УДК 681.322.012

Л.Д. ЕЛФИМОВА

ОБЪЕДИНЕННЫЙ КЛЕТОЧНЫЙ МЕТОД УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Ключевые слова: *линейная алгебра, клеточные методы умножения матриц, рекурсивные методы Штрассена и Лейдермана, алгоритмы умножения матриц.*

В настоящее время разработано семейство клеточных методов умножения матриц, включающее два быстрых и два смешанных метода [1–3], позволяющих варьировать размер клеток, на которые декомпозируются исходные матрицы, и получать клеточные аналоги известных алгоритмов умножения матриц с минимизированной вычислительной сложностью. Быстрые клеточные методы умножения матриц порядка $n=2\mu \cdot r$ [1] и $n=3\mu \cdot r$ [3] (где $\mu>1$, r — размер клетки), обеспечивают минимизацию мультипликативной, аддитивной и общей сложностей матричных алгоритмов соответственно на 12,5 и 15%. Смешанные клеточные методы [2, 3] являются гибридами двух методов. Первый смешанный клеточный метод умножения матриц порядка $n=2^q \cdot \mu \cdot r$ $(q>1,\ \mu>1)$ [2] сочетает рекурсивный метод Штрассена [4] с быстрым клеточным методом умножения матриц [1], взаимодействие которых приводит к минимизации указанных сложностей матричных алгоритмов на 25 %. Второй смешанный клеточный метод умножения матриц порядка $n=3^q \mu \cdot r$ $(q>1,\ \mu>1)$ [3] сочетает рекурсивный метод Лейдермана [5] с быстрым клеточным методом умножения матриц [3], что дает возможность минимизировать мультипликативную, аддитивную и общую сложности матричных алгоритмов на 28%.

Целью данной работы является оптимизация вычислительной сложности клеточных аналогов известных алгоритмов умножения матриц. Далее рассмотрен объединенный клеточный метод умножения матриц порядка $n=2^\gamma \cdot 3^q \mu \cdot r$ $(\gamma>0,\ q>1,\ \mu>1)$, представляющий собой гибрид трех методов: рекурсивных методов Штрассена, Лейдермана и быстрого клеточного метода умножения матриц [3]. Такое объединение достигается сочетанием метода Штрассена со смешанным клеточным методом умножения матриц [3], взаимодействие которых обеспечивает наивысший по сравнению с известными клеточными методами, процент минимизации (37%) мультипликативной, аддитивной и общей сложностей клеточных аналогов известных алгоритмов умножения матриц. Оценка вычислительной сложности предлагаемого метода дана на примере получения клеточного аналога традиционного алгоритма [6].

Рассмотрим объединенный клеточный метод умножения матриц порядка $n=2^\gamma \cdot 3^q \mu \cdot r$ $(\gamma>0,\ q>1,\ \mu>1)$.

Пусть A, B и $C = A \cdot B$ — три $(n \times n)$-матрицы, где $n=2^\gamma \cdot 3^q \mu \cdot r$ $(\gamma>0$, $q>1$, $\mu>1$, r — размер клетки).

Исходные матрицы A и B, представленные на рис. 1 и 2, декомпозируются на клетки A_{ij} и B_{ij} заданного порядка r, в результате чего образуются клеточные $(m \times m)$-матрицы, где $m=n/r$, $l=m/2$, $l=3\xi$, $\xi=m/6$, $i, j=1, 2, \ldots, m$. Каждая полученная клеточная матрица A и B порядка m разбивается в свою очередь на 36 равных клеточных подматриц $A_{ij}^{\xi\xi}$ и $B_{ij}^{\xi\xi}$ порядка ξ, где нижние индексы $i, j=1, 2, \ldots, 6$ показывают место этих подматриц в полной $(m \times m)$-матрице, а верхние индексы $\xi\xi$ — число матричных строк и столбцов указанных подматриц.

Кроме того, каждая клеточная $(m\times m)$-матрица A и B разбивается на четыре равные клеточные подматрицы порядка $l=3\xi$, обозначенные A_{11}^{ll}, A_{12}^{ll}, A_{21}^{ll}, A_{22}^{ll} и B_{11}^{ll}, B_{12}^{ll}, B_{21}^{ll}, B_{22}^{ll} (см. рис. 1, 2), где нижние индексы i, $j=1,2$ показывают место этих подматриц в полных $(m\times m)$-матрицах, а верхние ll — число матричных строк и столбцов указанных подматриц. Произведением клеточных матриц A и B является матрица C (рис. 3), имеющая аналогичную каждому сомножителю клеточную структуру.

$$\overbrace{\qquad}^{r} \qquad\qquad A_{11}^{ll} \qquad\qquad\qquad\qquad A_{12}^{ll}$$

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc||ccc|ccc|ccc}
A_{11} & \cdots & A_{1\xi} & & \cdots & A_{1,2\xi} & & \cdots & A_{1,3\xi} & & \cdots & A_{1,4\xi} & & \cdots & A_{1,5\xi} & & \cdots & A_{1m}\\
\vdots & A_{11}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{12}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{13}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{14}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{15}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{16}^{\xi\xi} & \vdots\\
A_{\xi1} & \cdots & A_{\xi\xi} & & \cdots & A_{\xi,2\xi} & & \cdots & A_{\xi,3\xi} & & \cdots & A_{\xi,4\xi} & & \cdots & A_{\xi,5\xi} & & \cdots & A_{\xi m}\\
\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & A_{21}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{22}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{23}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{24}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{25}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{26}^{\xi\xi} & \vdots\\
A_{2\xi,1} & \cdots & A_{2\xi,\xi} & & \cdots & A_{2\xi,2\xi} & & \cdots & A_{2\xi,3\xi} & & \cdots & A_{2\xi,4\xi} & & \cdots & A_{2\xi,5\xi} & & \cdots & A_{2\xi,m}\\
\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & A_{31}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{32}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{33}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{34}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{35}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{36}^{\xi\xi} & \vdots\\
A_{3\xi,1} & \cdots & A_{3\xi,\xi} & & \cdots & A_{3\xi,2\xi} & & \cdots & A_{3\xi,3\xi} & & \cdots & A_{3\xi,4\xi} & & \cdots & A_{3\xi,5\xi} & & \cdots & A_{3\xi,m}\\
\hline\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & A_{41}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{42}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{43}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{44}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{45}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{46}^{\xi\xi} & \vdots\\
A_{4\xi,1} & \cdots & A_{4\xi,\xi} & & \cdots & A_{4\xi,2\xi} & & \cdots & A_{4\xi,3\xi} & & \cdots & A_{4\xi,4\xi} & & \cdots & A_{4\xi,5\xi} & & \cdots & A_{4\xi,m}\\
\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & A_{51}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{52}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{53}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{54}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{55}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{56}^{\xi\xi} & \vdots\\
A_{5\xi,1} & \cdots & A_{5\xi,\xi} & & \cdots & A_{5\xi,2\xi} & & \cdots & A_{5\xi,3\xi} & & \cdots & A_{5\xi,4\xi} & & \cdots & A_{5\xi,5\xi} & & \cdots & A_{5\xi,m}\\
\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & A_{61}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{62}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{63}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{64}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{65}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & A_{66}^{\xi\xi} & \vdots\\
A_{m,1} & \cdots & A_{m,\xi} & & \cdots & A_{m,2\xi} & & \cdots & A_{m,3\xi} & & \cdots & A_{m,4\xi} & & \cdots & A_{m,5\xi} & & \cdots & A_{m,m}
\end{array}\right]$$

