УДК 519.161

А.О. ОВЕЗГЕЛЬДЫЕВ, А.В. МОРОЗОВ

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО КОЛЬЦЕВОГО МАРШРУТА

Ключевые слова: *метод ветвей и границ, задача коммивояжера, задача о почтальоне.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Многочисленные результаты, накопленные в изучении проблемы коммивояжера, непрерывно развиваются, выдвигая актуальные вопросы разработки и совершенствования методов комбинаторной оптимизации и их применения в практической и научной деятельности. Далеко не для каждой задачи оптимизации на транспортной сети разработаны алгоритмы поиска решений, пригодные в реальных ситуациях. Одной из таких задач является задача о сельском почтальоне (ЗСП), ограниченная версия которой рассматривается в данной статье.

Задан связный взвешенный граф $H=(V,U)$ с множеством вершин V, $|V|=n$, и множеством ребер U. Каждому ребру $\{i,j\}\in U$ приписан вес $d_{ij}\in Z_0^+$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$; Z_0^+ — множество неотрицательных целых чисел. Граф H полностью определяется симметричной матрицей стоимостей $[d_{ij}]_n$, где $d_{ij}\in Z_0^+$, если $\{i,j\}\in U$, и $d_{ij}=\infty$ в противном случае, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$, $d_{ii}=\infty$, $i=\overline{1,n}$. На множестве U задано непустое подмножество ребер $R\subset U$. Требуется найти в графе H простой цикл, включающий каждое ребро из множества R и имеющий минимальную сумму весов ребер.

В рассматриваемой задаче, в отличие от ЗСП, искомый цикл должен быть простым. Поставленную задачу назовем кольцевой задачей о сельском почтальоне (КЗСП).

ОСНОВНАЯ ИДЕЯ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

КЗСП NP-полна, и только ее ограниченные частные случаи эффективно разрешимы. Из NP-полноты КЗСП следует, что она не поддается эффективным точным методам решения. Поскольку множество простых циклов графа, включающих все ребра R, может оказаться пустым, вытекает неприменимость эффективных приближенных алгоритмов. Поэтому единственной приемлемой схемой поиска решения КЗСП является схема сокращения перебора, организованная по методу ветвей и границ, который остается универсальным и мощным инструментом комбинаторной оптимизации.

В рассматриваемом методе поиска точного решения КЗСП алгоритму ветвей и границ предшествует стадия эффективной проверки известных достаточных условий неразрешимости КЗСП. К ней относится процедура вершинно-реберного преобразования (ВРП) исходного графа H в граф со структурными характеристиками, вызывающими выполнение переборного алгоритма [1]. Переборный алгоритм, выполняемый на второй стадии решения КЗСП, представляет собой модификацию классического метода Литтла [2], адаптированного для поиска решения КЗСП на преобразованном графе, в котором степень каждой вершины $i\in V$ больше двух, множество R образует паросочетание и в графе отсутствуют точки сочленения.

В предлагаемой модификации, как и в алгоритме Литтла, для решения симметричной задачи коммивояжера дерево решений развивается из представления матрицы стоимостей $[d_{ij}]_n$ ориентированным графом $G = (V, E)$, полученным в данном случае из графа H заменой каждого ребра $\{i, j\} \in U$ парой дуг: $(i, j) \in E$ и $(j, i) \in E$. Решение КЗСП представляет простой цикл минимальной стоимости. Следовательно, модификация алгоритма применима для нахождения решения КЗСП, сформулированной в терминах ориентированных графов.

В методе решения КЗСП корневой вершине X_0 дерева перебора ставится в соответствие матрица стоимостей $D = [d_{ij}]_n$ исходного графа H, матрица длин кратчайших путей M и матрица маршрутизации W. В результате их преобразования находятся вершины, порожденные на шаге ветвления. Для определения матриц M и W на каждом шаге ветвления применяется модификация алгоритма Флойда–Уоршелла. В совокупности матрицы D, M и W позволяют выполнять в условиях поставленной задачи все действия, включенные в классический метод Литтла.

Из матриц M и W, формируемых модифицированным алгоритмом Флойда–Уоршелла для текущих параметров матрицы D, определяется дуга (p, q) или путь из вершины p в вершину q, инициирующие ветвление. Условия рассматриваемой задачи требуют формирования множества запрещенных дуг Q, т.е. дуг, которые приводят к появлению подконтуров в искомом решении. В множество Q включаются дуги в зависимости от способа разбиения множества допустимых решений на подмножества. Если ветвление инициирует дуга (k, l), соответствующая ребру $\{k, l\} \in R$, то множество допустимых решений задачи разбивается на два подмножества. Первое подмножество состоит из всех циклов, включающих дугу (k, l), а второе — из всех циклов, содержащих дугу (l, k).

Пусть ветвление инициирует дуга (k, l), $\{k, l\} \notin R$, или путь из вершины k в вершину l. При формировании множества Q путь рассматривается как дуга (k, l). В этом случае множество допустимых решений разбивается на два подмножества. Первое подмножество включает все циклы, содержащие (k, l), а второе — циклы, не содержащие (k, l), т.е. $\overline{(k, l)}$.

