УДК 519.21

П.С. КНОПОВ, Г.Д. БИЛА

ПЕРИОДОГРАММНЫЕ ОЦЕНКИ В МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ С СИЛЬНОЗАВИСИМЫМ ШУМОМ

Ключевые слова: *сильная зависимость, периодограммная оценка, гауссовский стационарный процесс, сильная состоятельность.*

В последнее время в связи с ростом применений во многих естественных и социальных науках возрос интерес к задачам оценивания параметров, нелинейно входящих в функцию регрессии известного вида. Появилось большое количество публикаций, в которых оцениваются частоты и амплитуды гармонических колебаний и рассматриваются более общие задачи оценивания нелинейной функции регрессии, искаженной случайным шумом, который является процессом с сильной зависимостью. Среди них следует отметить работы [1–4], в которых исследованы методы наименьших модулей, наименьших квадратов, а также для ряда частных случаев так называемые периодограммные оценки указанных выше параметров. В данной статье изучаются асимтотические свойства периодограммных оценок неизвестных параметров почти периодической функции в регрессионной модели «сигнал плюс шум», где шум является функционалом от гауссовского стационарного процесса с сильной зависимостью.

Рассмотрим регрессионную модель

$$y(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \ t \in [0, T],$$

где $g(t, \theta^0) = A_0 \varphi(\omega_0 t)$: $R^1 \times \Theta \to R^1$ — измеримая функция, зависящая от неизвестного параметра $\theta^0 \in \Theta$, $\theta^0 = (A_0, \omega_0)$, $A_0 > 0$, $\omega_0 > 0$, $\Theta \subset R^1$— ограниченный открытый интервал. Случайный шум $\varepsilon(t) = G(n(t))$, $t \in R^1$, такой, что $E\varepsilon(0) = 0$, $E\varepsilon^2(0) = 1$.

В дальнейшем потребуются следующие предположения относительно случайного процесса $n(t)$ функций G и φ.

1. Пусть $\{n(t), \ t \in R^1\} = \{n(t)\}$ — действительный непрерывный в среднем квадратическом стационарный гауссовский процесс с сильной зависимостью (длинной памятью) [5], с $En(t) = 0$ и ковариационной функцией $B(t)$:

$$B(t) = \mathrm{cov}(n(0), \ n(t)) = \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}}, \ 0 < \alpha < 1, \ t \in R^1.$$

2. Нелинейная борелевская функция $G: R^1 \to R^1$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(u) \varphi(u) du < \infty, \text{ где } \varphi(u) = \frac{1}{2\pi} e^{-u^2/2}, \ u \in R^1.$$

При условии 2 функцию $G(u)$, $u \in R^1$, можно разложить в ряд

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} H_k(u), \ C_k = \int_{-\infty}^{\infty} G(u) H_k(u) \varphi(u) du, \ k = 0, 1, \ldots,$$

© П.С. Кнопов, Г.Д. Била, 2013

по ортогональным полиномам Чебышева–Эрмита

$$H_k(u) = (-1)^k e^{u^2/2} \frac{d^k}{du^k} e^{-u^2/2}, \ k = 0, 1, \dots,$$

в пространстве $L_2(R^1, \varphi(u)du)$.

3. Существует целое число $m \ge 1$ такое, что $C_1 = \ldots = C_{m-1} = 0$, $C_m \ne 0$ — коэффициенты при разложении функции $G(u)$, $u \in R^1$, по полиномам Чебышева–Эрмита. Целое число $m \ge 1$ называется эрмитовым рангом функции $G(u)$, $u \in R^1$.

4. Предположим, что задана почти периодическая функция $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k t}.$$

Для величин c_k и λ_k выполняются следующие условия:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty, \ \lambda_k \ge 0 \ \text{при} \ k \ge 0,$$

$$c_k = \bar{c}_{-k}, \ \lambda_k = -\lambda_{-k}, \ |\lambda_l - \lambda_k| \ge \Delta > 0 \ \text{при} \ l \ne k,$$

$$|c_{i_0}| > |c_i| \ \text{при} \ i \ne \pm i_0, \ i_0 > 0.$$

Задача заключается в оценке неизвестного параметра $\theta^0 = (A_0, \omega_0)$ по результатам наблюдений $\{y(t), 0 \le t \le T\}$ в предположении, что длина интервала $T \to \infty$. Для оценки параметра $\theta^0 \in \Theta$ будем использовать периодограммные оценки.