$$A_{21}^{ll} \qquad\qquad\qquad\qquad A_{22}^{ll}$$

Рис. 1

$$\overbrace{\qquad}^{r} \qquad\qquad B_{11}^{ll} \qquad\qquad\qquad\qquad B_{12}^{ll}$$

$$B=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc||ccc|ccc|ccc}
B_{11} & \cdots & B_{1\xi} & & \cdots & B_{1,2\xi} & & \cdots & B_{1,3\xi} & & \cdots & B_{1,4\xi} & & \cdots & B_{1,5\xi} & & \cdots & B_{1m}\\
\vdots & B_{11}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{12}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{13}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{14}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{15}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{16}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{\xi1} & \cdots & B_{\xi\xi} & & \cdots & B_{\xi,2\xi} & & \cdots & B_{\xi,3\xi} & & \cdots & B_{\xi,4\xi} & & \cdots & B_{\xi,5\xi} & & \cdots & B_{\xi m}\\
\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & B_{21}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{22}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{23}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{24}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{25}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{26}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{2\xi,1} & \cdots & B_{2\xi,\xi} & & \cdots & B_{2\xi,2\xi} & & \cdots & B_{2\xi,3\xi} & & \cdots & B_{2\xi,4\xi} & & \cdots & B_{2\xi,5\xi} & & \cdots & B_{2\xi,m}\\
\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & B_{31}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{32}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{33}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{34}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{35}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{36}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{3\xi,1} & \cdots & B_{3\xi,\xi} & & \cdots & B_{3\xi,2\xi} & & \cdots & B_{3\xi,3\xi} & & \cdots & B_{3\xi,4\xi} & & \cdots & B_{3\xi,5\xi} & & \cdots & B_{3\xi,m}\\
\hline\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & B_{41}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{42}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{43}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{44}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{45}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{46}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{4\xi,1} & \cdots & B_{4\xi,\xi} & & \cdots & B_{4\xi,2\xi} & & \cdots & B_{4\xi,3\xi} & & \cdots & B_{4\xi,4\xi} & & \cdots & B_{4\xi,5\xi} & & \cdots & B_{4\xi,m}\\
\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & B_{51}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{52}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{53}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{54}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{55}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{56}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{5\xi,1} & \cdots & B_{5\xi,\xi} & & \cdots & B_{5\xi,2\xi} & & \cdots & B_{5\xi,3\xi} & & \cdots & B_{5\xi,4\xi} & & \cdots & B_{5\xi,5\xi} & & \cdots & B_{5\xi,m}\\
\hline
 & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & B_{61}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{62}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{63}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{64}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{65}^{\xi\xi} & \vdots & \vdots & B_{66}^{\xi\xi} & \vdots\\
B_{m,1} & \cdots & B_{m,\xi} & & \cdots & B_{m,2\xi} & & \cdots & B_{m,3\xi} & & \cdots & B_{m,4\xi} & & \cdots & B_{m,5\xi} & & \cdots & B_{m,m}
\end{array}\right]$$

$$B_{21}^{ll} \qquad\qquad\qquad\qquad B_{22}^{ll}$$

Рис. 2

$$\overbrace{\qquad\quad}^{r}\qquad\qquad\qquad C^{ll}_{11}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C^{ll}_{12}$$

$$C=\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}
C_{11} & \cdots & C_{1\xi} & & \cdots & C_{1,2\xi} & & \cdots & C_{1,3\xi} & & \cdots & C_{1,4\xi} & & \cdots & C_{1,5\xi} & & \cdots & C_{1m} \\
\vdots & C^{\xi\xi}_{11} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{12} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{13} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{14} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{15} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{16} & \vdots \\
C_{\xi 1} & \cdots & C_{\xi\xi} & & \cdots & C_{\xi,2\xi} & & \cdots & C_{\xi,3\xi} & & \cdots & C_{\xi,4\xi} & & \cdots & C_{\xi,5\xi} & & \cdots & C_{\xi m} \\
& \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & C^{\xi\xi}_{21} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{22} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{23} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{24} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{25} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{26} & \vdots \\
C_{2\xi,1} & \cdots & C_{2\xi,\xi} & & \cdots & C_{2\xi,2\xi} & & \cdots & C_{2\xi,3\xi} & & \cdots & C_{2\xi,4\xi} & & \cdots & C_{2\xi,5\xi} & & \cdots & C_{2\xi,m} \\
& \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & C^{\xi\xi}_{31} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{32} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{33} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{34} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{35} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{36} & \vdots \\
C_{3\xi,1} & \cdots & C_{3\xi,\xi} & & \cdots & C_{3\xi,2\xi} & & \cdots & C_{3\xi,3\xi} & & \cdots & C_{3\xi,4\xi} & & \cdots & C_{3\xi,5\xi} & & \cdots & C_{3\xi,m} \\
\hline
& \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & C^{\xi\xi}_{41} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{42} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{43} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{44} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{45} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{46} & \vdots \\
C_{4\xi,1} & \cdots & C_{4\xi,\xi} & & \cdots & C_{4\xi,2\xi} & & \cdots & C_{4\xi,3\xi} & & \cdots & C_{4\xi,4\xi} & & \cdots & C_{4\xi,5\xi} & & \cdots & C_{4\xi,m} \\
& \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & C^{\xi\xi}_{51} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{52} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{53} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{54} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{55} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{56} & \vdots \\
C_{5\xi,1} & \cdots & C_{5\xi,\xi} & & \cdots & C_{5\xi,2\xi} & & \cdots & C_{5\xi,3\xi} & & \cdots & C_{5\xi,4\xi} & & \cdots & C_{5\xi,5\xi} & & \cdots & C_{5\xi,m} \\
& \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\
\vdots & C^{\xi\xi}_{61} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{62} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{63} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{64} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{65} & \vdots & \vdots & C^{\xi\xi}_{66} & \vdots \\
C_{m,1} & \cdots & C_{m,\xi} & & \cdots & C_{m,2\xi} & & \cdots & C_{m,3\xi} & & \cdots & C_{m,4\xi} & & \cdots & C_{m,5\xi} & & \cdots & C_{m,m}
\end{array}\right]$$

$$\qquad\qquad\qquad C^{ll}_{21}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad C^{ll}_{22}$$

Рис. 3

При таком разбиении матриц взаимодействие трех методов осуществляется следующим образом. Метод Штрассена оперирует клеточными подматрицами A^{ll}_{ij}, B^{ll}_{ij} порядка $l=3\xi$, метод Лейдермана — клеточными подматрицами $A^{\xi\xi}_{ij}$, $B^{\xi\xi}_{ij}$ порядка ξ, быстрый клеточный метод [3] —подматрицами A_{ij}, B_{ij} порядка r. Размер клетки r зависит от выбранного внутреннего алгоритма, в качестве которого используются известные алгоритмы умножения матриц, оперирующие числами.