При формировании первого подмножества требуется проверка следующих условий. Если множество R содержит ребро $\{x, k\}$, то в искомый контур вместе с дугой (k, l) включается дуга (x, k). Аналогично если множество R содержит ребро $\{y, l\}$, то к дуге (k, l) присоединяется дуга (l, y). Включение дуги (x, k) или (l, y) в подмножество решений означает, что определяющая его матрица D не содержит не только строки k и столбца l, но и той строки и столбца, номера которых являются началом и концом присоединенной дуги. В случае $\{x, k\}, \{y, l\} \in R$ к дуге (k, l) присоединяются дуги (x, k) и (l, y), а в соответствующей матрице D, определяющей это множество, исключаются строки x, k, l и столбцы k, l, y.

Сформулируем правила определения множества Q:

• для корня X_0 дерева перебора полагаем $Q = \varnothing$;

• все элементы множества Q при вершине ветвления передаются ее порожденной вершине;

• если в любое решение при вершине, порожденной на шаге ветвления, включается дуга (k, l), то к множеству Q при этой вершине добавляется дуга (l, k);

• вес каждой дуги в Q принимается равным бесконечности.

Если ветвление инициирует путь из вершины k в вершину l, включающий не менее двух дуг, то для разбиения множества допустимых решений на непересекающиеся подмножества используется правило, которое отличается от правила, применяемого для формирования множества Q. В этом случае результатом разбиения является множество вершин $V(L)$, представляющее расширенное множество активных вершин, порожденных на предыдущих шагах ветвления.

В корневой вершине и вершине ветвления, для которой процесс разбиения инициирует дуга, $V(L)=\varnothing$. Множество вершин $V(R)\cup V(L)$ определяет рабочую подматрицу матрицы M. Рабочая матрица не содержит строк и столбцов, соответствующих вершинам множества $V\setminus(V(R)\cup V(L))$. В результате приведения рабочей матрицы находится рабочая приведенная матрица M_{RL}.

Пусть ветвление инициирует путь, содержащий несколько дуг. Тогда начальная и конечная вершины пути принадлежат множеству $V(R)\cup V(L)$, а его промежуточные вершины — множеству $V\setminus(V(R)\cup V(L))$. Действительно, начальная вершина соответствует строке рабочей матрицы, конечная вершина — столбцу, а рабочая матрица построена на вершинах множества $V(R)\cup V(L)$. Промежуточная вершина v_{j_l}, $l=\overline{2, k-1}$, пути $(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_{k-1}}, v_{j_k})$ требует включения соответствующей ей строки и столбца в рабочую матрицу. В дереве перебора вершине v_{j_l} соответствует множество решений, содержащих эту вершину. Каждое такое множество можно рассматривать как разбиение на два подмножества, одно из которых содержит дугу $(v_{j_l}, v_{j_{l+1}})$. В дереве перебора путь $(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k})$ порождает k висячих вершин $X_{j_1 1}, X_{j_2 2}, \ldots, X_{j_{k-1} k-1}, X_{j_k}$, исходящих из вершины X_{j_1}. При вершинах $X_{j_1 1}$ и X_{j_k} расширение совпадает с расширением $V(L)$ для X_{j_1}, а при вершине $X_{j_l l}$, $l=\overline{2, k-1}$, оно равно $V(L)\cup\{v_{j_l}\}$.

Матрицы D при висячих вершинах формируются из матрицы D при вершине ветвления X_{j_1} следующим образом:

1) в матрице D для вершины $X_{j_i i}$, $i=\overline{i, k-1}$, элемент (j_i, j_{i+1}) принимается равным бесконечности ;

2) чтобы получить матрицу D при вершине X_{j_k}, из матрицы для X_{j_1} исключаются те строки и столбцы, по которым строится путь $(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k})$;

3) матрица D при вершине $X_{j_l l}$, $l=\overline{2, k-1}$, содержит строку, соответствующую вершине v_{j_l}, и не содержит строк и столбцов, определяющих путь $(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_l})$.

Множество $V(L)$ формируется согласно следующему правилу:

- в корневой вершине полагаем $V(L)=\varnothing$;
- все элементы множества $V(L)$ передаются вершине, порожденной вершиной ветвления;
- если ветвление вызывает путь $(s, \ldots, p, \ldots, t)$, включающий k промежуточных вершин, то соответствующее ему множество решений с расширением $V(L)$ разбивается на последовательность из $k+2$ подмножеств $(S, \ldots, P, \ldots, T)$ с расширением $V(L)\cup\{p\}$ для подмножества P, $p\neq s, t$; в любом решении подмножества P содержится часть пути $(s, \ldots, p, \ldots, t)$ из вершины s в вершину p; каждое решение подмножества T включает путь $(s, \ldots, p, \ldots, t)$; все решения подмножества S не включают этого пути.

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ

Для получения матрицы M длин кратчайших путей и матрицы W маршрутизации используется модификация известного алгоритма Флойда–Уоршелла, определяющего в ориентированном графе кратчайшие пути между всеми парами вершин [3].

Вход. D — матрица стоимостей d_{ij} подграфа $G(Q)$ ориентированного графа $G=(V, E)$, $i, j\in\{1, 2, \ldots, n\}$; $G(Q)=G$ в корневой вершине дерева перебора; R — множество ребер, образующих паросочетание исходного графа H;

Q — множество запрещенных дуг в вершине ветвления, $Q = \varnothing$, поскольку $G(Q) = G$; $V(R)$ — множество вершин, инцидентных ребрам паросочетания R; $V(L)$ — расширение множества вершин в точке ветвления, $V(L) = \varnothing$ в корне дерева перебора; I_{row}, I_{col} — множество индексов соответственно строк и столбцов матрицы D порядка $|I_{row}| = |I_{col}|$, n — порядок матрицы D в корневой вершине.

