранка–Николсона ( $\sigma = 0,5$ ) эта погрешность равна  $O(\tau^2)$  (что делает подобные схемы выгодными в расчетах [15]).

Исследуем полученные разностные схемы (15) и (16) на устойчивость, предполагая при этом, что их коэффициенты постоянны по времени и пространству.



Ограничимся исследованием устойчивости по начальным условиям (из устойчивости по начальным данным при весьма слабых предположениях следует устойчивость по правой части [15, 8]). Введем скалярное произведение двух заданных на пространственной сетке сеточных функций  $y$  и  $v$ ,  $(y, v) = \sum_k y_k v_k h$ , и норму

$\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ , являющихся сеточными аналогами скалярного произведения и нормы в  $L_2$  [15]. Исследование устойчивости по начальному значению для упрощения выкладок проводится в бесконечной по пространству области [8], предполагая существование и определенность скалярного произведения. Для этого достаточно считать, что все рассматриваемые сеточные функции за пределами некоторой области пренебрежимо малы или финитны, как в [8]. Можно также рассматривать разностную схему как оператор, заданный на пространстве сеточных функций, обращаясь в нуль в граничных узлах сетки [15]. Следуя [8], будем считать рассматриваемые сеточные функции финитными. Следующая теорема дает достаточные условия устойчивости схем (15) и (16).

**Теорема.** Пусть  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ ,  $\kappa \geq 0$ ,  $\mu \leq 0$ , а  $\lambda$  и  $\theta$  — произвольные действительные числа. Тогда разностная схема  $a_t + \lambda a_{\bar{s}}^{(\sigma)} = \kappa a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)} + \theta a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)} + \mu a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}$  строго равномерно устойчива в норме  $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$ .

**Доказательство.** Умножив скалярно уравнение  $a_t + \lambda a_{\bar{s}}^{(\sigma)} = \kappa a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)} + \theta a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)} + \mu a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}$  на выражение  $a^{(\sigma)}$ , получим  $(a_t, a^{(\sigma)}) + \lambda(a_{\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) = \kappa(a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) + \theta(a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) + \mu(a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)})$ . Рассмотрим каждое слагаемое. Представим  $a^{(\sigma)}$  в виде  $a^{(0,5)} + (\sigma - 0,5)\tau a_t$ , тогда  $(a_t, a^{(\sigma)}) = (a_t, a^{(0,5)}) + (a_t, (\sigma - 0,5)\tau a_t) = \frac{1}{2}(\|a\|^2)_t + (\sigma - 0,5)\tau \|a_t\|^2$ , так как  $(a_t, a^{(0,5)}) = \left(\frac{\hat{a} - a}{\tau}, \frac{\hat{a} + a}{2}\right) = \frac{1}{2\tau}(\|\hat{a}\|^2 - \|a\|^2) = \frac{1}{2}(\|a\|^2)_t$ . В дальнейшем будем использовать разностные аналоги формул интегрирования по частям и формул Грина [15]:  $(u_{\bar{s}}, v) = -(u, v_s)$ ,  $(u_s, v) = -(u, v_{\bar{s}})$ ,  $(u_{\bar{s}\bar{s}}, v) = (u, v_{\bar{s}\bar{s}})$ . Тогда, используя кососимметричность оператора центральной разности, получаем

$$(a_{\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) = \frac{1}{2}((a_s^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) + (a_{\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)})) = \frac{1}{2}((a_s^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) - (a^{(\sigma)}, a_s^{(\sigma)})) = 0.$$

Также имеем  $\kappa(a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) = -\kappa(a_{\bar{s}}^{(\sigma)}, a_{\bar{s}}^{(\sigma)}) = -\kappa \|a_{\bar{s}}^{(\sigma)}\|^2$ .

Аналогично получим

$$\begin{aligned} (a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) &= -(a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a_s^{(\sigma)}) = -\frac{1}{2}((a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a_s^{(\sigma)}) + (a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a_s^{(\sigma)})) = \\ &= -\frac{1}{2}((a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a_s^{(\sigma)}) - (a_s^{(\sigma)}, a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)})) = 0. \end{aligned}$$

Наконец, имеем  $\mu(a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a^{(\sigma)}) = \mu(a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}, a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}) = \mu \|a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}\|^2$ .