Рассмотрим первый шаг рекурсии методов Штрассена и Лейдермана. В этом случае метод Штрассена в матричном виде применительно к клеточным подматрицам порядка l имеет следующий вид:

$$Z^1=(A^{ll}_{11}+A^{ll}_{22})(B^{ll}_{11}+B^{ll}_{22}),\ Z^2=(A^{ll}_{21}+A^{ll}_{22})B^{ll}_{11},$$
$$Z^3=A^{ll}_{11}(B^{ll}_{12}-B^{ll}_{22}),\ Z^4=A^{ll}_{22}(B^{ll}_{21}-B^{ll}_{11}),\ Z^5=(A^{ll}_{11}+A^{ll}_{12})B^{ll}_{22}, \tag{1}$$
$$Z^6=(A^{ll}_{21}-A^{ll}_{11})(B^{ll}_{11}+B^{ll}_{12}),\ Z^7=(A^{ll}_{12}-A^{ll}_{22})(B^{ll}_{21}+B^{ll}_{22});$$
$$C^{ll}_{11}=Z^1+Z^4-Z^5+Z^7,\ C^{ll}_{12}=Z^3+Z^5, \tag{2}$$
$$C^{ll}_{21}=Z^2+Z^4,\ C^{ll}_{22}=Z^1-Z^2+Z^3+Z^6.$$

Как отмечалось выше, вычисление матричных произведений $Z^1,\ldots,Z^7$ (1) осуществляется с использованием смешанного клеточного метода умножения матриц [3], включающего метод Лейдермана и быстрый клеточный метод [3]. Такое сочетание трех методов образует объединенный клеточный метод умножения матриц, который состоит из пяти этапов и формализуется следующим образом.

Обозначим X^i и Y^i ($i=1,2,\ldots,5$) суммы клеточных ($l\times l$)-подматриц, входящие в (1):

$$X^1=(A^{ll}_{11}+A^{ll}_{22}),\ Y^1=(B^{ll}_{11}+B^{ll}_{22}),$$

$$
\begin{aligned}
X^2 &= (A_{21}^{ll} + A_{22}^{ll}),\ Y^2 = (B_{12}^{ll} - B_{22}^{ll}),\\
X^3 &= (A_{11}^{ll} + A_{12}^{ll}),\ Y^3 = (B_{21}^{ll} - B_{11}^{ll}),\\
X^4 &= (A_{21}^{ll} - A_{11}^{ll}),\ Y^4 = (B_{11}^{ll} + B_{12}^{ll}),\\
X^5 &= (A_{12}^{ll} - A_{22}^{ll}),\ Y^5 = (B_{21}^{ll} + B_{22}^{ll}).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Этап 1. Оперируя $(r \times r)$-клетками и применяя известную операцию матричного сложения [6], вычисляем матричные суммы согласно (3) по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
X_{ij}^1 &= (A_{ij} + A_{3\xi+i,3\xi+j}),\ Y_{ij}^1 = (B_{ij} + B_{3\xi+i,3\xi+j}),\\
X_{ij}^2 &= (A_{3\xi+i,j} + A_{3\xi+i,3\xi+j}),\ Y_{ij}^2 = (B_{i,3\xi+j} - B_{3\xi+i,3\xi+j}),\\
X_{ij}^3 &= (A_{ij} + A_{i,3\xi+j}),\ Y_{ij}^3 = (B_{3\xi+i,j} - B_{ij}),\\
X_{ij}^4 &= (A_{3\xi+i,j} - A_{ij}),\ Y_{ij}^4 = (B_{ij} + B_{i,3\xi+j}),\\
X_{ij}^5 &= (A_{i,3\xi+j} - A_{3\xi+i,3\xi+j}),\ Y_{ij}^5 = (B_{3\xi+i,j} + B_{3\xi+i,3\xi+j}),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $i, j = 1, \dots, 3\xi$.

Этап 2. Используя обозначения (3), представляем семь матричных произведений $Z^1, \dots, Z^7$ согласно (1) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
Z^1 = X^1 Y^1,\ Z^2 = X^2 B_{11}^{ll},\ Z^3 = A_{11}^{ll} Y^2,\ Z^4 = A_{22}^{ll} Y^3,\\
Z^5 = X^3 B_{22}^{ll},\ Z^6 = X^4 Y^4,\ Z^7 = X^5 Y^5.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Для нахождения первого матричного произведения $Z^1 = X^1 Y^1$ используются представленные на рис. 4 и 5 клеточные подматрицы-операнды $\{X_{ij}^1\}$ и $\{Y_{ij}^1\}$ порядка 3ξ.

Произведением клеточных подматриц X^1 и Y^1 является матрица Z^1 (рис. 6), имеющая аналогичную каждому сомножителю клеточную структуру.