Выход. M — матрица длин m_{ij} кратчайших путей $(i, k, \ldots, l, j)$, $i, j \in V(R)$, $k, l \notin V(R)$, $\{i, j\} \notin R$;

W — матрица кратчайших путей w_{ij}, соответствующая M.

Подготовительный этап:

for all $i \in I_{row}$ **do**
    for all $j \in I_{col}$ **do**
        begin
$$w_{ij} = \begin{cases} \infty, \text{ если } i = j \text{ или } m_{ij} = \infty, \\ j, \text{ если } i \neq j \text{ и } m_{ij} < \infty \end{cases}$$
$$m_{ij} = d_{ij}$$
        end

Этап нахождения элементов матриц M и W:

for all $k \in I_{col}$ **do**
    if $k \notin V(R) \cup V(L)$ **then**
        for all $i \in I_{row}$ **do**
            for all $j \in I_{col}$ **do**
                if $i \neq j$ **and** $i \neq k$ **and** $j \neq k$ **then begin**
                    if $\{i, j\} \in R$ **then continue**
                    if $(i, j) \in Q$ **then continue**
                    if $m_{ij} > m_{ik} + m_{kj}$ **then**
                        begin
                            $m_{ij} = m_{ik} + m_{kj}$
                            $w_{ij} = k$
                        end
                    end

НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ СТОИМОСТИ КОЛЬЦЕВЫХ МАРШРУТОВ

Нижняя оценка стоимости решений определяется из подматрицы M_{RL} рабочей матрицы M. В матрицу M, полученную из матрицы D модифицированным алгоритмом Флойда–Уоршелла, включены все строки с индексами множества I_{row} и все столбцы с индексами множества I_{col}, $|I_{row}| = |I_{col}|$, I_{row}, $I_{col} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Матрица M_{RL} состоит из тех элементов, которые принадлежат строкам $I_{row} \cap (V(R) \cup V(L))$ и столбцам $I_{col} \cap (V(R) \cup V(L))$.

Для нахождения нижней оценки выполняется приведение матрицы M_{RL}, включающее такие действия:

1) найти в каждой строке минимальный элемент g_i и вычесть его из каждого элемента этой строки;

2) исключить из рассмотрения все строки, соответствующие вершинам множества $V(L)$, в каждом столбце полученной подматрицы найти минимальный элемент h_j и вычесть его из каждого элемента этого столбца;

3) в полученной матрице для элементов (i, j) и (j, i), $\{i, j\} \in R$, определить оценку $\Delta_{ij} = \min\{m'_{ij}, m'_{ji}\}$ и положить

$$m'_{ij} = m'_{ij} - \Delta_{ij}, \text{ если } m'_{ij} \neq \infty, \text{ и } m'_{ji} = m'_{ji} - \Delta_{ij}, \text{ если } m'_{ji} \neq \infty.$$

Пусть E_t — совокупность всех дуг любого решения из подмножества решений, представленного точкой ветвления t. Оценка снизу в точке t определяется по формуле

$$\varphi_t = \sum_{i \in I_{row} \cap (V(R) \cup V(L))} g_i + \sum_{j \in I_{col} \cap V(R)} h_j + \sum_{\substack{\{i,j\} \in R \\ (i,j) \notin E_t \\ (j,i) \notin E_t}} \Delta_{ij} + \sum_{(i,j) \in E_t} d_{ij} . \qquad (1)$$

Первые два слагаемых в формуле (1) позволяют оценить стоимость маршрутов аналогично, как и в методе Литтла. Третье слагаемое увеличивает нижнюю границу, исходя из искомого решения, которое должно содержать одну из дуг: (i, j) или (j, i), $\{i, j\} \in R$, не включенную в E_t.

Если подмножество решений, определяемое точкой ветвления t, пусто, то оценка φ_t равна бесконечности. В этом случае хотя бы один из элементов g_i или h_j также равен бесконечности.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Алгоритм поиска решения КЗСП строит оптимальное решение на непустом множестве ее допустимых решений или утверждает, что для данного графа H не существует простых циклов, проходящих по всем ребрам множества R, $|R| > 1$. При $|R| = 1$ КЗСП упрощается до задачи нахождения в графе H кратчайшей цепи $(p, \ldots, q)$, соединяющей вершины $\{p, q\} \in R$. Искомым решением задачи является цикл $(p, \ldots, q, p)$ стоимостью $L_{pq} + d_{pq}$, где L_{pq} — длина кратчайшей цепи $(p, \ldots, q)$. Известно, что ее можно построить за время $O(n^2)$ [3].

При изложении алгоритма поиска $y^*(R)$ предполагается, что удаление строки (столбца) в исходной или сформированной матрице состоит в присвоении бесконечности каждому элементу этой строки (столбца). Изложим это.

S0. Матрица стоимостей $[d_{ij}]_n$ имеет орграф $G = (V, E)$, $|V| = n$, $n \geq 4$, построенный из связного графа $H = (V, U)$, $E = 2|U|$; если $\{i, j\} \in U$, то (i, j), $(j, i) \in E$; граф H не содержит мостов и точек сочленения и степени всех его вершин больше двух; $d_{ij} \in Z_0^+$, если $(i, j) \in E$, иначе $d_{ij} = \infty$; Z_0^+ — множество целых неотрицательных чисел;

— R представляет непустое множество зафиксированных ребер, образующих в H паросочетание, $|R| > 1$;

— $V(R)$ есть множество вершин, инцидентных ребрам R;

— Q является множеством дуг, запрещающих образование циклов, которые не являются допустимыми решениями $y(R)$, $Q = \varnothing$;

— $V(L)$ представляет расширенное множество вершин $V(R)$, $V(L) = \varnothing$;

— положить $D = [d_{ij}]_n$; в дереве перебора матрице D соответствует корневая вершина;

— положить $Rec = \infty$.