В результате всех преобразований получаем

$$\frac{1}{2}(\|a\|^2)_t + (\sigma - 0,5)\tau \|a_t\|^2 + \kappa \|a_{\bar{s}}^{(\sigma)}\|^2 - \mu \|a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}\|^2 = 0. \quad (19)$$

В силу условий теоремы имеем  $(\sigma - 0,5)\tau \|a_t\|^2 \geq 0$ ,  $\kappa \|a_{\bar{s}}^{(\sigma)}\|^2 \geq 0$ ,  $-\mu \|a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}\|^2 \geq 0$ , откуда следует, что уравнение (19) выполняется лишь при

$\frac{1}{2}(\|a\|^2)_t = \frac{1}{2\tau}(\|\hat{a}\|^2 - \|a\|^2) \leq 0$ . Это равносильно неравенству  $\|\hat{a}\| \leq \|a\|$ , выражающему строгую равномерную устойчивость [15] разностной схемы  $a_t + \lambda a_{\bar{s}}^{(\sigma)} = \kappa a_{\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)} + \theta a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)} + \mu a_{\bar{s}\bar{s}\bar{s}\bar{s}}^{(\sigma)}$  по начальному условию в норме  $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$ .

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

**Пример 1.** Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (2) с известным аналитическим решением  $u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t+1)}} \exp\left(-\frac{(x+3/5-(t+1))^2}{4\kappa(t+1)}\right)$  при

$\lambda(t) = 1, \kappa = 10^{-3}$  на отрезке  $x \in [0; 1]$ . Начальное условие и граничные условия получаем из выписанного аналитического решения путем непрерывного продолжения на гиперплоскости при  $t = 0$  и  $x = 0, x = 1$  соответственно. При расчетах использовалось  $N = 200$  базисных и весовых функций, все коэффициенты  $\alpha_i$  постоянны и равны 0,5. Для оценки отклонения численного решения  $\tilde{u}$  от аналитического решения  $u$  используем величину  $err_{\max} = \max_{1 \leq i \leq N} |\tilde{u}(x_i, t) - u(x_i, t)|$ .

На рис. 1 и 2 показаны графики расчетов задачи в момент времени  $t = 0,35$ . Здесь и далее на рисунках жирной линией обозначен график вычисленного решения в зависимости от пространственной координаты  $x$ , тонкой — график известного аналитического решения. На рис. 1 представлен график расчета методом Петрова–Галёркина с использованием сосредоточенных аппроксимаций (система уравнений (8)). Как видим, численное решение значительно отклоняется от истинного,  $err_{\max} \approx 1,01$ , амплитуда волны уменьшается, что обусловлено наличием искусственного диффузионного слагаемого в уравнении (8), величина которого регулируется параметром  $\alpha$ . Чем больше параметр  $\alpha$ , тем сильнее эффект затухания и размывания решения (так, при  $\alpha = 1$   $err_{\max} \approx 1,7$ ).

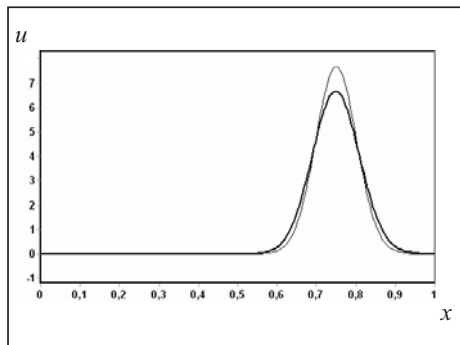


Рис. 1. График расчета с использованием сосредоточенных аппроксимаций (пример 1)

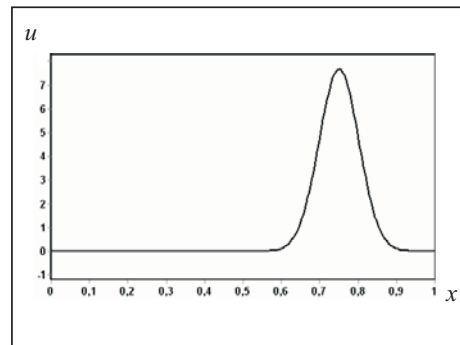


Рис. 2. График расчета с помощью системы уравнений (13) (пример 1)

На рис. 2 представлен график расчета задачи с помощью системы уравнений (13),  $err_{\max} \approx 0,035$ . График численного решения с использованием системы (14) практически совпадает с графиком на рис. 2 и потому здесь не приводится, в этом случае  $err_{\max} \approx 0,07$  (т.е. погрешность возрастает). Как видим, предложенные численные схемы на основе метода Петрова–Галёркина обеспечивают весьма хорошую точность, а графики численного и аналитического решений на рис. 2 визуально практически сливаются. График решения при расчете задачи методом Петрова–Галёркина без использования сосредоточенных аппроксимаций (система уравнений (7)) практически совпадает с графиком на рис. 2, поэтому здесь не приводится (для него  $err_{\max} \approx 0,034$ ).