$$
X^1 = \begin{array}{l} r\{ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\overbrace{X^1_{11}}^{r} & \dots & X^1_{1\xi} & X^1_{1,\xi+1} & \dots & X^1_{1,2\xi} & X^1_{1,2\xi+1} & \dots & X^1_{1,3\xi}\\
\vdots & X^{1(\xi\xi)}_{11} & \vdots & \vdots & X^{1(\xi\xi)}_{12} & \vdots & \vdots & X^{1(\xi\xi)}_{13} & \vdots\\
X^1_{\xi 1} & \dots & X^1_{\xi\xi} & X^1_{\xi,\xi+1} & \dots & X^1_{\xi,2\xi} & X^1_{\xi,2\xi+1} & \dots & X^1_{\xi,3\xi}\\
\hline
X^1_{\xi+1,1} & \dots & X^1_{\xi+1,\xi} & X^1_{\xi+1,\xi+1} & \dots & X^1_{\xi+1,2\xi} & X^1_{\xi+1,2\xi+1} & \dots & X^1_{\xi+1,3\xi}\\
\vdots & X^{1(\xi\xi)}_{21} & \vdots & \vdots & X^{1(\xi\xi)}_{22} & \vdots & \vdots & X^{1(\xi\xi)}_{23} & \vdots\\
X^1_{2\xi,1} & \dots & X^1_{2\xi,\xi} & X^1_{2\xi,\xi+1} & \dots & X^1_{2\xi,2\xi} & X^1_{2\xi,2\xi+1} & \dots & X^1_{2\xi,3\xi}\\
\hline
X^1_{2\xi+1,1} & \dots & X^1_{2\xi+1,\xi} & X^1_{2\xi+1,\xi+1} & \dots & X^1_{2\xi+1,2\xi} & X^1_{2\xi+1,2\xi+1} & \dots & X^1_{2\xi+1,3\xi}\\
\vdots & X^{1(\xi\xi)}_{31} & \vdots & \vdots & X^{1(\xi\xi)}_{32} & \vdots & \vdots & X^{1(\xi\xi)}_{33} & \vdots\\
X^1_{m1} & \dots & X^1_{m\xi} & X^1_{m,\xi+1} & \dots & X^1_{m,2\xi} & X^1_{m,2\xi+1} & \dots & X^1_{3\xi,3\xi}
\end{array}\right]
$$

Рис. 4

$$
Y^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\overbrace{Y^1_{11}}^{r} & \dots & Y^1_{1\xi} & Y^1_{1,\xi+1} & \dots & Y^1_{1,2\xi} & Y^1_{1,2\xi+1} & \dots & Y^1_{1,3\xi} \\
\vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{11} & \vdots & \vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{12} & \vdots & \vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{13} & \vdots \\
Y^1_{\xi 1} & \dots & Y^1_{\xi\xi} & Y^1_{\xi,\xi+1} & \dots & Y^1_{\xi,2\xi} & Y^1_{\xi,2\xi+1} & \dots & Y^1_{\xi,3\xi} \\
\hline
Y^1_{\xi+1,1} & \dots & Y^1_{\xi+1,\xi} & Y^1_{\xi+1,\xi+1} & \dots & Y^1_{\xi+1,2\xi} & Y^1_{\xi+1,2\xi+1} & \dots & Y^1_{\xi+1,3\xi} \\
\vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{21} & \vdots & \vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{22} & \vdots & \vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{23} & \vdots \\
Y^1_{2\xi,1} & \dots & Y^1_{2\xi,\xi} & Y^1_{2\xi,\xi+1} & \dots & Y^1_{2\xi,2\xi} & Y^1_{2\xi,2\xi+1} & \dots & Y^1_{2\xi,3\xi} \\
\hline
Y^1_{2\xi+1,1} & \dots & Y^1_{2\xi+1,\xi} & Y^1_{2\xi+1,\xi+1} & \dots & Y^1_{2\xi+1,2\xi} & Y^1_{2\xi+1,2\xi+1} & \dots & Y^1_{2\xi+1,3\xi} \\
\vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{31} & \vdots & \vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{32} & \vdots & \vdots & Y^{1(\xi\xi)}_{33} & \vdots \\
Y^1_{m1} & \dots & Y^1_{m\xi} & Y^1_{m,\xi+1} & \dots & Y^1_{m,2\xi} & Y^1_{m,2\xi+1} & \dots & Y^1_{3\xi,3\xi}
\end{array}\right]
$$

Рис. 5

$$
Z^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\overbrace{Z^1_{11}}^{r} & \dots & Z^1_{1\xi} & Z^1_{1,\xi+1} & \dots & Z^1_{1,2\xi} & Z^1_{1,2\xi+1} & \dots & Z^1_{1,3\xi} \\
\vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{11} & \vdots & \vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{12} & \vdots & \vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{13} & \vdots \\
Z^1_{\xi 1} & \dots & Z^1_{\xi\xi} & Z^1_{\xi,\xi+1} & \dots & Z^1_{\xi,2\xi} & Z^1_{\xi,2\xi+1} & \dots & Z^1_{\xi,3\xi} \\
\hline
Z^1_{\xi+1,1} & \dots & Z^1_{\xi+1,\xi} & Z^1_{\xi+1,\xi+1} & \dots & Z^1_{\xi+1,2\xi} & Z^1_{\xi+1,2\xi+1} & \dots & Z^1_{\xi+1,3\xi} \\
\vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{21} & \vdots & \vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{22} & \vdots & \vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{23} & \vdots \\
Z^1_{2\xi,1} & \dots & Z^1_{2\xi,\xi} & Z^1_{2\xi,\xi+1} & \dots & Z^1_{2\xi,2\xi} & Z^1_{2\xi,2\xi+1} & \dots & Z^1_{2\xi,3\xi} \\
\hline
Z^1_{2\xi+1,1} & \dots & Z^1_{2\xi+1,\xi} & Z^1_{2\xi+1,\xi+1} & \dots & Z^1_{2\xi+1,2\xi} & Z^1_{2\xi+1,2\xi+1} & \dots & Z^1_{2\xi+1,3\xi} \\
\vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{31} & \vdots & \vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{32} & \vdots & \vdots & Z^{1(\xi\xi)}_{33} & \vdots \\
Z^1_{m1} & \dots & Z^1_{m\xi} & Z^1_{m,\xi+1} & \dots & Z^1_{m,2\xi} & Z^1_{m,2\xi+1} & \dots & Z^1_{3\xi,3\xi}
\end{array}\right]
$$

Рис. 6

Согласно смешанному клеточному методу [3] определяем матричные суммы N^t_{ij} и P^t_{ij} ($t = 1, 2, \dots, 14$) по следующим формулам:

$$
\begin{gathered}
N^1_{ij} = (X^1_{ij} + X^1_{i,\xi+j} + X^1_{i,2\xi+j} - X^1_{\xi+i,j} - X^1_{\xi+i,\xi+j} - X^1_{2\xi+i,\xi+j} - X^1_{2\xi+i,2\xi+j}), \\
N^2_{ij} = (X^1_{ij} - X^1_{\xi+i,j}), \ N^3_{ij} = (-X^1_{ij} + X^1_{\xi+i,j} + X^1_{\xi+i,\xi+j}), \\
N^4_{ij} = (X^1_{\xi+i,j} + X^1_{\xi+i,\xi+j}), \ N^5_{ij} = (-X^1_{ij} + X^1_{2\xi+i,j} + X^1_{2\xi+i,\xi+j}), \\
N^6_{ij} = (-X^1_{ij} + X^1_{2\xi+i,j}), \ N^7_{ij} = (X^1_{2\xi+i,j} + X^1_{2\xi+i,\xi+j}), \\
N^8_{ij} = (X^1_{ij} + X^1_{i,\xi+j} + X^1_{i,2\xi+j} - X^1_{\xi+i,\xi+j} - X^1_{\xi+i,2\xi+j} - X^1_{2\xi+i,j} - X^1_{2\xi+i,\xi+j}),
\end{gathered} \tag{6}
$$