S1. Для матрицы D выполнить модифицированный алгоритм Флойда–Уоршелла и в результате получить матрицу длин кратчайших путей M и матрицу маршрутизации W.

S2. Из матрицы M выделить рабочую подматрицу и преобразовать ее в приведенную рабочую матрицу M_{RL}, которая включает элементы матрицы M, принадлежащие строкам с индексами вершин из множества $I_{row} \cap (V(R) \cup V(L))$ и столбцам с индексами вершин из множества $I_{col} \cap V(R)$; I_{row}, I_{col} — множества индексов соответственно строк и столбцов матрицы M.

S3. В приведенной рабочей матрице M_{RL} для всех элементов $m'_{pq} = 0$, $p, q \in V(R) \cup V(L)$, найти оценку

$$\gamma(p, q) = \min_{i \neq q} m'_{pi} + \min_{j \neq p} m'_{jq}, \; i, j \in V(R) \cup V(L) \qquad (2)$$

и определить максимальную величину из них $\Gamma(p, q) = \max\{\gamma(p, q) \mid m'_{pq} = 0\}$;

— по матрице маршрутизации W установить кратчайший путь (k, l) из вершины k в вершину l.

S4. Если $\{k, l\} \in R$, то множество решений разбивается на два подмножества: первое подмножество включает маршруты, проходящие по дуге (k, l), а второе — маршруты, проходящие по дуге (l, k); в дереве ветвления разбиение порождает две висячие вершины;

— получить из матрицы D две подматрицы: D' — исключением строки k и столбца l; D'' — исключением строки l и столбца k;

— положить $D = D'$ и $D = D''$ соответственно для первого и второго подмножества разбиения;

— применить для каждого подмножества разбиения правила формирования запрещенных дуг Q;

— в матрице D при каждом подмножестве положить равными бесконечности все элементы, соответствующие запрещенным в нем дугам;

— выполнить шаги S1 и S2 для полученных матриц;

— в подмножествах разбиения оценить стоимости решений по формуле (2);

— для обоих подмножеств выполнить проверку: если размерность матрицы M_{RL} меньше трех и оценка меньше Rec, то обновить значение Rec и запомнить соответствующее решение, претендующее на оптимальное; в противном случае добавить висячую вершину к дереву ветвлений;

— перейти к шагу S7.

S5. Если $(k, l) \in E$, $\{k, l\} \notin R$, то множество решений включает подмножество маршрутов, содержащих дугу (k, l), и подмножество, в котором эта дуга отсутствует;

— определить для первого подмножества матрицу D' следующим образом: если существует ребро $\{x, k\} \in R$, а в матрице D при вершине ветвления элемент (x, k) не равен бесконечности, то получить путь (x, k, l) и удалить из D строку x, столбец l, строку и столбец k; если существует ребро $\{l, y\} \in R$ и в матрице D элемент (l, y) не равен бесконечности, то получить путь (k, l, y) и удалить из D строку k, столбец y, строку l и столбец l, если он не был удален ранее; удалить из D строку k и столбец l, если $\{x, k\}$, $\{l, y\} \notin R$;

— определить для второго подмножества матрицу D'', положив в матрице D элемент (k, l), равным бесконечности;

— применить для первого подмножества правило формирования запрещенных дуг, в матрице D' положить равными бесконечности элементы, соответствующие запрещенным дугам Q;

— положить $D = D'$ и выполнить шаги S1 и S2;

— по формуле (2) определить нижнюю границу стоимости решений, входящих в первое подмножество;

— если размерность матрицы M_{RL} первого подмножества меньше трех и его оценка меньше Rec, то обновить значение Rec и запомнить соответствующее решение, претендующее на оптимальное, в противном случае добавить висячую вершину к дереву перебора;

— применить для второго подмножества правило формирования запрещенных дуг; в матрице D'' запретить переходы, соответствующие запрещенным дугам;

— положить $D = D''$ и выполнить шаги S1 и S2;

— по формуле (2) найти нижнюю оценку стоимости решений второго подмножества;

— если оценка меньше Rec, то присоединить висячую вершину к дереву перебора;

— перейти к шагу S7.

S6. $(k, l) = (k, v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_s, \ldots, v_{r-1}, v_r, l)$ — кратчайший путь из вершины k в вершину l;

— построить путь $(\alpha, (k, v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_r, l), \beta)$, где

$$\alpha = \begin{cases} (x, k), \text{ если } \{x, k\} \in R \text{ и } d_{xk} \neq \infty, \\ \varnothing \text{ иначе}; \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} (l, y), \text{ если } \{l, y\} \in R \text{ и } d_{ly} \neq \infty, \\ \varnothing \text{ иначе}; \end{cases}$$

— множество решений является разбиением на $r+2$ подмножества, в котором первое подмножество содержит маршруты, не включающие дуги (k, v_1) пути $(\alpha, (k, v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_r, l), \beta)$; каждый маршрут s-го подмножества проходит по пути $(\alpha, (k, v_1, \ldots, v_{s-1}))$ и не проходит по дуге (v_{s-1}, v_s); в $(r+2)$-е подмножество входят маршруты, включающие путь $(\alpha, (k, v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_r, l), \beta)$; в дереве перебора добавляется $r+2$ висячих вершин;