Рассмотрим функционал

$$Q_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T y(t) e^{i\omega t} dt \right|^2, \quad \omega \ge 0.$$

Периодограммной оценкой ω_T для частоты ω_0 назовем то значение $\omega \ge 0$, при котором функция $Q_T(\omega)$ принимает наибольшее значение на $[0, \infty)$. Оценкой для A_0 может служить величина $A_T = Q_T^{1/2}(\omega_T)$, или, как показано ниже, в случае выполнения условия 4 периодограммная оценка $\widetilde{A}_T$ для амплитуды A_0 определяется формулой $\widetilde{A}_T = \frac{1}{2} |c_{i_0}|^{-1} Q_T^{1/2}(\omega_T)$.

В дальнейших доказательствах будет использована диаграммная формула [6]. Дадим необходимые объяснения.

Назовем диаграммой порядка $(l_1, \ldots, l_p)$ граф Γ с $(l_1 + \ldots + l_p)$ вершинами, если:

— множество вершин V графа Γ имеет вид $V = \bigcup_{j=1}^{p} W_j$, где $W_j = \{(j, l)$: $1 \le l \le l_j\}$ — j-й уровень графа Γ, $1 \le j \le p$ (для $l_j = 0$ считаем $W_j = \varnothing$);

— каждая вершина имеет степень 1;

— если $((j_1, l_1), (j_2, l_2)) \in \Gamma$, то $j_1 \ne j_2$, т.е. ребра графа Γ могут проходить только между разными уровнями.

Пусть $T = T(l_1, \ldots, l_p)$ — множество диаграмм Γ порядка $(l_1, \ldots, l_p)$. Обозначим $R(V)$ множество ребер графа $\Gamma \in T$. Для ребра $\mu = ((j_1, l_1), (j_2, l_2)) \in R(V)$,

$j_1 < j_2$, положим $d_1(\mu) = j_1$, $d_2(\mu) = j_2$. Назовем диаграмму Γ регулярной, если ее уровни могут быть разбиты на пары так, что ни одно ребро не проходит между уровнями, принадлежащими различным парам. Множество регулярных диаграмм обозначим $T^* \subseteq T(l_1,\dots,l_p)$. Если p нечетно, то $T^* = \varnothing$. Если диаграмма $\Gamma \in T \setminus T^*$, то она называется нерегулярной.

Пусть $(\xi_1,\dots,\xi_p)$, $p \ge 2$, — гауссовский вектор с нулевым средним, $\mathrm{E}\xi_i\xi_j = B(i,j)$, $i,j = 1,\dots,p$, а $H_{l_1}(x),\dots,H_{l_p}(x)$ — полиномы Чебышева–Эрмита порядка $(l_1,\dots,l_p)$. Тогда диаграммная формула имеет вид

$$\mathrm{E}\left(\prod_{j=1}^{p} H_{l_j}(\xi_j)\right) = \sum_{\Gamma\in T}\prod_{\mu\in R(V)} B(d_1(\mu), d_2(\mu)), \tag{1}$$

где $T = T(l_1,\dots,l_p)$.

Лемма 1. Если выполняются условия 1–4, то

$$\xi(T) = \sup_{\omega\in R^1}\left|\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(t)e^{i\omega t}dt\right| \to 0,\ T\to\infty,$$

с вероятностью единица.