$$N_{ij}^{9}=(-X_{i,2\xi+j}^{1}+X_{2\xi+i,\xi+j}^{1}+X_{2\xi+i,2\xi+j}^{1}),\ N_{ij}^{10}=(X_{i,2\xi+j}^{1}-X_{2\xi+i,2\xi+j}^{1}),$$

$$N_{ij}^{11}=(X_{2\xi+i,\xi+j}^{1}+X_{2\xi+i,2\xi+j}^{1}),\ N_{ij}^{12}=(-X_{i,2\xi+j}^{1}+X_{\xi+i,\xi+j}^{1}+X_{\xi+i,2\xi+j}^{1}),$$

$$N_{ij}^{13}=(X_{i,2\xi+j}^{1}-X_{\xi+i,2\xi+j}^{1}),\ N_{ij}^{14}=(X_{\xi+i,\xi+j}^{1}+X_{\xi+i,2\xi+j}^{1}),$$

где $i, j=1,2,\ldots,\xi$;

$$P_{ij}^{1}=(-Y_{i,\xi+j}^{1}+Y_{\xi+i,\xi+j}^{1}),$$

$$P_{ij}^{2}=(-Y_{ij}^{1}+Y_{i,\xi+j}^{1}+Y_{\xi+i,j}^{1}-Y_{\xi+i,\xi+j}^{1}-Y_{\xi+i,2\xi+j}^{1}-Y_{2\xi+i,j}^{1}+Y_{2\xi+i,2\xi+j}^{1}),$$

$$P_{ij}^{3}=(Y_{ij}^{1}-Y_{i,\xi+j}^{1}+Y_{\xi+i,\xi+j}^{1}),\ P_{ij}^{4}=(-Y_{ij}^{1}+Y_{i,\xi+j}^{1}),$$

$$P_{ij}^{5}=(Y_{ij}^{1}-Y_{i,2\xi+j}^{1}+Y_{\xi+i,2\xi+j}^{1}),$$

$$P_{ij}^{6}=(Y_{i,2\xi+j}^{1}-Y_{\xi+i,2\xi+j}^{1}),\ P_{ij}^{7}=(-Y_{ij}^{1}+Y_{i,2\xi+j}^{1}),$$

$$P_{ij}^{8}=(-Y_{ij}^{1}+Y_{i,2\xi+j}^{1}+Y_{\xi+i,j}^{1}-Y_{\xi+i,\xi+j}^{1}-Y_{\xi+i,2\xi+j}^{1}-Y_{2\xi+i,j}^{1}+Y_{2\xi+i,\xi+j}^{1}),\quad (7)$$

$$P_{ij}^{9}=(Y_{\xi+i,\xi+j}^{1}+Y_{2\xi+i,j}^{1}-Y_{2\xi+i,\xi+j}^{1}),\ P_{ij}^{10}=(Y_{\xi+i,\xi+j}^{1}-Y_{2\xi+i,\xi+j}^{1}),$$

$$P_{ij}^{11}=(-Y_{2\xi+i,j}^{1}+Y_{2\xi+i,\xi+j}^{1}),\ P_{ij}^{12}=(Y_{\xi+i,2\xi+j}^{1}+Y_{2\xi+i,j}^{1}-Y_{2\xi+i,2\xi+j}^{1}),$$

$$P_{ij}^{13}=(Y_{\xi+i,2\xi+j}^{1}-Y_{2\xi+i,2\xi+j}^{1}),\ P_{ij}^{14}=(-Y_{2\xi+i,j}^{1}+Y_{2\xi+i,2\xi+j}^{1}),$$

где $i, j=1,2,\ldots,\xi$.

Этап 3. В соответствии со смешанным клеточным методом [3], включающим метод Лейдермана, вычисление 23 матричных произведений $S^1,\ldots,S^{23}$ осуществляем по следующим формулам:

$$S^1=N^1Y_{22}^{1(\xi\xi)},\ S^2=N^2P^1,\ S^3=X_{22}^{1(\xi\xi)}P^2,\ S^4=N^3P^3,\ S^5=N^4P^4,$$

$$S^6=X_{11}^{1(\xi\xi)}Y_{11}^{1(\xi\xi)},\ S^7=N^5P^5,\ S^8=N^6P^6,\ S^9=N^7P^7,\ S^{10}=N^8Y_{23}^{1(\xi\xi)},$$

$$S^{11}=X^{1(\xi\xi)}P^8,\ S^{12}=N^9P^9,\ S^{13}=N^{10}P^{10},\ S^{14}=X_{13}^{1(\xi\xi)}Y_{31}^{1(\xi\xi)},\quad (8)$$

$$S^{15}=N^{11}P^{11},\ S^{16}=N^{12}P^{12},\ S^{17}=N^{13}P^{13},\ S^{18}=N^{14}P^{14},$$

$$S^{19}=X_{12}^{1(\xi\xi)}Y_{21}^{1(\xi\xi)},\ S^{20}=X_{23}^{1(\xi\xi)}Y_{32}^{1(\xi\xi)},\ S^{21}=X_{21}^{1(\xi\xi)}Y_{13}^{1(\xi\xi)},$$

$$S^{22}=X_{31}^{1(\xi\xi)}Y_{12}^{1(\xi\xi)},\ S^{23}=X_{33}^{1(\xi\xi)}Y_{33}^{1(\xi\xi)}.$$

Для реализации каждого из указанных матричных произведений применяем быстрый клеточный метод [3]. Для вычисления первого матричного произведения $S^1=N^1\cdot Y_{22}^{1(\xi\xi)}$ используются представленные на рис. 7 подматрицы-операнды $\{N_{ij}^1\}$ и $\{Y_{ij}^1\}$ порядка ξ.

$$\overset{N^1}{\begin{bmatrix} \overbrace{N_{11}^1}^{r} & N_{12}^1 & \cdots & N_{1\xi}^1 \\ N_{21}^1 & N_{22}^1 & \ldots & N_{2\xi}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{\xi 1}^1 & N_{\xi 2}^1 & \ldots & N_{\xi\xi}^1 \end{bmatrix}} \times \overset{Y_{22}^{1(\xi\xi)}}{\begin{bmatrix} \overbrace{Y_{11}^1}^{r} & Y_{12}^1 & \cdots & Y_{1\xi}^1 \\ Y_{21}^1 & Y_{22}^1 & \ldots & Y_{2\xi}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{\xi 1}^1 & Y_{\xi 2}^1 & \ldots & Y_{\xi\xi}^1 \end{bmatrix}} = \overset{S^1}{\begin{bmatrix} \overbrace{S_{11}^1}^{r} & S_{12}^1 & \cdots & S_{1\xi}^1 \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 & \ldots & S_{2\xi}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{\xi 1}^1 & S_{\xi 2}^1 & \ldots & S_{\xi\xi}^1 \end{bmatrix}}$$