— применить для каждого подмножества разбиения правило формирования запрещенных дуг Q;

— применить правило формирования множества $V(L)$ и получить в результате для каждого s-го подмножества расширение $V(L) \cup \{v_{s-1}\}$, $s = \overline{2, r+1}$, где $V(L)$ — расширение в первом и $(r+2)$-м подмножестве разбиения;

— для каждого полученного подмножества найти матрицы D_1, D_{r+2}, D_s, $s = \overline{2, r+1}$, $l = r + 1$; чтобы получить матрицу D_1, элемент (k, v_1) матрицы D при вершине ветвления полагается равным бесконечности ; матрица D_{r+2} определяется удалением из D строк и столбцов, соответствующих промежуточным вершинам пути $(\alpha, (k, v_1, \ldots, v_s, \ldots, v_r, l), \beta)$; для нахождения матрицы D_s, $s = \overline{2, r+1}$, $l = r + 1$, необходимо, чтобы в матрице D элемент (ν_{s-1}, ν_s) принимался равным бесконечности и из D удалялись строки и столбцы, соответствующие промежуточным вершинам пути $(\alpha, (k, v_1, \ldots, v_{s-1}))$;

— для всех полученных подмножеств выполнить проверку: если размерность матрицы M_{RL} меньше трех и оценка меньше Rec, то обновить значение Rec и запомнить соответствующее решение, претендующее на оптимальное, иначе присоединить висячую вершину к дереву ветвлений;

— перейти к шагу S7.

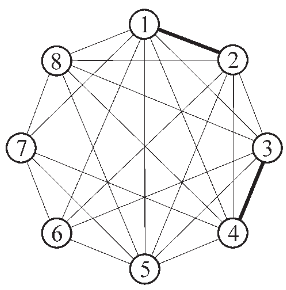
S7. Если граница Rec обновлена, то просмотреть все висячие вершины дерева ветвлений и удалить те из них, оценка которых больше или равна Rec;

— если дерево ветвлений не содержит висячих вершин, то процесс решения завершен и переход к шагу S8, иначе выбрать висячую вершину, имеющую наименьшую оценку, и перейти к шагу S3;

S8. Если Rec равно бесконечности, то множество решений исходной задачи пусто, иначе оптимальным решением задачи является решение со стоимостью Rec.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для связного графа $H = (V, U)$ КЗСП и матрицы весов его ребер $[d_{ij}]_n$, представленных на рис. 1, требуется построить простой цикл $y^*(R)$ минимальной стоимости, проходящий по ребрам множества R={{1,2}, {3,4}}, или установить, что множество маршрутов $y(R)$ пусто. Жирной линией показаны обязательные ребра для посещения.



$[d_{ij}]_8 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	9	7	7	4	6	3	3
2	9	∞	7	7	5	3	∞	7
3	7	7	∞	3	2	5	∞	5
4	7	7	3	∞	9	∞	9	7
5	4	5	2	9	∞	9	2	9
6	6	3	5	∞	9	∞	2	∞
7	3	∞	∞	9	2	2	∞	8
8	3	7	5	7	9	∞	8	∞

Рис. 1. Граф H и матрица его стоимостей

Граф H не содержит точек сочленения, мостов и вершин, степени которых меньше трех. Имеем $V(R) = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \varnothing$, $V(L) = \varnothing$. В корне дерева перебора X_0 полагаем $D = [d_{ij}]_8$, $Rec = \infty$. Для матрицы D модифицированный алгоритм Флойда–Уоршелла находит матрицу кратчайших путей M и матрицу маршрутизации W:

$M =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	9	6	7	4	5	3	3
2	9	∞	7	7	5	3	5	7
3	6	7	∞	3	2	5	4	5
4	7	7	3	∞	9	11	9	7
5	4	5	2	9	∞	4	2	9
6	5	3	5	11	4	∞	2	10
7	3	5	4	9	2	2	∞	8
8	3	7	5	7	9	10	8	∞

,

$W =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	(1,2)	(1,5,3)	(1,4)	(1,5)	(1,7,6)	(1,7)	(1,8)
2	(2,1)	∞	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,6,7)	(2,8)
3	(3,5,1)	(3,2)	∞	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,5,7)	(3,8)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	∞	(4,5)	(4,7,6)	(4,7)	(4,8)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	∞	(5,7,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,7,1)	(6,2)	(6,3)	(6,7,4)	(6,7,5)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,1)	(7,6,2)	(7,5,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,7,6)	(8,7)	∞

.

Из матрицы M удалим строки и столбцы, соответствующие вершинам множества $V \backslash (V(R) \cup V(L))$. В результате получим рабочую подматрицу $[m_{rs}]_4$:

$[m_{rs}]_4 =$

	1	2	3	4
1	∞	9	6	7
2	9	∞	7	7
3	6	7	∞	3
4	7	7	3	∞

,

которая после приведения по строкам и столбцам преобразуется в приведенную рабочую матрицу $M_{RL} = [m'_{rs}]_4$:

$M_{RL} =$

	1	2	3	4
1	∞	0	0	1
2	0	∞	0	0
3	1	1	∞	0
4	2	1	0	∞

.