Доказательство. Рассмотрим величину

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(t)e^{i\omega t}dt\right|^2 = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t)\varepsilon(s)e^{i\omega(t-s)}dtds =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^{T-u}\varepsilon(s+u)\varepsilon(s)e^{i\omega u}dsdu + \frac{1}{T^2}\int_{-T}^0\int_{|u|}^T \varepsilon(s+u)\varepsilon(s)e^{i\omega u}dsdu = \eta_1(T)+\eta_2(T) .$$

Используя известное неравенство $\mathrm{E}|x| \le (\mathrm{E}|x|^2)^{1/2}$ для случайной величины $z = \int_0^{T-u}\varepsilon(s+u)\varepsilon(s)ds$, находим

$$\mathrm{E}\sup_{\omega\in R^1}|\eta_1(T)| \le T^{-2}\int_0^T \mathrm{E}\left|\int_0^{T-u}\varepsilon(s+u)\varepsilon(s)ds\right|du \le T^{-2}\int_0^T \Phi^{1/2}(u)\,du,$$

где $\Phi(u) = \int_0^{T-u}\int_0^{T-u}\mathrm{E}\,[\varepsilon(s+u)\varepsilon(s)\varepsilon(t+u)\varepsilon(t)]\,dsdt$.

Учитывая диаграммную формулу (1) и разложение функции $\varepsilon(t) = G(n(t))$ в ряд по полиномам Чебышева–Эрмита, получаем

$$\Phi(u) = \int_0^{T-u}\int_0^{T-u}\mathrm{E}\,[G(n(s+u))\,G(n(s))\,G(n(t+u))\,G(n(t))]\,dsdt =$$

$$= \sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{4}\frac{C_{l_j}}{l_j\,!}\right)\int_0^{T-u}\int_0^{T-u}\mathrm{E}\left[\prod_{j=1}^{4}H_{l_j}(n_j)\right]dsdt =$$

$$= \sum_{l_1,l_2,l_3,l_4=1}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{4}\frac{C_{l_j}}{l_j\,!}\right)\sum_{\Gamma\in T}\left[\int_0^{T-u}\int_0^{T-u}\left(\prod_{\omega\in R(V)}B(d_1(\omega),d_2(\omega))\right)dsdt\right], \tag{2}$$

где $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (n(s+u), n(s), n(t+u), n(t))$, $\Gamma \in T^*(l_1, l_2, l_3, l_4)$, а диаграммную формулу применяем для $p=4$. Тогда имеем три разных разбиения уровней $(1,2,3,4)$ на пары: а) $(1,2),(3,4)$; б) $(1,3),(2,4)$; в) $(1,4),(2,3)$.

Предположим, что мощность уровней первой пары каждого разбиения равна $r(1)$, а мощность уровней второй пары $r(2)$, где $r(1)$, $r(2)$ — порядки полиномов Чебышева–Эрмита в левой части диаграммной формулы (1). Тогда произведение

$$\prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \tag{3}$$

для трех разбиений имеет следующий вид: а) $B^{r(1)+r(2)}(u)$; б) $B^{r(1)+r(2)}(s-t)$; в) $B^{r(1)}(s-t+u) B^{r(2)}(s-t-u)$.

Поскольку известно, что $r(1)$, $r(2) \geq 1$, для слагаемых в сумме (2), которые соответствуют всем регулярным диаграммам, необходимо оценить величины:

$$\psi_1(u) = \int_0^{T-u} \int_0^{T-u} B^2(u)\, ds dt = (T-u)^2 B^2(u),$$

$$\psi_2(u) = \int_0^{T-u} \int_0^{T-u} B^2(s-t)\, ds dt,$$

$$\psi_3(u) = \int_0^{T-u} \int_0^{T-u} B(s-t+u) B(s-t-u)\, ds dt,$$

т.е. для оценки $\mathrm{E} \sup\limits_{\omega \in R^1} |\eta_1(T)|$ нужно оценить интегралы

