СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, О.А. ЕМЕЦ, А.О. ЕМЕЦ

УДК 519.85

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ: МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Ключевые слова: *оптимизация, интервальная неопределенность, метод ветвей и границ.*

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость получения практических результатов побуждает к изучению недостаточно исследованных задач оптимизации разных классов с данными, которые имеют определенность (см. относительно комбинаторной оптимизации, в частности [1–3]). Для таких задач целесообразно развивать методы с учетом их специфики. Поэтому актуальным является рассмотрение таких задач и методов их исследования для разных видов неопределенности, в том числе интервальной [4–11]. В настоящей статье обоснован общий подход в рамках метода ветвей и границ (МВГ) к решению задачи минимизации в интервальной постановке.

1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть функционал $F(x)$ задан на множестве центрированных интервалов X $(x \in X)$ [5, 6]); $F(x) \in X$, т.е. значение, которое он принимает, также является элементом множества центрированных интервалов; $D \subset X$ — допустимое множество центрированных интервалов. В работах [4–6] введены арифметические операции над интервалами и элементарные функции на $X \subset R^1$. Рассмотрим, каким образом можно установить линейный порядок на множестве $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ центрированных интервалов $a_i = (\alpha_i, \sigma_i)$, $i \in J_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Введем характеристические сравнители для центрированных интервалов, которые обозначим $a = (\alpha, \sigma)$, понимая под этим интервал числовой оси R^1, $a = (\alpha - \sigma, \alpha + \sigma) \subset R^1$, где $\sigma \geq 0$, $\alpha, \sigma \in R^1$. Введем характеристические сравнители (далее просто сравнители) H_1, H_2, H_3, которые ставят в соответствие центрированному интервалу (α, σ) действительное число согласно правилам:

1) $H_1(\alpha, \sigma) = \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}\, \mathrm{sign}(\alpha)$, здесь и далее

$$\mathrm{sign}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha = 0; \\ -1, & \alpha < 0; \end{cases}$$

2) $H_2(\alpha, \sigma) = (|\alpha| + \sigma) \cdot \text{sign}(\alpha) = \begin{cases} \alpha + \sigma, & \alpha > 0, \\ \alpha - \sigma, & \alpha < 0, \end{cases}$

если $H_1(\alpha, \sigma) = H_1(\beta, \delta)$; аналогично H_2 вычисляется для (β, δ);

3) если $H_t(a_i) = H_t(a_j)$, $t = 1, 2$, то $\alpha_i \neq 0$, $H_3(a_i) = \alpha_i$, $i \in J_k$. Если $\alpha_i = 0$, то $H_3(a_i) = \sigma_i$.

Сравнитель центрированных интервалов, который являет собой последовательное (при необходимости) применение сравнителей H_1, H_2, H_3, обозначим $H = \langle H_1, H_2, H_3 \rangle$. Докажем свойство сравнителя H, необходимое для дальнейшего использования.

Утверждение 1. Если $H_1(a_i) = H_1(a_j)$, $H_2(a_i) = H_2(a_j)$, то или $a_i = a_j$, или $-\alpha_i = \sigma_j$, $-\alpha_j = \sigma_i$, или $\alpha_i = \sigma_j$, $\alpha_j = \sigma_i$, или $\alpha_i = \alpha_j = 0$.

Доказательство. Пусть $H_t(a_i) = H_t(a_j)$, $t = 1, 2$. Тогда справедливы равенства

$$\sqrt{\alpha_i^2 + \sigma_i^2}\,\text{sign}(\alpha_i) = \sqrt{\alpha_j^2 + \sigma_j^2}\,\text{sign}(\alpha_j); \tag{1}$$

$$(|\alpha_i| + \sigma_i)\,\text{sign}(\alpha_i) = (|\alpha_j| + \sigma_j)\,\text{sign}(\alpha_j). \tag{2}$$

Рассмотрим три случая: 1) $\alpha_i > 0$; 2) $\alpha_i = 0$; 3) $\alpha_i < 0$.

Случай 1. Если $\alpha_i > 0$, то $\alpha_j > 0$ (следует из равенств (1), (2)) и $\text{sign}\,\alpha_i = \text{sign}\,\alpha_j$. В результате упрощения получим

$$\alpha_i^2 + \sigma_i^2 = \alpha_j^2 + \sigma_j^2; \tag{3}$$

$$\alpha_i + \sigma_i = \alpha_j + \sigma_j, \tag{4}$$

отсюда

$$\alpha_i \sigma_i = \alpha_j \sigma_j. \tag{5}$$

Случай 1.1. Если $\sigma_i \neq 0$, то из (5) $\alpha_i = \dfrac{\sigma_j}{\sigma_i}\alpha_j$. Подставим α_i в (3), получим $\alpha_j^2(\sigma_j^2 - \sigma_i^2) = \sigma_i^2(\sigma_j^2 - \sigma_i^2)$. Таким образом, имеем две возможности:

а) $\sigma_i = \sigma_j$, тогда из (5) $\alpha_i = \alpha_j$, т.е. $a_i = a_j$;

б) $\sigma_i \neq \sigma_j$, тогда $\sigma_j^2 - \sigma_i^2 \neq 0$, т.е. $\alpha_j^2 = \sigma_i^2$ при условиях $\alpha_j > 0$, $\sigma_i > 0$; значит, $\sigma_i = \alpha_j$; если $\sigma_i = \alpha_j$, то из (5) имеем $\sigma_j = \alpha_i$.

Случай 1.2. Если $\sigma_i = 0$, то: а) $\alpha_j = 0$ или б) $\sigma_j = 0$, или в) одновременно $\alpha_j = 0$, $\sigma_j = 0$. Ситуации а) и в) невозможны, потому что в случае 1, который рассматривается, $\alpha_i > 0$ и $\alpha_j > 0$. Таким образом, рассмотрим вариант б).

Если $\sigma_j = 0$, то из (3) имеем $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$ при условиях $\alpha_j > 0$; $\alpha_i > 0$, т.е. $\alpha_i = \alpha_j$; таким образом, $\alpha_i = \alpha_j$; $\sigma_i = \sigma_j = 0$, т.е. $a_i = a_j$.

Случай 1 рассмотрен.

Случай 2. Если $\alpha_i = 0$, то $H_1(a_i) = H_2(a_i) = 0$, $\sqrt{\alpha_i^2 + \sigma_i^2}\,\text{sign}(\alpha_i) = 0$. Таким образом, из (1) и (2) или только $\alpha_j = 0$, а $\sigma_j \neq 0$, или и $\alpha_j = 0$ и $\sigma_j = 0$, т.е. при $\alpha_i = 0$ имеем $\alpha_j = 0$.