По формуле (1) вычислим оценку φ_{X_0}. Сумма первых двух слагаемых в формуле равна 24, третье слагаемое представлено суммой $\Delta_{12} = \min\{m'_{12}, m'_{21}\} = 0$ и $\Delta_{34} = \min\{m'_{34}, m'_{43}\} = 0$, а четвертое равно нулю, поскольку $E_t = \varnothing$. Следовательно, $\varphi_{X_0} = 25$.

В приведенной рабочей матрице M_{RL} по формуле (2) находим для каждого элемента $m'_{pq} = 0$ величину $\gamma(p, q)$. В результате получим $\gamma(1,2) = 1$, $\gamma(1,3) = 0$, $\gamma(2,1) = 1$, $\gamma(2,3) = 0$, $\gamma(2,4) = 0$, $\gamma(3,4) = 1$, $\gamma(4,3) = 1$. Определим оценку $\Gamma(k,l) = \max\{\gamma(p,q) | m'_{pq} = 0\} = 1$ и соответствующую ей дугу (1,2) орграфа $G = (V, E)$, $\{1, 2\} \in R$.

Так как дуге (1,2) соответствует в графе H ребро из множества R , то выполняются действия шага S4. Множество решений задачи разбивается на подмножество маршрутов, включающих дугу (1,2), и подмножество маршрутов, проходящих по дуге (2,1). В дереве перебора разбиение обусловливает появление двух висячих вершин: X_1, X_2 и матриц D' и D'' :

$D' =$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	7	7	5	3	∞	7
3	7	∞	3	2	5	∞	5
4	7	3	∞	9	∞	9	7
5	4	2	9	∞	9	2	9
6	6	5	∞	9	∞	2	∞
7	3	∞	9	2	2	∞	8
8	3	5	7	9	∞	8	∞

,

$D'' =$

	1	3	4	5	6	7	8
1	∞	7	7	4	6	3	3
3	7	∞	3	2	5	∞	5
4	7	3	∞	9	∞	9	7
5	5	2	9	∞	9	2	9
6	3	5	∞	9	∞	2	∞
7	∞	∞	9	2	2	∞	8
8	7	5	7	9	∞	8	∞

.

Для матрицы D' при вершине X_1 имеем $Q = \{(2, 1)\}$, поэтому элемент (2, 1) принимает значение бесконечности; $V(R) = \{1, 2, 3, 4\}$, $V(L) = \varnothing$.

Модифицированный алгоритм Флойда–Уоршелла, входом которого является матрица $D = D'$, строит матрицы M и W :

$M =$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	7	7	5	3	5	7
3	6	∞	3	2	5	4	5
4	7	3	∞	9	11	9	7
5	4	2	9	∞	4	2	9
6	5	5	11	4	∞	2	10
7	3	4	9	2	2	∞	8
8	3	5	7	9	10	8	∞

,

$W =$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,6,7)	(2,8)
3	(3,5,1)	∞	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,5,7)	(3,8)
4	(4,1)	(4,3)	∞	(4,5)	(4,7,6)	(4,7)	(4,8)
5	(5,1)	(5,3)	(5,4)	∞	(5,7,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,7,1)	(6,3)	(6,7,4)	(6,7,5)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,1)	(7,5,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,1)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,7,6)	(8,7)	∞

.

В матрице M при вершине X_1 имеем $I_{row}= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $I_{col} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Рабочая подматрица матрицы M состоит из элементов строк с индексами вершин множества $I_{row} \cap (V(R) \cup V(L)) = \{2, 3, 4\}$ и столбцов с индексами вершин множества $I_{col} \cap V(R) = \{1, 3, 4\}$. После ее приведения по строкам и столбцам получим матрицу M_{RL} и подматрицу $[m_{rs}]_3$:

$M_{RL} =$

	1	3	4
2	∞	0	0
3	1	∞	0
4	1	0	∞

,

$[m_{rs}]_3 =$

	1	3	4
2	∞	7	7
3	6	∞	3
4	7	3	∞

.

Найдем оценку φ_{X_1}, вычисляемую по формуле (1). Сумма первых двух слагаемых в φ_{X_1} равна 16, третье слагаемое $\Delta_{34} = \min\{m'_{34}, m'_{43}\}$ дает нуль, а четвертое слагаемое — вес $d_{12} = 9$ для дуги (1, 2). Следовательно, $\varphi_{X_1} = 25$.

По матрице D'' при вершине X_2, для которой $Q = \{(1, 2)\}$, $V(R) = \{1, 2, 3, 4\}$, $V(L) = \varnothing$, находим матрицы M и W:

$M =$

	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	6	7	4	5	3	3
3	7	∞	3	2	5	4	5
4	7	3	∞	9	11	9	7
5	5	2	9	∞	4	2	9
6	3	5	11	4	∞	2	10
7	5	4	9	2	2	∞	8
8	7	5	7	9	10	8	∞

,

$W =$

	2	3	4	5	6	7	8
1	∞	(1,5,3)	(1,4)	(1,5)	(1,7,6)	(1,7)	(1,8)
3	(3,2)	∞	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,5,7)	(3,8)
4	(4,2)	(4,3)	∞	(4,5)	(4,7,6)	(4,7)	(4,8)
5	(5,2)	(5,3)	(5,4)	∞	(5,7,6)	(5,7)	(5,8)
6	(6,2)	(6,3)	(6,7,4)	(6,7,5)	∞	(6,7)	(6,7,8)
7	(7,6,2)	(7,5,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	∞	(7,8)
8	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,7,6)	(8,7)	∞

.