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \psi_i^{1/2}(u)\, du, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим $\psi_3(u)$. Обозначив $b_u(s-t) = B(s-t+u) B(s-t-u)$ и выполнив в интеграле $\psi_3(u)$ замену переменных $t^* \to \frac{t}{T}$, $s^* \to \frac{s}{T}$, а затем $s^* - t^* \to s$, получим

$$\psi_3(u) = T^2 \int_0^{1-\frac{u}{T}} \int_0^{1-\frac{u}{T}} b_u(T(s^* - t^*))\, ds^* dt^* =$$

$$= T^2 \left(1 - \frac{u}{T}\right) \int_{-1+\frac{u}{T}}^{1-\frac{u}{T}} \left(1 - \frac{|s|}{1 - \frac{u}{T}}\right) b_u(Ts)\, ds \leq T^2 \left(1 - \frac{u}{T}\right) \int_{-1}^{1} b_u(Ts)\, ds \leq$$

$$\leq T^2 \left(1 - \frac{u}{T}\right) \left[\int_0^1 B(Ts+u)\, ds + \int_{-1}^0 B(Ts-u)\, ds\right].$$

Поскольку из четности ковариационной функции B следует

$$\int_{-1}^0 B(Ts-u)\, ds = \int_0^1 B(Ts+u)\, ds,$$

имеем

$$\psi_3(u) \leq 2T^2 \left(1 - \frac{u}{T}\right) \int_0^1 B(Ts+u)\, ds. \tag{4}$$

Из свойств функции B вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших T получаем

$$B(Ts+u) = \frac{1}{[1+(Ts+u)^2]^{\alpha/2}} < \frac{1+\varepsilon}{s^\alpha} \frac{1}{[1+T^2]^{\alpha/2}} = \frac{1+\varepsilon}{s^\alpha} B(T).$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \psi_3^{1/2}(u)\, du \le \frac{1}{T^2} \sqrt{2} T \int_0^T \sqrt{1-\frac{u}{T}} \sqrt{\int_0^1 \frac{1+\varepsilon}{s^\alpha} B(T) ds du} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\alpha} \right)^{1/2} B^{1/2}(T).$$

Аналогично получаем оценку для $\psi_2(u)$, которая является частным случаем (4) при $u=0$ под знаком интеграла:

$$\psi_2(u) \le 2T^2 \left(1-\frac{u}{T}\right) \int_0^1 B^2(Ts)\, ds \le 2T^2 \left(1-\frac{u}{T}\right) \int_0^1 B(Ts)\, ds. \tag{5}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \psi_2^{1/2}(u)\, du \le \frac{2\sqrt{2}}{3(1-\alpha)^{1/2}} B^{1/2}(T).$$

Используя замену переменных $u^* \to \dfrac{u}{T}$, получаем

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \psi_1^{1/2}(u)\, du = \frac{1}{T^2} \int_0^T (T-u) B(u)\, du = \int_0^1 (1-u^*) B(Tu^*)\, du^* \le$$

$$\le \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} B(T). \tag{6}$$

Итак, все слагаемые в сумме (2), которые соответствуют регулярным диаграммам, стремятся к нулю при $T \to \infty$.

Рассмотрим в сумме (2) слагаемые с нерегулярными диаграммами $\Gamma \in T \setminus T^*$. Пусть диаграмма $\Gamma \in T \setminus T^*$ фиксирована. Тогда в произведении (3) имеем множитель $B(s-t)$ (ребро соединяет уровни 1 и 2 или 3 и 4). Если в диаграмме Γ нет ребер с такими свойствами, то уровень 1 соединяется с уровнем 4, уровень 2 — только с уровнем 3, а Γ является регулярной диаграммой, что противоречит предположению.

Поскольку $B(0)=1$, произведение (3) мажорируется или $B(u)$, или $B(s-t)$. Тогда аналогично (5) и (6) получим

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T (T-u) B^{1/2}(u)\, du \le \frac{4}{(2-\alpha)(4-\alpha)} B^{1/2}(T),$$

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \left[\int_0^{T-u} \int_0^{T-u} B(s-t) ds dt \right]^{1/2} du \le \frac{2\sqrt{2}}{3(1-\alpha)^{1/2}} B^{1/2}(T).$$

Из предыдущих оценок следует, что $\mathrm{E}\sup_{\omega\in R^1}|\eta_1(T)|$ стремится к нулю при $T\to\infty$. Аналогично можно доказать, что $\mathrm{E}\sup_{\omega\in R^1}|\eta_2(T)|$ стремится к нулю при $T\to\infty$. Поэтому $\mathrm{E}\xi^2(T)\to 0$ при $T\to\infty$.