Случай 3. Если $\alpha_i < 0$, то и $\alpha_j < 0$ (следует из обоих исходных равенств (1) и (2)). После упрощения последних имеем (3): $\alpha_i^2 + \sigma_i^2 = \alpha_j^2 + \sigma_j^2$ и

$$\sigma_i - \alpha_i = \sigma_j - \alpha_j > 0. \tag{6}$$

Отсюда следует (5): $\alpha_i \sigma_i = \alpha_j \sigma_j$. Далее доказательство, аналогичное случаю 1.

Случай 3.1. Если $\sigma_i \neq 0$, то $\alpha_j^2(\sigma_j^2 - \sigma_i^2) = \sigma_i^2(\sigma_j^2 - \sigma_i^2)$: а) $\sigma_i = \sigma_j$, тогда из (5) $\alpha_i = \alpha_j$; таким образом, $a_i = a_j$; б) $\sigma_i \neq \sigma_j$, тогда $|\alpha_j| = \sigma_i$, но $\alpha_j < 0$ при $\sigma_i > 0$. Таким образом, $\sigma_i = -\alpha_j$; значит, из (5) $\sigma_j = -\alpha_i$.

Случай 3.2. Если $\sigma_i = 0$, тогда из (5): а) $\alpha_j = 0$ или б) $\sigma_j = 0$, или в) одновременно $\alpha_j = 0$, $\sigma_j = 0$. Первая и третья ситуации в случае 3 ($\alpha_i < 0$; $\alpha_j < 0$) невозможны. Рассмотрим вариант б). Если $\sigma_j = 0$, имеем из (3) $\alpha_i^2 = \alpha_j^2$ при $\alpha_i < 0$, $\alpha_j < 0$; таким образом, $\alpha_i = \alpha_j$ и $\sigma_i = \sigma_j = 0$. Следовательно, $a_i = a_j$.

Таким образом, во всех возможных случаях утверждение доказано.

Следствие. При условиях утверждения 1: 1) $a_i = a_j$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \alpha_j > 0$, $\sigma_i = \sigma_j$; 2) $\alpha_i = \sigma_j$; $\alpha_j = \sigma_i$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i > 0$; $\alpha_j > 0$, $\sigma_i \neq \sigma_j$; 3) $\alpha_i = -\sigma_j$; $\alpha_j = -\sigma_i$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i < 0$; $\alpha_j < 0$; $\sigma_i \neq \sigma_j$. При $\alpha_i = 0$ имеем также $\alpha_j = 0$, а при $\alpha_i = \alpha_j$ имеем или $a_i = a_j$, или $\alpha_i = \alpha_j = 0$.

Бинарное отношение порядка $\prec$ между интервалами a_i, a_j, $i, j \in J_k$, зададим следующим образом:

1) если $H_1(a_i) < H_1(a_j)$, то $a_i \prec a_j$;

2) если $H_1(a_i) = H_1(a_j)$, $H_2(a_i) < H_2(a_j)$, то $a_i \prec a_j$;

3) если $H_1(a_i) = H_1(a_j)$, $H_2(a_i) = H_2(a_j)$, то согласно утверждению 1 это означает:

а) $a_i = a_j$, тогда $H_3(a_i) = H_3(a_j)$, считаем по определению, что $a_i \prec a_j$ (или $a_j \prec a_i$), так как $a_i = a_j$;

или

б) $a_i \neq a_j$, $a_i = (\alpha_i, \sigma_i)$, $a_j = (\alpha_j, \sigma_j)$ и $|\alpha_i| = \sigma_j \neq 0$, $\sigma_i = |\alpha_j| \neq 0$ (в этом случае $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\sigma_i \neq \sigma_j$), тогда $H_3(a_i) = \alpha_i$, считаем, что $a_i \prec a_j$, если $H_3(a_i) < H_3(a_j)$;

или

в) $a_i \neq a_j$, $\alpha_i = \alpha_j = 0$, $\sigma_i \neq \sigma_j$, тогда $H_3(a_i) = \sigma_i$ и $H_3(a_j) = \sigma_j$; если $H_3(a_i) < H_3(a_j)$, то $a_i \prec a_j$.

Иными словами, случай 3 означает, что если $H_t(a_i) = H_t(a_j)$, $t = 1, 2$, и $H_3(a_i) \leq H_3(a_j)$, то $a_i \prec a_j$, причем если $H_3(a_i) = H_3(a_j)$, то это означает, что $a_i = a_j$, и наоборот.

Пример. Рассмотрим заданные ниже центрированные интервалы a, b, c, d и сравним их:

1) если $a = (4; 1)$; $b = (3; 2)$, то $H_1(a) = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$; $H_1(b) = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; $H_1(a) < H_1(b) \Rightarrow b \prec a$;

2) если $a = (4; 1)$; $c = (\sqrt{17}; 0)$, то $H_1(a) = \sqrt{17}$; $H_1(c) = \sqrt{17}$, $H_2(a) = 4 + 1 = 5$; $H_2(c) = \sqrt{17}$; $H_2(c) = \sqrt{17} < \sqrt{25} = H_2(a) \Rightarrow c \prec a$;

3) если $b = (3; 2)$; $c = (\sqrt{17}; 0)$, то $H_1(b) = \sqrt{13}$; $H_1(c) = \sqrt{17} \Rightarrow b \prec c$, т.е. $b \prec c \prec a$;

4) если $a = (4; 1)$; $d = (1; 4)$, то $H_1(a) = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$; $H_1(d) = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$; $H_2(a) = 5$; $H_2(d) = 5$; $H_3(a) = 4$; $H_3(d) = 1 \Rightarrow d \prec a$.

Поскольку $H_2(c) = \sqrt{17} < H_2(d)$, то $c \prec d$. Следовательно, $b \prec c \prec d \prec a$.

Здесь интервалы a, b, c, d упорядочены (все интервалы можно сравнить попарно). И это не случайно, поскольку введенные соотношения на множестве центрированных интервалов — это линейный порядок, что утверждает следующая теорема.

Теорема 1. Бинарное отношение $\prec$ между центрированными интервалами, которое задается сравнителем $H = \langle H_1, H_2, H_3 \rangle$, является линейным порядком.

Доказательство. Линейный порядок — это частичный порядок $\prec$, определенный для всех пар a, b, когда или $a \prec b$, или $b \prec a$, т.е. нет двух элементов, которые невозможно сравнить. Частичный порядок — это рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение.

Бинарное отношение, определяемое сравнителем H, — рефлексивное отношение, поскольку $a \prec a : H(a) = H_3(a) = H_3(b)$, когда $a = b$, $a \prec b$; $b \prec a$; следовательно, $a \prec a$.

Докажем транзитивность, т.е. если $a \prec b$, $b \prec c$, то $a \prec c$:

1) если $H_1(a) < H_1(b)$; $H_1(b) < H_1(c)$, то $H_1(a) < H_1(c)$, утверждение в этом случае доказано;

2) $H_1(a) = H_1(b)$; $H_1(b) < H_1(c)$, т.е. из $H_1(a) < H_1(c)$ следует $a \prec c$;

3) $H_1(a) < H_1(b)$; $H_1(b) = H_1(c)$; тогда $a \prec c$ (поскольку $H_1(a) < H_1(c)$);

4) $H_1(a) = H_1(b) = H_1(c)$, тогда $a \prec b$, $b \prec c$; $H_2(a) < H_2(b)$; $H_2(b) < H_2(c)$; таким образом, $H_2(a) < H_2(c)$, т.е. $a \prec c$;

5) $H_1(a) = H_1(b) = H_1(c)$.