Поскольку $I_{row} \cap (V(R) \cup V(L)) = \{1, 3, 4\}$, $I_{col} \cap V(R) = \{2, 3, 4\}$, то

$[m_{rs}]_3 =$

	2	3	4
1	∞	6	7
3	7	∞	3
4	7	3	∞

, $M_{RL} =$

	2	3	4
1	∞	0	1
3	0	∞	0
4	0	0	∞

, $\varphi_{X_2} = 12 + 4 + 0 + d_{12} = 16 + 9 = 25.$

Выберем вершину X_1 точкой ветвления. В соответствующей ей матрице M_{RL} имеем оценки $\gamma(2, 3) = 0$, $\gamma(2, 4) = 0$, $\gamma(3, 1) = 1$, $\gamma(3, 4) = 0$, $\gamma(4, 3) = 1$, $\Gamma(3, 1) = 1$. Ветвление инициирует элемент (3,1), который в матрице маршрутизации W представляет путь (3,5,1). Поэтому выполняются действия шага S6.

Так как $\{3, 4\} \in R$, $d_{43} \neq \infty$, то $\alpha = (4, 3)$, однако $\beta = \varnothing$, поскольку ребро $\{1, 2\} \in R$ имеет в матрице D' вес $d_{12} = \infty$. Получен путь (4, 3, 5, 1), который вызывает разбиение множества решений, представленного вершиной X_1, на три подмножества: X_3, X_4, X_5. Все маршруты в X_3 не включают дуги (3, 5), в X_4 все маршруты включают дуги (4, 3), (3, 5), а в X_5 включены маршруты, проходящие по дугам (4, 3), (3, 5), (5, 1). На рис. 2 показано дерево перебора, в которое добавляются три вершины, исходящие из точки ветвления X_1. Жирной линией изображен путь из корня дерева к множеству, представляющему оптимальное решение задачи. Черта над дугами означает запрет перехода по соответствующей дуге.

Для множества маршрутов X_3, не включающих дуги (3,5), имеем множество $Q = \{(2,1)\}$, $V(R) = \{1, 2, 3, 4\}$, $V(L) = \varnothing$, элементы $d_{35} = \infty$, $d_{21} = \infty$, а также матрицы D, M, W, M_{RL}:

$D =$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	7	7	5	3	∞	7
3	7	∞	3	∞	5	∞	5
4	7	3	∞	9	∞	9	7
5	4	2	9	∞	9	2	9
6	6	5	∞	9	∞	2	∞
7	3	∞	9	2	2	∞	8
8	3	5	7	9	∞	8	∞

, $M =$

	1	3	4	5	6	7	8
2	∞	7	7	5	3	5	3
3	7	∞	3	9	5	7	5
4	7	3	∞	9	11	9	7
5	4	2	9	∞	4	2	9
6	5	5	11	4	∞	2	10
7	3	4	9	2	2	∞	8
8	3	5	7	9	10	8	∞

,

$$
W = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
2 & \infty & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) & (2,6,7) & (2,8) \\ \hline
3 & (3,1) & \infty & (3,4) & (3,6,7,5) & (3,6) & (3,5,7) & (3,8) \\ \hline
4 & (4,1) & (4,3) & \infty & (4,5) & (4,7,6) & (4,7) & (4,8) \\ \hline
5 & (5,1) & (5,3) & (5,4) & \infty & (5,7,6) & (5,7) & (5,8) \\ \hline
6 & (6,7,1) & (6,3) & (6,7,4) & (6,7,5) & \infty & (6,7) & (6,7,8) \\ \hline
7 & (7,1) & (7,5,3) & (7,4) & (7,5) & (7,6) & \infty & (7,8) \\ \hline
8 & (8,1) & (8,3) & (8,4) & (8,5) & (8,7,6) & (8,7) & \infty \\ \hline
\end{array}\,, \qquad
M_{RL} = \begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1 & 3 & 4 \\ \hline
2 & \infty & 0 & 0 \\ \hline
3 & 0 & \infty & 0 \\ \hline
4 & 0 & 0 & \infty \\ \hline
\end{array}\,,
$$

и оценку $\varphi_{X_3} = 26$.

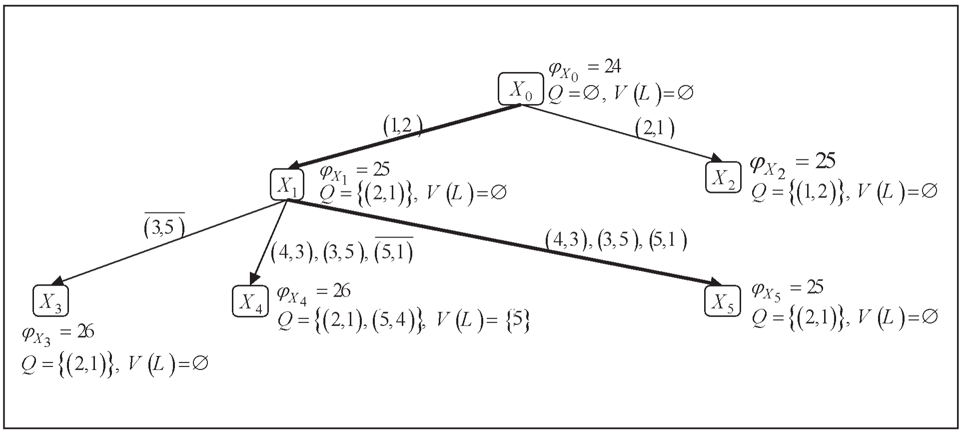


Рис. 2. Дерево перебора

Множество маршрутов X_4, проходящих по дугам (4,3), (3,5) и не включающих дуги (5,1), формирует $Q = \{(2,1),\ (5,4)\}$, $V(R) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $V(L) = \{5\}$, $d_{21} = \infty$, $d_{54} = \infty$, $d_{51} = \infty$, а также