При интегрировании СОДУ использовались явные стандартные методы Рунге–Кутты 4-го порядка [2, 3, 16] и методы, изложенные в статье [16], шаг по вре-

мени  $\tau = 10^{-4}$ . Расчет задачи с помощью разностных схем (17) и (18) при выполнении условий устойчивости показывает практически аналогичные результаты.

**Пример 2.** Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (2) с известным аналитическим решением  $u(x, t) = (x - bt^3 / 3 - ct)^2 + 2\kappa t$  при  $\lambda(t) = bt^2 + c$ ,  $b = 100$ ,  $c = 100$ ,  $\kappa = 10^{-3}$  на отрезке  $x \in [0; 5]$ . Все остальные параметры расчета такие же, как и в предыдущем примере.

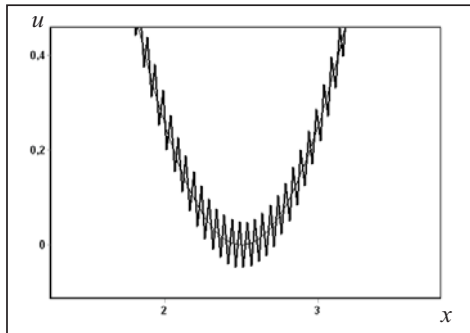


Рис. 3. График расчета с использованием метода Галёркина (пример 2)

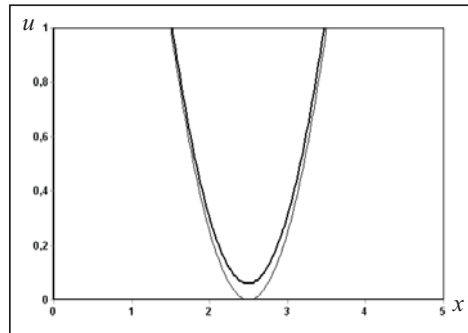


Рис. 4. График расчета с использованием сосредоточенных аппроксимаций (пример 2)

Стандартный (классический) полудискретный метод Галёркина в данном случае дает неустойчивые (осциллирующие) результаты (рис. 3), что связано с доминированием конвективных процессов в данной задаче (отношение  $\lambda(t)$  к коэффициенту  $\kappa$  — величина порядка  $10^5$ ). Таким образом, в данной задаче для обеспечения устойчивости счета (удаления ложных осцилляций) требуется применять метод Петрова–Галёркина с ненулевыми коэффициентами  $\alpha_i$  [2, 3]. Пусть  $\alpha = 1$ ,  $t = 0,025$ . На рис. 4 представлен результат расчета методом Петрова–Галёркина с использованием сосредоточенных аппроксимаций (система уравнений (8)). Как и в предыдущем примере, численное решение значительно отклоняется от истинного,  $err_{\max} \approx 0,07$ . На рис. 5 представлен график расчета задачи с помощью систем (13) и (14), погрешности решения приблизительно одинаковы,  $err_{\max} \approx 0,002$ . Для метода

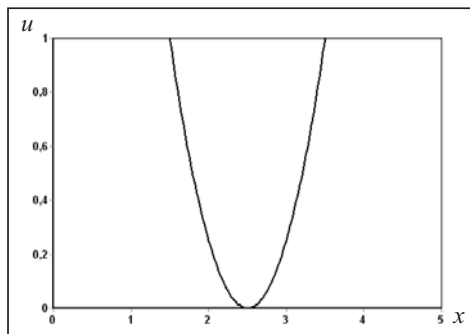


Рис. 5. График расчета с помощью систем (13) и (14) (пример 2)