Рассмотрим две возможности:

5.1) из $H_2(a) = H_2(b)$; $H_2(b) < H_2(c)$ следует $a \prec b$, $b \prec c$; тогда $H_2(a) < H_2(c)$; таким образом, $a \prec c$;

5.2) аналогично имеем при $H_2(b) = H_2(c)$ и $H_2(a) < H_2(b)$; тогда $H_2(a) < H_2(c)$; таким образом, $a \prec c$;

6) $H_i(a) = H_i(b) = H_i(c)$, $i = 1, 2$, при $a \prec b$, $b \prec c$.

Рассмотрим возможности:

6.1) $H_3(a) < H_3(b)$; $H_3(b) < H_3(c)$; таким образом, $H_3(a) < H_3(c)$, это означает, что $a \prec c$;

6.2) $H_3(a) = H_3(b)$; $H_3(b) < H_3(c)$. При условиях утверждения 1 (которые выполняются) $H_3(a) = H_3(b)$ имеем $a = b$, т.е. и $a = b$, и $b \prec c$; таким образом, $a \prec c$; аналогично из $H_3(a) < H_3(b)$; $H_3(b) = H_3(c)$ следует $a \prec c$.

6.3) $H_3(a) = H_3(b) = H_3(c)$, при условиях утверждения 1 имеем $a = b = c$, а следовательно, $a \prec c$.

Все возможные случаи рассмотрены. Транзитивность доказана.

Докажем антисимметричность, т.е. если $a \prec b$; $b \prec a$, то $a = b$. Обозначим $a = (\alpha, \sigma)$; $b = (\beta, \delta)$.

1. $H_1(a) < H_1(b)$; $H_1(b) < H_1(a)$. Это значит, что $\sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}\operatorname{sign}(\alpha) < \sqrt{\beta^2 + \delta^2}\operatorname{sign}(\beta)$, а также выполняется неравенство, в котором противоположный знак. Ни для каких a, b эти два неравенства не выполняются одновременно.

2. $H_1(a) = H_1(b)$, $H_2(a) < H_2(b)$ и $H_2(a) > H_2(b)$. Это означает, что выполняются неравенство $(|\alpha| + \sigma)\operatorname{sign}(\alpha) < (|\beta| + \sigma)\operatorname{sign}(\beta)$ и неравенство с противоположным знаком. Ни для каких a, b эти неравенства одновременно не выполняются.

3. $H_i(a) = H_i(b)$, $i = 1, 2$; $a \prec b$; $b \prec a$. Исходя из этого, рассмотрим, что: а) $H_3(a) \ne H_3(b)$; б) $H_3(a) = H_3(b)$. В случае а) имеем $H_3(a) < H_3(b)$ или $H_3(a) > H_3(b)$, т.е. или $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$, что одновременно невозможно, или $\sigma > \delta$, $\sigma < \delta$, когда $\alpha = \beta = 0$, что одновременно невозможно.

В случае б) имеем $H_i(a) = H_i(b)$, $i = 1, 2, 3$; $a \prec b$; $b \prec a$. При условиях утверждения 1 $H_3(a) = H_3(b)$ означает $a = b$.

Следовательно, из $a \prec b$, $b \prec a$ вытекает $a = b$, при этом $H_1(a) = H_1(b)$, $H_2(a) = H_2(b)$ и $H_3(a) = H_3(b)$. Значит, $a \prec b$; $b \prec a \Leftrightarrow a = b$. Антисимметричность доказана.

Таким образом, порядок $\prec$, задаваемый сравнителем H, — частичный порядок. Очевидно, что H_1, H_2, H_3 можно подсчитать для любых двух центрированных интервалов a, b, т.е. определить $a \prec b$ или $b \prec a$. Следовательно, линейность порядка H доказана.

Важным в задачах оптимизации есть определение минимума и максимума на множестве центрированных интервалов. Имея линейный порядок, введем определения минимума и максимума на множестве центрированных интервалов. Упорядочим элементы множества, пронумеровав их согласно линейного порядка: $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_{k-1} \prec a_k$. Максимумом назовем a_k: $a_k = \max\limits_{a_i \in A} \{a_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$; минимумом назовем a_1: $a_1 = \min\limits_{a_i \in A} \{a_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Используя операции над элементами множества X центрированных интервалов, понятия минимума на множестве X и оперируя интервальными элементарными функциями (например, [5, 6]), задачу оптимизации на множестве центрированных интервалов можно сформулировать так: найти в области $D \subset X$ минимум функционала $F: D \to X$:

$$\min_{x \in D} F(x). \qquad (7)$$

Множество $D \subset X$ будем далее называть интервальным, а элементы x из D — допустимыми решениями.

Рассмотрим универсальный метод для решения задачи (7).

2. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ИНТЕРВАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Обозначим S некоторый список (массив), n_{rec} — переменная, которая обозначает номер просмотренного листа дерева ветвления. Алгоритм МВГ для (7) изложен в следующих шагах.

0. $S = \varnothing$; $n_{rec} = 0$. Задание допустимой области D ($D \neq \varnothing$) и целевого функционала F на D.

1. Множество D разбивается на подмножества $D_1, \ldots, D_n$ со свойствами: $D_i \neq \varnothing$; $D_i \cap D_j = \varnothing$ $\forall i, j \in J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$. Множества $D_1, \ldots, D_n$ считаем неразветвленными и неотсеченными. Назовем такое множество почкой, а свойства таких множеств — свойствами почек. Каждому множеству, которое не принадлежит S и которое является почкой, припишем оценку $\nu_i(D_i) = \nu_i \in X$ — центрированный интервал со свойством $\nu_i \prec F(x)$ $\forall x \in D_i$, где $\prec$ обозначает линейный порядок на множестве центрированных интервалов X. Дозапишем эти множества в список S почек с оценками. Обозначим n количество почек $|S|$ дерева ветвления.

2. Проверка: $S = \varnothing$? Если «да» — на шаг 16. Если «нет» — на шаг 3.

3. Выбираем произвольную почку D_i.

4. Проверяем, равно ли количество элементов $|D_i|$ в множестве D_i единице: $|D_i| = 1$? Если «да» — на шаг 6. Если «нет» — на шаг 5.

5. Имеем $|D_i| \neq 1$ (точнее, $|D_i| > 1$), разбиваем (разветвляем) D_i как D, перейдя на шаг 1.