$$
D = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
2 & \infty & 7 & 3 & \infty & 7 \\ \hline
5 & \infty & \infty & 9 & 2 & 9 \\ \hline
6 & 6 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \hline
7 & 3 & 9 & 2 & \infty & 8 \\ \hline
8 & 3 & 7 & \infty & 8 & \infty \\ \hline
\end{array}\,, \qquad
M = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
2 & \infty & 7 & 3 & 5 & 7 \\ \hline
5 & 5 & \infty & 4 & 2 & 9 \\ \hline
6 & 5 & 11 & \infty & 2 & 10 \\ \hline
7 & 3 & 9 & 2 & \infty & 8 \\ \hline
8 & 3 & 7 & 10 & 8 & \infty \\ \hline
\end{array}\,,
$$

$$
W = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
2 & \infty & (2,4) & (2,6) & (2,6,7) & (2,8) \\ \hline
5 & (5,7,1) & (5,4) & (5,7,6) & (5,7) & (5,8) \\ \hline
6 & (6,7,1) & (6,7,4) & \infty & (6,7) & (6,7,8) \\ \hline
7 & (7,1) & (7,4) & (7,6) & \infty & (7,8) \\ \hline
8 & (8,1) & (8,4) & (8,7,6) & (8,7) & \infty \\ \hline
\end{array}\,, \qquad
[m_{rs}]_2 = \begin{array}{c|c|c|}
 & 1 & 4 \\ \hline
2 & \infty & 7 \\ \hline
5 & 5 & \infty \\ \hline
\end{array}\,.
$$

После приведения подматрицы $[m_{rs}]_2$ получим матрицу

$$
M_{RL} = \begin{array}{c|c|c|}
 & 1 & 4 \\ \hline
2 & \infty & 0 \\ \hline
5 & 0 & \infty \\ \hline
\end{array}
$$

и оценку $\varphi_{X_4} = 7 + 5 + d_{12} + d_{43} + d_{35} = 26$.

Для множества маршрутов X_5, проходящих по дугам (4, 3), (3, 5), (5, 1), имеем $Q = \{(2,1)\}$, $V(R) = \{1, 2, 3, 4\}$, $V(L) = \varnothing$, $d_{24} = \infty$,

$$D = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} \\ \hline 7 & 3 & \infty & 7 \\ \hline \infty & \infty & 2 & \infty \\ \hline 9 & 2 & \infty & 8 \\ \hline 7 & \infty & 8 & \infty \\ \hline \end{array}, \quad M = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} \\ \hline 7 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 1 & \infty & 2 & 10 \\ \hline 9 & 2 & \infty & 8 \\ \hline 7 & 10 & 8 & \infty \\ \hline \end{array}, \quad W = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} \\ \hline (2,4) & (2,6) & (2,6,7) & (2,8) \\ (6,7,4) & \infty & (6,7) & (6,7,8) \\ (7,4) & (7,6) & \infty & (7,8) \\ (8,4) & (8,7,6) & (8,7) & \infty \\ \hline \end{array}, \quad M_{RL} = \begin{array}{c} \\ 2 \end{array} \begin{array}{|c|} \multicolumn{1}{c}{4} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}.$$

Рабочая подматрица M_{RL} состоит из одного элемента: (2,4). Отсюда следует, что получено допустимое решение задачи. В матрице W элемент (2,4) представлен дугой (2,4) стоимостью $d_{24} = 7$. Стоимость решения, содержащего дуги (1,2), (2,4), (4,3), (3,5), (5,1), равна нижней границе $\varphi_{X_5} = d_{12} + d_{43} + d_{35} + d_{51} + d_{24} = 9 + 3 + 2 + 4 + 7 = 25$. Поскольку значение $Rec > \varphi_{X_5}$, то $Rec = \varphi_{X_5} = 25$. Оценка φ_{X_5} является наименьшей из всех оценок висячих вершин дерева перебора. Следовательно, $y^*(R) = (1, 2, 4, 3, 5, 1)$, $C(y^*(R)) = 25$.

Таким образом, в статье сформулирована ограниченная версия известной задачи (кольцевой задачи) о сельском почтальоне. Предложен метод ее решения, развивающий классический алгоритм ветвей и границ для решения задачи коммивояжера (алгоритм Литтла). Разработанный метод может быть также применен для решения гамильтоновой задачи о сельском почтальоне и гамильтоновой задачи коммивояжера.

Авторы выражают благодарность профессору Анатолию Васильевичу Панишеву за ценные замечания и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.В., Панишев А.В. Вершинно-реберное преобразование в гамильтоновой задаче о сельском почтальоне // Искусствен. интеллект. — 2009. — Вып. 3. — С. 138–143.
2. Яблонский А.А. Минимизация кольцевых маршрутов доставки продукции потребителям // Экономика и мат. методы. — 2006. — **43**, № 3. — С. 124–131.
3. Костікова М.В., Панішев А.В., Плечистий Д.Д. Вузлові питання задачі комівояжера. 2 // Вісник Житомир. держ. технологіч. ун-ту. Техн. науки. — 2004. — № 30. — С. 99–108.
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2001. — 960 с.

Поступила 29.01.2013