Рис. 7

Согласно быстрому клеточному методу [3] вначале определяем матричные коэффициенты R_{ik}^{S} и F_{kj}^{S} $(s=1,\ldots,14)$:

$$R_{ik}^{1}=N_{3i-2,3k-2}^{1}+N_{3i-2,3k-1}^{1}+N_{3i-2,3k}^{1}-N_{3i-1,3k-2}^{1}-N_{3i-1,3k-1}^{1}-N_{3i,3k-2}^{1}-N_{3i,3k}^{1},$$

$$R_{ik}^{2}=N_{3i-2,3k-2}^{1}-N_{3i-1,3k-2}^{1},\ R_{ik}^{3}=-N_{3i-2,3k-2}^{1}+N_{3i-1,3k-2}^{1}+N_{3i-1,3k-1}^{1},$$

$$R_{ik}^{4}=N_{3i-1,3k-2}^{1}+N_{3i-1,3k-1}^{1},\ R_{ik}^{5}=-N_{3i-2,3k-2}^{1}+N_{3i,3k-2}^{1}+N_{3i,3k-1}^{1},$$

$$R_{ik}^{6}=-N_{3i-2,3k-2}^{1}+N_{3i,3k-2}^{1},\ R_{ik}^{7}=N_{3i,3k-2}^{1}+N_{3i,3k-1}^{1}, \tag{9}$$

$$R_{ik}^{8}=N_{3i-2,3k-2}^{1}+N_{3i-2,3k-1}^{1}+N_{3i-2,3k}^{1}-N_{3i-1,3k-1}^{1}-N_{3i-1,3k}^{1}-N_{3i,3k-2}^{1}-N_{3i,3k-1}^{1},$$

$$R_{ik}^{9}=-N_{3i-2,3k}^{1}+N_{3i,3k-1}^{1}+N_{3i,3k}^{1},\ R_{ik}^{10}=N_{3i-2,3k}^{1}-N_{3i,3k}^{1},$$

$$R_{ik}^{11}=N_{3i,3k-1}^{1}+N_{3i,3k}^{1},\ R_{ik}^{12}=-N_{3i-2,3k}^{1}+N_{3i-1,3k-1}^{1}+N_{3i-1,3k}^{1},$$

$$R_{ik}^{13}=N_{3i-2,3k}^{1}-N_{3i-1,3k}^{1},\ R_{ik}^{14}=N_{3i-1,3k-1}^{1}+N_{3i-1,3k}^{1},$$

где $i,j,k=1,2,\ldots,p$; $p=n/18r$;

$$F_{kj}^{1}=-Y_{3k-2,3j-1}^{1}+Y_{3k-1,3j-1}^{1},$$

$$F_{kj}^{2}=-Y_{3k-2,3j-2}^{1}+Y_{3k-2,3j-1}^{1}+Y_{3k-1,3j-2}^{1}-Y_{3k-1,3j-1}^{1}-Y_{3k-1,3j}^{1}-Y_{3k,3j-2}^{1}+Y_{3k,3j}^{1},$$

$$F_{kj}^{3}=Y_{3k-2,3j-2}^{1}-Y_{3k-2,3j-1}^{1}+Y_{3k-1,3j-1}^{1},\ F_{kj}^{4}=-Y_{3k-2,3j-2}^{1}+Y_{3k-2,3j-1}^{1},$$

$$F_{kj}^{5}=Y_{3k-2,3j-2}^{1}-Y_{3k-2,3j}^{1}+Y_{3k-1,3j}^{1},$$

$$F_{kj}^{6}=Y_{3k-2,3j}^{1}-Y_{3k-1,3j}^{1},\ F_{kj}^{7}=-Y_{3k-2,3j-2}^{1}+Y_{3k-2,3j}^{1}, \tag{10}$$

$$F_{kj}^{8}=-Y_{3k-2,3j-2}^{1}+Y_{3k-2,3j}^{1}+Y_{3k-1,3j-2}^{1}-Y_{3k-1,3j-1}^{1}-Y_{3k-1,3j}^{1}-Y_{3k,3j-2}^{1}+Y_{3k,3j-1}^{1},$$

$$F_{kj}^{9}=Y_{3k-1,3j-1}^{1}+Y_{3k,3j-2}^{1}-Y_{3k,3j-1}^{1},\ F_{kj}^{10}=Y_{3k-1,3j-1}^{1}-Y_{3k,3j-1}^{1},$$

$$F_{kj}^{11}=-Y_{3k,3j-2}^{1}+Y_{3k,3j-1}^{1},\ F_{kj}^{12}=Y_{3k-1,3j}^{1}+Y_{3k,3j-2}^{1}-Y_{3k,3j}^{1},$$

$$F_{kj}^{13}=Y_{3k-1,3j}^{1}-Y_{3k,3j}^{1},\ F_{kj}^{14}=-Y_{3k,3j-2}^{1}+Y_{3k,3j}^{1},$$

где $i,j,k=1,2,\ldots,p$; $p=n/18r$.

Затем вычисляем промежуточные матрицы Q_{ij}:

$$Q_{ij}^{1}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{1}\cdot Y_{3k-1,3j-1}^{1},\ Q_{ij}^{2}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{2}\cdot F_{kj}^{1},$$

$$Q_{ij}^{3}=\sum_{k=1}^{p}N_{3i-1,3k-1}^{1}\cdot F_{kj}^{2},\ Q_{ij}^{4}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{3}\cdot F_{kj}^{3},$$

$$Q_{ij}^{5}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{4}\cdot F_{kj}^{4},\ Q_{ij}^{6}=\sum_{k=1}^{p}N_{3i-2,3k-2}^{1}\cdot Y_{3k-2,3j-2}^{1},$$

$$Q_{ij}^{7}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{5}\cdot F_{kj}^{5},\ Q_{ij}^{8}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{6}\cdot F_{kj}^{6},$$

$$Q_{ij}^{9}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{7}\cdot F_{kj}^{7},\ Q_{ij}^{10}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{8}\cdot Y_{3k-1,3j}^{1},$$

$$Q_{ij}^{11}=\sum_{k=1}^{p}N_{3i,3k-1}^{1}\cdot F_{kj}^{8},\ Q_{ij}^{12}=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}^{9}\cdot F_{kj}^{9}, \tag{11}$$

$$Q_{ij}^{13}=\sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{10}\cdot F_{kj}^{10},\ Q_{ij}^{14}=\sum_{k=1}^{p} N_{3i-2,3k}^{1}\cdot Y_{3k,3j-2}^{1},$$