6. Одноэлементную почку называем листом, т.е. $D_i = \{x_{n_{rec}}\}$, $x_{n_{rec}} \in D$. Лист D_i исключаем из S. Вычисляем $F_{n_{rec}} = F(x_{n_{rec}})$, используя операции [4–6] для интервальных множеств.

7. Проверяем: $n_{rec} > 0$? Если «нет» (т.е. $n_{rec} = 0$), то переход на шаг 8. Иначе (т.е. $n_{rec} > 0$) — на шаг 14.

8. Присваиваем точке x_{rec}, которая хранит рекордное значение целевой функции, точку x_0, т.е. $x_{rec} := x_0$, а номеру n_{rec} присваиваем единицу: $n_{rec} := 1$.

9. Задаем $i = 1$ (организовываем начало цикла перебора почек).

10. Проверка: $\nu_i \prec F_0$? Если «да» — на шаг 12, если «нет» — на шаг 11.

11. Почку D_i исключаем из списка S. (Заметим, что в этом случае n не изменяется, оно изменяется только на шаге 1.) Это означает отсечение почки D_i.

12. Увеличиваем на единицу i, т.е. $i := i+1$.

13. Проверка: $i > n$? Если «да» — переход на шаг 2. Если «нет» — переход на шаг 10.

14. Проверка: $F_{n_{rec}} \succ F_0$? Если «да» — переход на шаг 2. Если «нет» — переход на шаг 15.

15. Присваиваем рекорду целевой функции F_0 значение $F_{n_{rec}}$, т.е. $F_0 := F_{n_{rec}}$, далее $x_{rec} := x_{n_{rec}}$; $n_{rec} := n_{rec} + 1$. Переход на шаг 9.

16. Вывод результата: минимальное значение F_0 целевой функции и точка x_{rec}, при которой целевая функция достигает F_0. Остановка.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 1.

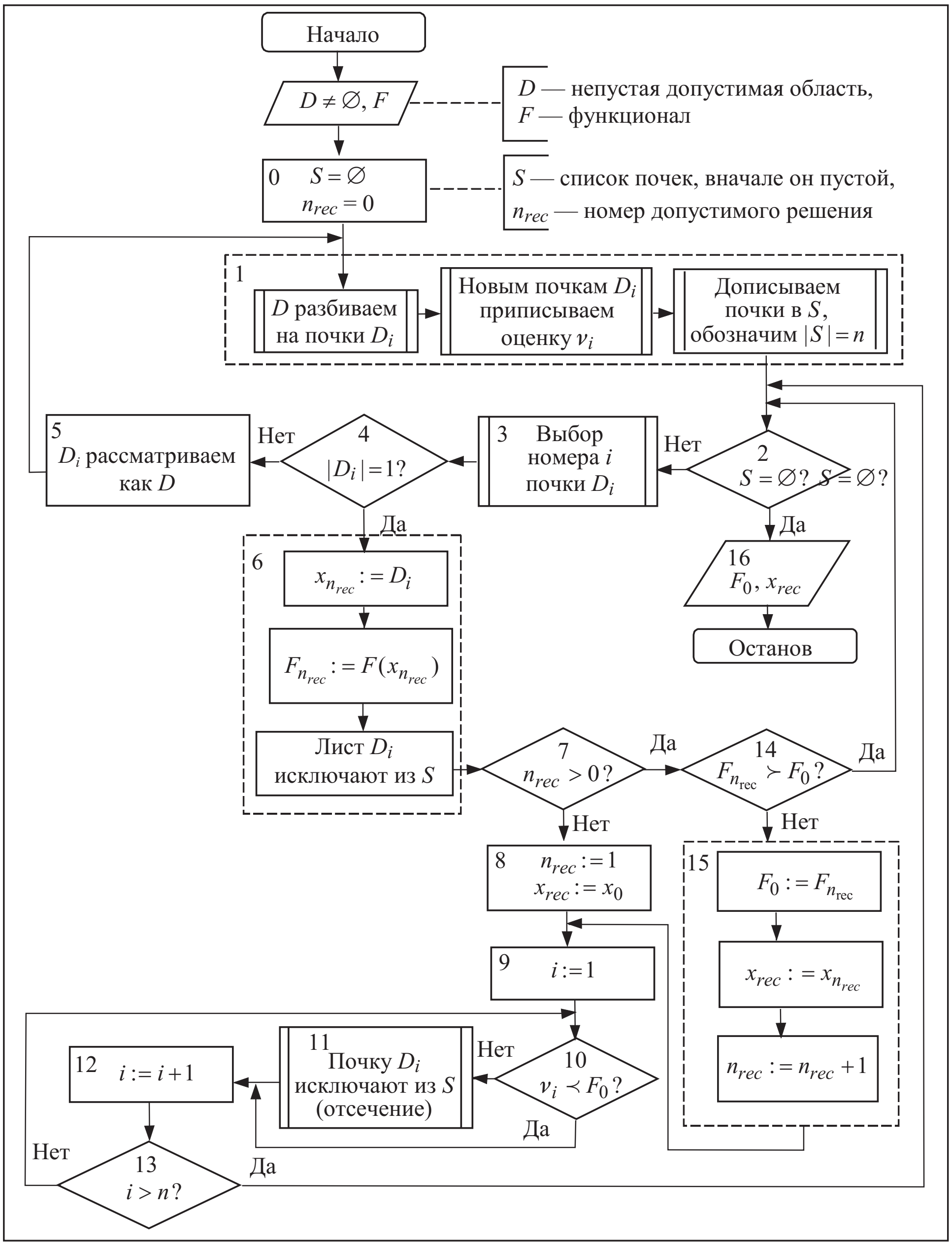

Рис. 1. Блок-схема метода ветвей и границ для минимизации на интервальном множестве

Существенно влияет на эффективность МВГ способ ветвления допустимого множества (шаг 1 — разбиение множества D на почки D_i; шаг 3 — выбор D_i) и оценивание D_i (вычисление оценки на шаге 1). В силу общности задачи не существует единых для всех случаев правил, которые бы действовали эффективно во всех ситуациях ветвления и оценивания. Способы ветвления, отсечения, оценивания определяются спецификой каждого отдельного решаемого класса задач. Отсечение происходит, как видно из алгоритма, по аналогии классического для МВГ условия: если $\nu_i(D_i) \prec F_0$ не выполняется, то D_i отсекается. В определенных классах задач, очевидно, существует возможность организации отсечения и по другим правилам.

3. ОЦЕНИВАНИЕ ДОПУСТИМЫХ ПОДМНОЖЕСТВ В МГМ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ НА ИНТЕРВАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Опишем вычисление оценки подмножества $D_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ — почки r-го уровня.

Теорема 2. Если $D_{i_1} \supset D_{i_2} \supset \ldots \supset D_{i_n} = \{x\}$, т.е. $|D_{i_n}| = 1$, а функционал ξ, который задан на множествах $D_{i_1}, \ldots, D_{i_n}$, такой, что $\xi(D_{i_n}) = \xi(x) = F(x)$, $\xi(D_{i_j}) \prec \xi(D_{i_{j+1}})$ $\forall j \in J_{n-1}$, то значение функционала $\xi(D)$ может быть оценкой допустимого подмножества D в МВГ.