Петрова–Галёркина без использования сосредоточенных аппроксимаций погрешность  $err_{\max} \approx 0,05$ . Таким образом, рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что стандартные схемы Петрова–Галёркина с сосредоточенными аппроксимациями дают численное решение, которое значительно отклоняется от истинного ввиду чрезмерного сглаживания решения под действием искусственной (схемной) диссипации. В то же время построенные в данной работе численные схемы (13)–(18) на основе метода Петрова–Галёркина с использованием приема сосредоточения свободны от указанных недостатков, присущих рассмотренным стандартным схемам и методам, а их решения практически совпадают с решением, получаемым методом Петрова–Галёркина без использования сосредоточения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проанализировано влияние приема сосредоточения в конечноэлементном методе Петрова–Галёркина на точность и качественные свойства численного решения одномерного нестационарного уравнения конвекции–диффузии (2). Отмечено, что использование данного приема может привести к значительным погрешностям в численном решении, что связано

с вносимой им искусственной диссипацией в численные схемы, приводящей к чрезмерному сглаживанию решения, и нарушением свойства согласованности численных аппроксимаций. Показано, что существует возможность выбора коэффициентов весовых функций в методе Петрова–Галёркина (с использованием приема сосредоточения) и построения соответствующих численных аппроксимаций в виде СОДУ (13), (14) и разностных схем (15)–(18), когда численные решения практически свободны от данных недостатков. Это достигается за счет введения в схему с сосредоточенными аппроксимациями искусственного дисперсионного (и диссипативного, но более высокого порядка малости) члена вместо исходного диссипативного члена, которым преимущественно и обуславливались сглаживающие свойства схемы. Для семейства разностных схем (15)–(18) доказана теорема, дающая достаточные условия устойчивости. Результаты, полученные в работе, подтверждаются расчетами.

Тематикой дальнейшего исследования является детальное изучение меры уклонения решения, полученного с помощью предложенных в работе численных аппроксимаций, от решения, полученного с помощью согласованных аппроксимаций Петрова–Галёркина, исследование свойств численных решений при различных способах аппроксимации диссипативных/дисперсионных членов в уравнениях (11), (12), а также использование предложенного подхода к исследованию сосредоточенных аппроксимаций для построения эффективных конечноэлементных методов интегрирования более сложных, нелинейных и многомерных задач (в особенности задач гидродинамики и магнитной гидродинамики).

Автор выражает благодарность кандидату технических наук Николаю Николаевичу Сальникову за плодотворное обсуждение работы и ценные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Zienkiewicz O.Z., Taylor R.L. The finite element method. — Vol. 3: Fluid Dynamics. — Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. — 334 p.
- Finlayson B.A. Numerical methods for problems with moving fronts. — Seattle, Washington USA: Ravenna Park Publishing, Inc., 1992. — 613 p.
- Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 352 с.
- Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 604 p.
- Сирик С.В., Сальников Н.Н. Численное интегрирование уравнения Бюргерса методом Петрова–Галёркина с адаптивными весовыми функциями // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 1. — С. 94–110.
- Zienkiewicz O.Z., Taylor R.L. The finite element method. — Vol. 1: The basis. — Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. — 690 p.
- Wendland E., Schulz H.E. Numerical experiments on mass lumping for the advection-diffusion equation // Revista Minerva. — 2005. — 2, N 2. — P. 227–233.
- Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики: Изд. 5-е. — М.: Либроком, 2009. — 424 с.
- Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
- Fries T.P., Matthies H.G. A review of Petrov-Galerkin stabilization approaches and an extension to meshfree methods. — Germany; Brunswick: Technische Universitat Braunschweig, Informatikbericht-Nr., 2004. — 71 p.
- Ляшко А.Д., Федотов Е.М. Предельные схемы Галёркина–Петрова для уравнения конвекции-диффузии // Дифференциальные уравнения. — 2009. — 45, № 7. — С. 1042–1052.
- Федотов Е.М. Некомформные схемы метода конечных элементов для нелинейных гиперболических законов сохранения // Там же. — 2011. — 47, № 8. — С. 1183–1195.
- Thomee V. Galerkin finite element methods for parabolic problems. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. — 382 p.
- Grossmann C., Roos H.-G., Stynes M. Numerical treatment of partial differential equations. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 596 p.
- Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
- Скворцов Л.М. Простые явные методы численного решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычисл. методы и программирование. — 2008. — Т. 9. — С. 154–162.

*Поступила 29.08.2012*