$$Q_{ij}^{15}=\sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{11}\cdot F_{kj}^{11},\ Q_{ij}^{16}=\sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{12}\cdot F_{kj}^{12},$$

$$Q_{ij}^{17}=\sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{13}\cdot F_{kj}^{13},\ Q_{ij}^{18}=\sum_{k=1}^{p} R_{ik}^{14}\cdot F_{kj}^{14},\ Q_{ij}^{19}=\sum_{k=1}^{p} N_{3i-2,3k-1}^{1}\cdot Y_{3k-1,3j-2}^{1},$$

$$Q_{ij}^{20}=\sum_{k=1}^{p} N_{3i-1,3k}^{1}\cdot Y_{3k,3j-1}^{1},\ Q_{ij}^{21}=\sum_{k=1}^{p} N_{3i-1,3k-2}^{1}\cdot Y_{3k-2,3j}^{1},$$

$$Q_{ij}^{22}=\sum_{k=1}^{p} N_{3i,3k-2}^{1}\cdot Y_{3k-2,3j-1}^{1},\ Q_{ij}^{23}=\sum_{k=1}^{p} N_{3i,3k}^{1}\cdot Y_{3k,3j}^{1},$$

где $i, j, k=1, 2, \ldots, p$.

И в завершение этапа находим матрицы S_{ij}^{1}:

$$\begin{aligned}
S_{3i-2,3j-2}^{1}&=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{19},\\
S_{3i-2,3j-1}^{1}&=Q_{ij}^{1}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{5}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{15},\\
S_{3i-2,3j}^{1}&=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{9}+Q_{ij}^{10}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{18},\\
S_{3i-1,3j-2}^{1}&=Q_{ij}^{2}+Q_{ij}^{3}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{17},\\
S_{3i-1,3j-1}^{1}&=Q_{ij}^{2}+Q_{ij}^{4}+Q_{ij}^{5}+Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{20},\\
S_{3i-1,3j}^{1}&=Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{16}+Q_{ij}^{17}+Q_{ij}^{18}+Q_{ij}^{21},\\
S_{3i,3j-2}^{1}&=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{8}+Q_{ij}^{11}+Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{13}+Q_{ij}^{14},\\
S_{3i,3j-1}^{1}&=Q_{ij}^{12}+Q_{ij}^{13}+Q_{ij}^{14}+Q_{ij}^{15}+Q_{ij}^{22},\\
S_{3i,3j}^{1}&=Q_{ij}^{6}+Q_{ij}^{7}+Q_{ij}^{8}+Q_{ij}^{9}+Q_{ij}^{23},
\end{aligned}\tag{12}$$

где $i, j=1, 2, \ldots, p$.

Этап 4. Аналогично вычисляем остальные матричные произведения $S^{2}, \ldots, S^{23}$ согласно (8). После нахождения указанных произведений определяем матрицы Z_{ij}^{1}:

$$\begin{aligned}
Z_{ij}^{1}&=S_{ij}^{6}+S_{ij}^{14}+S_{ij}^{19},\\
Z_{i,\xi+j}^{1}&=S_{ij}^{1}+S_{ij}^{4}+S_{ij}^{5}+S_{ij}^{6}+S_{ij}^{12}+S_{ij}^{14}+S_{ij}^{15},\\
Z_{i,2\xi+j}^{1}&=S_{ij}^{6}+S_{ij}^{7}+S_{ij}^{9}+S_{ij}^{10}+S_{ij}^{14}+S_{ij}^{16}+S_{ij}^{18},\\
Z_{\xi+i,j}^{1}&=S_{ij}^{2}+S_{ij}^{3}+S_{ij}^{4}+S_{ij}^{6}+S_{ij}^{14}+S_{ij}^{16}+S_{ij}^{17},\\
Z_{\xi+i,\xi+j}^{1}&=S_{ij}^{2}+S_{ij}^{4}+S_{ij}^{5}+S_{ij}^{6}+S_{ij}^{20},\\
Z_{\xi+i,2\xi+j}^{1}&=S_{ij}^{14}+S_{ij}^{16}+S_{ij}^{17}+S_{ij}^{18}+S_{ij}^{21},\\
Z_{2\xi+i,j}^{1}&=S_{ij}^{6}+S_{ij}^{7}+S_{ij}^{8}+S_{ij}^{11}+S_{ij}^{12}+S_{ij}^{13}+S_{ij}^{14},\\
Z_{2\xi+i,\xi+j}^{1}&=S_{ij}^{12}+S_{ij}^{13}+S_{ij}^{14}+S_{ij}^{15}+S_{ij}^{22}\\
Z_{2\xi+i,2\xi+j}^{1}&=S_{ij}^{6}+S_{ij}^{7}+S_{ij}^{8}+S_{ij}^{9}+S_{ij}^{23}\ ,
\end{aligned}\tag{13}$$

где $i, j=1,2, \ldots, p$.

Этап 5. В заключение вычисляем матричные произведения $Z_{ij}^2, \ldots, Z_{ij}^7$ согласно (5) и находим результирующие матрицы согласно (2) по следующим формулам:

$$C_{ij} = Z_{ij}^1 + Z_{ij}^4 - Z_{ij}^5 + Z_{ij}^7,\ C_{i,3\xi+j} = Z_{ij}^3 + Z_{ij}^5,\ C_{3\xi+i,j} = Z_{ij}^2 + Z_{ij}^4,$$
$$C_{3\xi+i,3\xi+j} = Z_{ij}^1 - Z_{ij}^2 + Z_{ij}^3 + Z_{ij}^6, \tag{14}$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, 3\xi$.

Оценим вычислительную сложность объединенного клеточного метода (4)–(14). При вычислении матричных выражений (4) и (14) этот метод требует соответственно $10l^2$ и $8l^2$ матричных операций сложения, для каждой из которых внутренний алгоритм требует r^2 скалярных операций сложения. Суммарная аддитивная сложность вычислений (4) и (14), определяемая количеством скалярных операций сложения, составляет $W_{\text{a}}^{(4),(14)} = W_{\text{a}}^{(4)} + W_{\text{a}}^{(14)} = 10l^2 \cdot r^2 + 8l^2 \cdot r^2 =$ $= 18l^2 \cdot r^2 = 18\left(\frac{m}{2}\right)^2 \cdot r^2 = 18\left(\frac{n}{2r}\right)^2 \cdot r^2 = 4{,}5n^2$ операций сложения.