Доказательство. Поскольку $\xi(D_{i_j}) \prec \xi(D_{i_{j+1}})$ $\forall j \in J_{n-1}$ и $\xi(D_{i_n}) = \xi(x) = F(x)$, то $\xi(D_{i_j}) \prec F(x)$ $\forall x \in D_{i_j}$, $\forall j \in J_n$, что и следовало доказать.

Замечание. В теореме 2 порядок $\prec$ представляет не только линейный порядок, который задает сравнитель H на множестве центрированных интервалов, а любой линейный порядок на этом множестве.

Из теоремы 2 при определенных условиях может быть получено такое утверждение.

Теорема 3. Если $F(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j$, $c_j \in R^1$, $x_j \in X$, сумма $a = (\alpha, \sigma) \in X$ и $b = (\beta, \delta) \in X$ находится как $a + b = (\alpha + \beta, \sigma + \delta)$, а произведение λa, где $a \in X$, $\lambda \in R^1$, $\lambda > 0$, находится как $\lambda a = (\lambda\alpha, \lambda\sigma)$, то в качестве оценки ν подмножества $D(J, I) \subset X$, которое определяется как $x_j = g_i = (\theta_i, \tau_i)$, $g_i \in X$ $\forall j \in J \subset J_k$, $\forall i \in I$, можно выбрать значение $\nu = F(J, I)$ центрированного интервала $F(J, I) = \sum_{j \in J,\, i \in I} c_j g_i$, если $\theta_i > 0$, $c_j > 0$ $\forall i \in I$, $\forall j \in J$.

Это утверждение основывается, кроме теоремы 2, на таком свойстве линейного порядка, задаваемого H, и суммы.

Теорема 4. Если a, b, c — центрированные интервалы: $a = (\alpha, \sigma)$, $b = (\beta, \delta)$, $c = (\gamma, \varepsilon)$, их суммы находятся согласно теореме 3 и $a \prec b$, то $b \prec b + c$ и $a \prec b + c$ при выполнении одного из следующих условий: 1) $\beta > 0$; $\beta + \gamma > 0$; $\gamma^2 + 2\beta\gamma + \varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon > 0$; 2) $\beta = 0$; $\gamma \geq 0$; 3) $\beta < 0$; $\beta + \gamma < 0$; $\gamma^2 + 2\beta\gamma + \varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon < 0$; 4) $\beta < 0$; $\beta + \gamma \geq 0$; 5) $\beta > \delta + \varepsilon$; $\gamma + \varepsilon > 0$; $\gamma = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}$; 6) $\beta < -\sqrt{2\delta\varepsilon + \varepsilon^2}$; $\beta + \gamma < 0$; $\gamma > \varepsilon$; $\gamma = -\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}$; 7) $\gamma = 0$; $\varepsilon = 0$; $\beta > 0$; 8) $\gamma = 0$; $\varepsilon = 0$; $\beta < 0$; 9) $\varepsilon > 0$; $\gamma = \varepsilon$; $\beta = -\varepsilon - \delta$; $\beta + \gamma < 0$; $\beta < 0$; $\delta > 0$.

Доказательство. Заметим, что по определению центрированных интервалов $\sigma \geq 0$; $\delta \geq 0$; $\varepsilon \geq 0$. Воспользуемся транзитивностью порядка $\prec$. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $b \prec b + c$. Тогда в силу транзитивности $a \prec b + c$.

Имеем три случая:

1) $H_1(b) < H_1(b + c)$;

2) $H_1(b) = H_1(b+c)$; $H_2(b) < H_2(b+c)$;

3) $H_1(b) = H_2(b+c)$; $H_2(b) = H_2(b+c)$, тогда или $H_3(b) < H_3(b+c)$, или $H_3(b) = H_3(b+c)$.

Рассмотрим эти случаи.

Случай 1. $H_1(b) < H_1(b+c)$ означает, что

$$\sqrt{\beta^2+\delta^2}\,\mathrm{sign}\,\beta < \sqrt{(\beta+\gamma)^2+(\delta+\varepsilon)^2}\,\mathrm{sign}(\beta+\gamma). \tag{8}$$

Возможны ситуации: 1) $\beta > 0$; 2) $\beta = 0$; 3) $\beta < 0$. Рассмотрим их.

1. При $\beta > 0$

$$\sqrt{\beta^2+\delta^2} < \sqrt{\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma+\delta^2+\varepsilon^2+2\delta\varepsilon}\,\mathrm{sign}(\beta+\gamma). \tag{9}$$

Рассмотрим три возможности для соотношения $\beta+\gamma$.

1.1°. $\beta+\gamma > 0$, тогда

$$\sqrt{\beta^2+\delta^2} < \sqrt{\beta^2+\delta^2+\Delta}, \tag{10}$$

здесь и далее пусть

$$\gamma^2+2\beta\gamma+\varepsilon^2+2\delta\varepsilon = \Delta. \tag{11}$$

Если $\Delta > 0$, то неравенство (8) выполняется, т.е. случай 1.1° означает выполнение системы

$$\beta > 0;\ \beta+\gamma > 0;\ \gamma^2+2\beta\gamma+\varepsilon^2+2\delta\varepsilon > 0. \tag{12}$$

Заметим, если $\beta > 0$, $\gamma > 0$, то имеет место (12), а следовательно, неравенство (8) выполняется.

1.2°. $\beta+\gamma = 0$, при этом (9) не выполняется.

1.3°. $\beta+\gamma < 0$, при этом (9) также не выполняется.

2. При $\beta = 0$ неравенство (8) принимает вид

$$0 < \sqrt{\gamma^2+(\delta+\varepsilon)^2}\,\mathrm{sign}\gamma. \tag{13}$$

Рассмотрим три возможности для γ.

2.1°. При $\gamma > 0$ условие (13) выполняется, это означает выполнение (8) при

$$\beta = 0;\ \gamma > 0. \tag{14}$$

2.2°. При $\gamma = 0$ условие (13) не выполняется.

2.3°. При $\gamma < 0$ условие (13) также не выполняется.

3. В ситуации, когда $\beta < 0$, неравенство (8) принимает вид

$$-\sqrt{\beta^2+\delta^2} < \sqrt{(\beta+\gamma)^2+(\delta+\varepsilon)^2}\,\mathrm{sign}(\beta+\gamma). \tag{15}$$

Рассмотрим три возможности для $\beta+\gamma$.

3.1°. $\beta+\gamma < 0$; из (15) имеем $\sqrt{\beta^2+\delta^2} > \sqrt{\beta^2+\delta^2+\Delta}$ при $\Delta < 0$.

Таким образом, выполнение (15) (а также (8)) происходит при условиях справедливости системы:

$$\beta < 0;\ \beta+\gamma < 0;\ \Delta < 0. \tag{16}$$

3.2°. $\beta+\gamma = 0$, тогда из (15) имеем неравенство $-\sqrt{\beta^2+\delta^2} < 0$, которое выполняется, т.е. для этого (а следовательно, и (8)) имеем систему условий

$$\beta < 0;\ \beta+\gamma = 0. \tag{17}$$

3.3°. $\beta+\gamma > 0$, тогда из (15) имеем неравенство $-\sqrt{\beta^2+\delta^2} < \sqrt{(\beta+\gamma)^2+(\delta+\varepsilon)^2}$, которое выполняется, в результате получаем систему условий

$$\beta < 0;\ \beta+\gamma > 0. \tag{18}$$

Случай 1 рассмотрен. Переходим к следующему случаю.

Случай 2. Имеем $H_1(b) = H_1(b+c)$; $H_2(b) < H_2(b+c)$, т.е. выполняется система условий

$$\sqrt{\beta^2 + \delta^2} \operatorname{sign} \beta = \sqrt{(\beta+\gamma)^2 + (\delta+\varepsilon)^2} \operatorname{sign}(\beta+\gamma), \tag{19}$$

$$(|\beta| + \delta) \operatorname{sign} \beta < (|\beta+\gamma| + \delta + \varepsilon) \operatorname{sign}(\beta+\gamma). \tag{20}$$

Ситуации, когда знаки при β и $\beta+\gamma$ разные, невозможны, так как тождество (19) в этом случае не выполняется.

Рассмотрим другие ситуации.

1. Пусть $\operatorname{sign} \beta = 1$ и $\operatorname{sign}(\beta+\gamma) = 1$.

Из тождества (19) имеем $\beta > 0$; $\beta+\gamma > 0$; $\beta^2 + \delta^2 = (\beta+\gamma)^2 + (\delta+\varepsilon)^2$ или

$$\beta > 0;\ \beta+\gamma > 0\ (\gamma > -\beta);\ \Delta = 0; \tag{21}$$
$$\Delta = \gamma^2 + 2\beta\gamma + \varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon = 0;\ \gamma = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2};$$
$$\gamma_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2};\ \gamma_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}.$$

Если $D = \beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2 = 0$, то $\gamma = -\beta$, $\gamma+\beta = 0$, но это невозможно, так как в (21) $\gamma+\beta > 0$. Таким образом, $D > 0$, т.е. из (21) вытекает две системы:

1) $\gamma = \gamma_1$: тогда $\beta > 0$; $-\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2} > -\beta$; $\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$; множество решений системы пусто;

2) $\gamma = \gamma_2$: $\beta > 0$; $-\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2} > -\beta$; $\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2 > 0 \Rightarrow \beta > 0$; $\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$; $\gamma = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}$, откуда следует

$$\beta > \sqrt{2\delta\varepsilon + \varepsilon^2} \text{ и } \gamma = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}. \tag{22}$$

Рассмотрим (22) с учетом неравенства (20): $\beta > \sqrt{2\delta\varepsilon + \varepsilon^2}$; $\gamma = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}$; $\beta + \delta < \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$ или

$$\beta > \sqrt{2\delta\varepsilon + \varepsilon^2};\ \gamma = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2};\ \gamma + \varepsilon > 0. \tag{23}$$

Из равенства и последнего неравенства в (23) имеем

$$\sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2} > \beta - \varepsilon. \tag{24}$$

При $\beta = \varepsilon$ это неравенство не имеет смысла, как и при $\beta < \varepsilon$ ($D \le 0$). Рассмотрим случай, когда $\beta > \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Возводя (24) в квадрат, получаем $\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2 > \beta^2 - 2\beta\varepsilon + \varepsilon^2$, $-2\delta - \varepsilon > -2\beta + \varepsilon$, $-\beta + \delta + \varepsilon < 0$. Решим последнее неравенство относительно β и объединим его с (23): $\beta > \varepsilon$; $\beta > \delta + \varepsilon$; $\beta > \sqrt{2\delta\varepsilon + \varepsilon^2}$; $\gamma + \varepsilon > 0$; $\gamma = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}$, откуда имеем систему $\beta > \max\{\varepsilon, \delta+\varepsilon, \sqrt{2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}\} = \delta + \varepsilon$; $\gamma + \varepsilon > 0$; $\gamma = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}$ или

$$\beta > \delta + \varepsilon;\ \gamma + \varepsilon > 0;\ \gamma = -\beta + \sqrt{\beta^2 - 2\delta\varepsilon - \varepsilon^2}. \tag{25}$$

Система (25) — это условие выполнения ситуации 1, случай 2.

2. Пусть теперь $\operatorname{sign} \beta = 0$; $\operatorname{sign}(\beta+\gamma) = 1$. Последнее означает, что $\beta = 0$, $\operatorname{sign}\gamma = 1$, т.е. $\gamma > 0$.

Система (19), (20) принимает вид $0=\sqrt{\gamma^2+(\delta+\varepsilon)^2}$; $0<\gamma+\delta+\varepsilon$.

Объединяя условия, которые выполняются, получим $\gamma^2+(\delta+\varepsilon)^2=0$; $\gamma>0$; $\beta=0$; $\gamma+\delta+\varepsilon>0$.

Отметим, что $\delta\geq 0$; $\varepsilon\geq 0$. Таким образом, из первого уравнения имеем $\gamma=\delta=\varepsilon=0$, что противоречит неравенствам системы. Следовательно, решений она не имеет.

3. Рассмотрим ситуацию, когда $\operatorname{sign}\beta=1$, а $\operatorname{sign}(\beta+\gamma)=0$, тогда имеем $\beta^2+\delta^2=0$; $\beta+\gamma=0$; $\beta>0$; $\beta+\delta<0$.

Из первого уравнения имеем $\beta=\delta=0$, что противоречит неравенству $\beta>0$. Таким образом, ситуация 3 в случае 2 невозможна.

Рассмотрим ситуацию 4, когда $\operatorname{sign}\beta=0$; $\operatorname{sign}(\beta+\gamma)=0$. Неравенство (20) не выполняется. Таким образом, эта ситуация также невозможна.

5. Пусть теперь $\operatorname{sign}\beta=-1$; $\operatorname{sign}(\beta+\gamma)=-1$. С помощью (19), (20) образуем систему условий

$$\beta<0;\ \beta+\gamma<0;\ \beta^2+\delta^2=(\beta+\gamma)^2+(\delta+\varepsilon)^2;\ \beta-\delta<\beta+\gamma-\delta-\varepsilon. \tag{26}$$

Из (26) и (11) имеем $\Delta=0$. Тогда $\gamma_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-2\delta\varepsilon-\varepsilon^2}$, $D=\beta^2-2\delta\varepsilon-\varepsilon^2>0$, иначе $\gamma=-\beta$ и неравенство $\beta+\gamma<0$ из (26) не выполняется.