Определим сложность вычислений одного из семи матричных произведений Z^1, т.е. вычислений (6)–(13). При вычислении матричных выражений (6), (7) и (13) требуется соответственно $28\xi^2$, $28\xi^2$ и $42\xi^2$ матричных операций сложения, для каждой из которых внутренний алгоритм требует r^2 скалярных операций сложения. Таким образом, суммарная аддитивная сложность указанных вычислений составляет $W_{\text{a}}^{(6),(7),(13)} = 98\xi^2 \cdot r^2 = 98\left(\frac{m}{6}\right)^2 \cdot r^2 = 98\left(\frac{n}{6r}\right)^2 \cdot r^2 \approx 2{,}7n^2$ операций сложения.

Определим сложность вычислений 23 матричных произведений $S^1, \ldots, S^{23}$, т.е. вычислений (8)–(12). При нахождении матричных коэффициентов R_{ik} (9), F_{kj} (10) и матриц S_{ij}^1 (12) внешние алгоритмы требуют соответственно $28p^2$, $28p^2$ и $42p^2$ матричных операций сложения, для каждой из которых внутренний алгоритм требует r^2 скалярных операций сложения. Суммарная аддитивная сложность указанных вычислений составляет $W_a^{(9),(10),(12)} = 98p^2 \cdot r^2 =$ $= 98\left(\frac{n}{18r}\right)^2 \cdot r^2 \approx 0{,}3024n^2$ операций сложения.

При вычислении матричных выражений (11) внешний алгоритм требует $23p^2$ матричных операций умножения и $23(p^3 - p^2)$ матричных операций сложения. Используя в качестве внутреннего традиционный алгоритм умножения матриц [6], требующий r^3 скалярных операций умножения и $(r^3 - r^2)$ скалярных операций сложения, получаем для мультипликативной и аддитивной сложностей вычислений (11) соответственно следующие значения:

- $W_{\text{м}}^{(11)} = 23p^3 \cdot r^3 = 23\left(\frac{n}{18r}\right)^3 \cdot r^3 \approx 0{,}00394n^3$ операций умножения;
- $W_{\text{a}}^{(11)} = 23[(p^3 - p^2)r^2 + p^3(r^3 - r^2)] = 23\left(\frac{n}{18r}\right)^3 \cdot r^3 - 23\left(\frac{n}{18r}\right)^2 \cdot r^2 \approx$

$\approx 0{,}00394n^3 - 0{,}0709n^2$ операций сложения.

Используя полученные выше оценки, определяем мультипликативную и аддитивную сложность вычислений 23 матричных произведений $S^1, \ldots, S^{23}$, т.е. вычислений (8):

• $W_{\text{м}}^{(8)} = 23 \cdot W_{\text{м}}^{(11)} \approx 23 \cdot 0{,}00394n^3 \approx 0{,}0897n^3$ операций умножения;

• $W_{\text{а}}^{8} = 23(W_{\text{а}}^{(9),(10),(12)} + W_{\text{а}}^{(11)}) + W_{\text{а}}^{(6),(7),(13)} \approx 23(0{,}3024n^2 + 0{,}0039n^3 - 0{,}0709n^2) +$ $+ 2{,}7n^2 \approx 0{,}0897n^3 + 8{,}024n^2$ операций сложения.

Тогда мультипликативная и аддитивная сложности вычислений семи матричных произведений $Z^1, \ldots, Z^7$, т.е. вычислений (5), соответственно равны

• $W_{\text{м}}^{(5)} = 7 \cdot W_{\text{м}}^{(8)} \approx 7 \cdot 0{,}0897n^3 \approx 0{,}6279n^3$ операций умножения;

• $W_{\text{а}}^{(5)} = 7 \cdot W_{\text{а}}^{(8)} \approx 7 \cdot (0{,}0897n^3 + 8{,}024n^2) \approx 0{,}6279n^3 + 56{,}168n^2$ операций сложения.

Таким образом, на основе объединенного клеточного метода (4)–(14) получаем клеточный аналог традиционного алгоритма умножения матриц со следующими значениями мультипликативной, аддитивной и общей сложностей:

• $W_{\text{м}} = W_{\text{м}}^{(5)} \approx 0{,}6279n^3 \approx 0{,}63n^3$ операций умножения;

• $W_{\text{а}} = W_{\text{а}}^{(5)} + W_{\text{а}}^{(4),(14)} \approx 0{,}6279n^3 + 56{,}168n^2 + 4{,}5n^2 \approx 0{,}6279n^3 + 60{,}668n^2 \approx$ $\approx 0{,}63n^3 + 61n^2$ операций сложения;

• $W_{\text{общ}} = W_{\text{м}} + W_{\text{а}} \approx 0{,}6279n^3 + 0{,}6279n^3 + 60{,}668n^2 \approx 1{,}2558n^3 + 60{,}668n^2 \approx$ $\approx 1{,}26n^3 + 61n^2$ операций умножения/сложения.

Рассмотренный клеточный метод (4)–(14) обеспечивает минимизацию на 37 % мультипликативной сложности традиционного алгоритма при всех значениях n, а также аддитивной и общей сложностей при $n \geq 10^5$, когда сложность $O(n^2) \ll O(n^3)$. Отметим, что при $n = 10^5$ сложность $O(n^2)$ в значениях аддитивной и общей сложностей составляет соответственно 0,09 % и 0,04 % сложности $O(n^3)$. Аналогично можно получить оценки вычислительной сложности других известных алгоритмов умножения матриц.

Существует второй вариант объединения трех методов, который сочетает рекурсивный метод Лейдермана [5] со смешанным клеточным методом умножения матриц порядка $2^q \cdot \mu \cdot r$ $(q > 1, \mu > 1)$ [2]. В этом случае объединенный клеточный метод умножения матриц порядка $3^\gamma \cdot 2^q \mu \cdot r$ $(\gamma > 0, q > 1, \mu > 1)$ дает возможность получать клеточные алгоритмы умножения матриц с минимизированной на 35,4 % вычислительной сложностью.

Предложенный в данной статье объединенный метод расширяет семейство клеточных методов умножения матриц и позволяет получить наивысший процент минимизации мультипликативной, аддитивной и общей сложностей известных алгоритмов умножения матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е л ф и м о в а Л. Д. Быстрый клеточный метод умножения матриц // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 55–59.

2. Е л ф и м о в а Л. Д. Смешанный клеточный метод умножения матриц // Там же. — 2009. — № 1. — С. 22–27.

3. Е л ф и м о в а Л. Д. Новые клеточные методы умножения матриц // Там же. — 2013. — № 1. — С. 19–29.

4. S t r a s s e n V. Gaussian elimination is not optimal // Numer. Math. — 1969. — **13**. — P. 354–356.

5. L a d e r m a n J. D. A noncommutative algorithm for multiplying 3 × 3 matrices using 23 multiplications // Bull. Amer. Math. Soc. — 1976. — **82**, N1. — P.126–128.

6. Ф а д д е е в Д. К., Ф а д д е е в а В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.; Л.: Физматгиз, 1963. — 734с.

Поступила 23.11.2012