Таким образом, $\gamma_1=-\beta-\sqrt{\beta^2-2\delta\varepsilon-\varepsilon^2}$; $\gamma_2=-\beta+\sqrt{\beta^2-2\delta\varepsilon-\varepsilon^2}$. Из неравенства $\beta+\gamma<0$ системы (26) и выражений для γ_1, γ_2 имеем неравенство $\beta-\beta-\sqrt{\beta^2-2\delta\varepsilon-\varepsilon^2}<0$, которое выполняется всегда, и $\beta-\beta+\sqrt{\beta^2-2\delta\varepsilon-\varepsilon^2}<0$ — неравенство, которое никогда не выполняется.

Таким образом, из (26) имеем $\beta<0$; $\beta+\gamma<0$; $\beta^2>2\delta\varepsilon+\varepsilon^2$, откуда с учетом $\beta<0$ имеем $\beta<-\sqrt{2\delta\varepsilon+\varepsilon^2}$.

Из последнего неравенства в (26) получим $\gamma-\varepsilon>0$.

Окончательно в ситуации 5, случай 2 имеем

$$\beta<-\sqrt{2\delta\varepsilon+\varepsilon^2};\ \beta+\gamma<0;\ \gamma>\varepsilon;\ \gamma=-\beta-\sqrt{\beta^2-2\delta\varepsilon-\varepsilon^2}. \tag{27}$$

6. Пусть $\operatorname{sign}\beta=-1$; $\operatorname{sign}(\beta+\gamma)=0$. Условия (19), (20) преобразуются в такие: $(\beta^2+\delta^2)(-1)=0$; $\beta<0$; $\beta+\gamma=0$; $\beta-\delta<0$.

Из первого равенства имеем $\beta=0$, а неравенство $\beta<0$ ему противоречит. Таким образом, ситуация 6 невозможна.

7. Рассмотрим последняю ситуацию: $\operatorname{sign}\beta=0$; $\operatorname{sign}(\beta+\gamma)=-1$. При этом из (19), (20) имеем $\beta=0$; $\gamma<0$; $(\beta+\gamma)^2+(\delta+\varepsilon)^2=0$; $\beta+\gamma-\delta-\varepsilon>0$.

При условиях $\gamma<0$ и $\gamma-\delta-\varepsilon>0$ имеем противоречие. Таким образом, ситуация 7 невозможна.

Рассмотрим третий случай.

Случай 3. Пусть $H_i(b)=H_i(b+c)$, $i=1,2$. Установим, при каких условиях $H_3(b)\leq H_3(b+c)$ и $b\prec b+c$. В этом случае имеем систему

$$\sqrt{\beta^2+\delta^2}\operatorname{sign}\beta=\sqrt{(\beta+\gamma)^2+(\delta+\varepsilon)^2}\operatorname{sign}(\beta+\gamma), \tag{28}$$

$$(|\beta|+\delta)\operatorname{sign}\beta=(|\beta+\gamma|+\delta+\varepsilon)\operatorname{sign}(\beta+\gamma). \tag{29}$$

Очевидно, что $\beta\cdot(\beta+\gamma)>0$, поэтому из (11) и (28) имеем $\Delta=0$, т.е. $\Delta=\gamma^2+2\beta\gamma+\varepsilon^2+2\delta\varepsilon=0$.

Рассмотрим возможные ситуации знаков для β и $\beta+\gamma$.

1. Для первой ситуации при условиях (28), (29) получаем

$$\beta>0;\ \beta+\gamma>0;\ \gamma^2+2\beta\gamma+\varepsilon^2+2\delta\varepsilon=0;\ \beta+\delta=\beta+\gamma+\delta+\varepsilon. \qquad (30)$$

Последнее равенство означает, что $\gamma=-\varepsilon$.

Таким образом, из (30) имеем

$$\varepsilon^2-2\beta\varepsilon+\varepsilon^2+2\delta\varepsilon=0. \qquad (31)$$

Существуют две возможности относительно ε:

1′) $\varepsilon=0$, тогда из системы (30) следует $\varepsilon=0;\ \gamma=0;\ \beta>0$;

2′) $\varepsilon\neq 0$, тогда из (31) следует $\beta=\varepsilon+\delta$.

Таким образом, имеем или

$$\gamma=0;\ \varepsilon=0;\ \beta>0, \qquad (32)$$

или

$$\varepsilon>0;\ \gamma=-\varepsilon;\ \beta=\varepsilon+\delta. \qquad (33)$$

2. Для второй ситуации знаков при β и $\beta+\gamma$ из соотношений (28), (29) имеем $\beta<0;\ \beta+\gamma<0;\ \Delta=0;\ \beta-\delta=\beta+\gamma-\delta-\varepsilon$. Это значит, что $\beta<0;\ \beta+\gamma<0;$ $\gamma^2+2\beta\gamma+\varepsilon^2+2\delta\varepsilon=0;\ \gamma=\varepsilon$.

Рассмотрим две возможности относительно ε:

1′) $\varepsilon=0; \gamma=0; \beta<0;$ (34)

2′) $\varepsilon\neq 0;\ \beta<0;\ \beta+\gamma<0;\ \varepsilon+2\beta+\varepsilon+2\delta=0$.

В последнем равенстве имеем $\varepsilon+\beta+\delta=0$, причем всегда $\beta=-\varepsilon-\delta<0$, поскольку $\varepsilon>0;\ \delta\geq 0$. Таким образом, имеем

$$\varepsilon+\beta+\delta=0;\ \beta+\gamma<0;\ \beta<0;\ \varepsilon>0. \qquad (35)$$

3. Для третьей ситуации из условия системы (28), (29) получаем $\beta=0$; $\beta+\gamma=0$. В результате имеем

$$\beta=0;\ \gamma=0. \qquad (36)$$

Условия (32)–(36) следует рассматривать с учетом условия $H_3(b)\leq H_3(b+c)$. Последнее означает возможность решения одного из условий:

1°) $b=b+c$, $(\beta,\delta)=(\beta+\gamma,\delta+\varepsilon)$, из этого следует, что $\varepsilon=0;\ \gamma=0$;

2°) $b\neq b+c;\ \beta=\delta+\varepsilon;\ \beta+\gamma=\delta;\ H_3(b)=\beta\leq H_3(b+c)=\beta+\gamma;\ \beta>0; \beta+\gamma\neq 0$; таким образом, $\varepsilon+\gamma=0;\ \beta=\varepsilon+\delta;\ \gamma\geq 0;\ \beta>0; \beta+\gamma\neq 0$;

3°) $b\neq b+c$, $\beta=0$, $\beta+\gamma=0$, $H_3(b)=\delta\leq H_3(b+c)=\delta+\varepsilon$, $\delta\leq\delta+\varepsilon$ или $\varepsilon\geq 0$; следовательно, $\varepsilon\geq 0;\ \beta=\gamma=0$. Однако при $\varepsilon=0;\ \gamma=0;\ b=b+c$, $\varepsilon>0$; значит, $\beta=\gamma=0$;

4°) $b\neq b+c$; таким образом, $\beta=-(\delta+\varepsilon), \beta\neq 0;\ \beta+\gamma=-\delta;\ \beta+\gamma\neq 0\ (\delta\neq 0)$; $H_3(b)=\beta\leq H_3(b+c)=\beta+\gamma$; значит, $\gamma=\varepsilon;\ \beta\neq 0;\ \delta>0;\ \beta=-\delta-\varepsilon;\ \gamma\geq 0$.

Остается проанализировать совместимость условий (32)–(36) и условий 1°– 4°.

Рассмотрим условия (32). С условием 1° оно совместимо и снова получаем (32). Не имеет смысла (32) рассматривать с условиями 2°– 4°, поскольку результаты будут подмножествами условия (32).

Проанализируем (33) и условия 1°–4°.

Очевидно, что условия (33) и условие 1° несовместимы.

Из условий (33) и 2° имеем

$$\varepsilon>0;\ \gamma=-\varepsilon;\ \beta=\varepsilon+\delta;\ \gamma\geq 0;\ \beta>0;\ \beta+\gamma\neq 0. \qquad (37)$$

Условия $\varepsilon>0$, $\gamma=-\varepsilon$, $\gamma\geq 0$ несовместимы; таким образом, решений система (37) не имеет.

Из условий (33) и 3° получаем

$$\varepsilon > 0;\ \gamma = -\varepsilon;\ \beta = \varepsilon + \delta;\ \beta = \gamma = 0. \tag{38}$$

Условия $\varepsilon > 0$, $\gamma = -\varepsilon$, $\gamma = 0$ несовместимы. Система (38) решений не имеет.

Из условий (33) и 4° вытекает

$$\varepsilon > 0;\ \gamma = -\varepsilon;\ \beta = \varepsilon + \delta;\ \gamma = \varepsilon;\ \beta \neq 0;\ \delta > 0;\ \beta = -\delta - \varepsilon;\ \gamma \geq 0.$$

Из равенства $\gamma = -\varepsilon = \varepsilon$ следует, что $\varepsilon = 0$; $\gamma = 0$, но $\varepsilon > 0$, что несовместимо. Таким образом, записанная система для условий (33) и 4° дает пустое множество. Следовательно, условие (33) в случае 3 никогда не выполняется.

Проанализируем условия (34) и 1°–4°.

Совместно условия (34) и 1° дают: $\varepsilon = 0$; $\gamma = 0$; $\beta < 0$, т.е. снова приходим к условию (34). Таким образом, не имеет смысла его анализировать вместе с условиями 2°–4°, поскольку будем иметь подмножества (34).

Проанализируем системы, которые образуются из (35) и условий 1°–4°.

Из 1° имеем несовместимую систему (так как $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon = 0$). Из условия 2° имеем также несовместимую систему (так как $\beta < 0$ и $\beta > 0$). Из условия 3° имеем

$$\varepsilon + \beta + \delta = 0;\ \beta + \gamma < 0;\ \beta < 0;\ \varepsilon > 0;\ \beta = \gamma = 0.$$

Эта система также несовместима, так как $\beta + \gamma < 0$, а $\beta = \gamma = 0$.

Из условий (35) и 4° вытекает

$$\varepsilon + \beta + \delta = 0;\ \beta + \gamma < 0;\ \beta < 0;\ \varepsilon > 0;\ \gamma = \varepsilon;\ \delta > 0. \tag{39}$$

Остается проанализировать условие (36) вместе с условиями 1°–4°. Из условия 1° имеем $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $\varepsilon = 0$, что является подмножеством (36); следовательно, не имеет смысла рассматривать условия 2°–4°.

Проанализированы все случаи и получены условия выполнения утверждений теоремы. Сравниваем их с формулировками 1–9 в условии теоремы 4: условие 1) — это формула (12); 2) — это (14) и (36) при условии 1°; 3) — это (16); 4) — это (17) и (18); 5) — это (25); 6) — это (27); 7) — это (32) при условии 1°; 8) — это (34) при условии 1°; 9) — это (35) при условии 4° (т.е. (39)). Отсюда вывод, что теорема доказана.

Следствие из теоремы 4. Если $\beta > 0$; $\gamma > 0$, то теорема выполняется (это соответствует случаю 1 в условии теоремы), т.е. если интервалы $b = (\beta, \delta)$, $c = (\gamma, \varepsilon)$ имеют положительные центры β, γ соответственно, то при $a \prec b$ имеем $a \prec b + c$.

Справедливость теорем 4 и 2, как легко видеть, обосновывает утверждение теоремы 3.

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 5. Изложенный МВГ, примененный к задаче (1), дает ее решение, которым является F_0 — значение целевой функции и x_{rec} — точка, в которой оно достигается.

Доказательство. Согласно шагу 11 исключают из рассмотрения только почки D_i, в которых не выполняется условие $\nu_i(D_i) \prec F_0$.

Если $F_{n_{rec}} \prec F_0$, то на шаге 15 F_0 обновляется и становится равным значению $F_{n_{rec}}$, которое достигается в точке x_{rec}.

Таким образом, в силу свойства оценки $\nu(D) \prec F(x)\ \forall x \in D$, цепочки $F_1 \succ \ldots \succ F_{n_{rec}}$ и правила отсечения $\nu_i(D_i) \prec F_0$ имеем $F_{n_{rec}} \prec F(x)\ \forall x \in D$, что и следовало доказать.

Замечание. Как и в теореме 2, в теореме 5 символ порядка $\prec$ обозначает любой линейный порядок на множестве центрированных интервалов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен и обоснован МВГ для задачи минимизации в интервальной постановке. Направлением дальнейших исследований можно считать численные эксперименты по этому методу для установления границ его практического применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы нечетких задач дискретной оптимизации в диагностических информационных технологиях // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 2. — С. 7–22.
2. Емец О.А., Роскладка А.А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 35-44.
3. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 239 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
4. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 354 с.
5. Стоян Ю.Г. Расширенное пространство $I_S(R)$ центрированных интервалов. — Харьков, 1994. — 27 с. — (Препр. / НАН Украины, Ин-т пробл. машиностроения; № 378).
6. Стоян Ю.Г. Квазилинейные интервальные отображения. Интервальная метрика. — Харьков, 1995. — 25 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т пробл. машиностроения; № 387).
7. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.
8. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. — М.: Наука, 2006. — 151 с.
9. Добронец Б.С. Интервальная математика. — Красноярск: КГУ, 2004. — 216 с.
10. Юлдашев З.Х. Моделирование интервальными методами задач линейного программирования. — Новосибирск, 1994. — 29 с. — (Препр. / ИВТ СО РАН).
11. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Ромик и др. — Москва; Ижевск: РХД, 2008. — 288 с.

Поступила 23.11.2012