Полагая $T_n=n^{\frac{1}{\alpha}+\lambda}$, $n\ge 1$, $0<\alpha<1$, $\lambda>1$, легко убедиться, что имеет место соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}\xi^2(T_n)<\infty. \tag{7}$$

Учитывая лемму Бореля–Кантелли, из (7) получаем, что

$$\xi(T_n)\underset{n\to\infty}{\to}0 \tag{8}$$

с вероятностью единица.

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\varsigma_n=\sup_{T_n\le T\le T_{n+1}}|\xi(T)-\xi(T_n)|\le$$

$$\le\sup_{T_n\le T\le T_{n+1}}\sup_{\omega\in R^1}\left|\frac{1}{T}\int_0^T\varepsilon(t)e^{i\omega t}dt-\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n}\varepsilon(t)e^{i\omega t}dt\right|=$$

$$=\sup_{T_n\le T\le T_{n+1}}\sup_{\omega\in R^1}\left|\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_n}\right)\int_0^{T_n}\varepsilon(t)e^{i\omega t}dt+\frac{1}{T}\int_{T_n}^{T}\varepsilon(t)e^{i\omega t}dt\right|\le$$

$$\le\left(\frac{T_n}{T_{n+1}}-1\right)\xi(T_n)+\frac{1}{T}\int_{T_n}^{T_{n+1}}|\varepsilon(t)|dt=\varsigma_n^{(1)}+\varsigma_n^{(2)}.$$

Поскольку
$$\frac{T_n}{T_{n+1}}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\lambda}\underset{n\to\infty}{\to}1,\ \xi(T_n)\underset{n\to\infty}{\to}0$$

с вероятностью единица, то $\varsigma_n^{(1)}\underset{n\to\infty}{\to}0$ с вероятностью единица.

Рассмотрим

$$\mathrm{E}[\varsigma_n^{(2)}]^2=\mathrm{E}\left[\frac{1}{T}\int_{T_n}^{T_{n+1}}|\varepsilon(t)|\,dt\right]^2\le\frac{1}{T_n^2}\int_{T_n}^{T_{n+1}}\int_{T_n}^{T_{n+1}}\mathrm{E}\,[G(n(t))G(n(s))]\,dtds\le$$

$$\le\left[\frac{T_{n+1}-T_n}{T_n}\right]^2\mathrm{E}[G^2(n(0))]=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\lambda}-1\right]^2\le\frac{K}{n^2},\ K=\mathrm{const}.$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}\,[\varsigma_n^{(2)}]^2<\infty$, в силу леммы Бореля–Кантелли величина $\varsigma_n^{(2)}\underset{n\to\infty}{\to}0$ с вероятностью единица, т.е. с вероятностью единица

$$\varsigma_n\underset{n\to\infty}{\to}0. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) и неравенства

$$|\xi(T)| \le |\xi(T_n)| + \varsigma_n$$

следует доказательство леммы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда величина $\widetilde{\omega}_T = \dfrac{\omega_T}{\lambda_{i_0}}$ является сильно состоятельной оценкой параметра ω_0 при $T \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим поведение величины $Q_T(\omega)$ при любом фиксированном $\omega \ne 0$, $T \to \infty$:

$$Q_T(\omega) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T [g(t, \theta^0) + \varepsilon(t)] e^{i\omega t} dt \right|^2 = \left| \frac{2}{T} \int_0^T g(t, \theta^0) e^{i\omega t} dt \right|^2 + I_T(\omega),$$

где $I_T(\omega) = \left| \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt \right|^2 + 2 \operatorname{Re} \dfrac{4}{T^2} \displaystyle\int_0^T g(t, \theta^0) e^{i\omega t} dt \int_0^T \varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt$.

Из условия 4 легко видеть, что

$$\frac{1}{T} \left| \int_0^T g(t, \theta^0) e^{i\omega t} dt \right| \le C, \quad 0 < C < \infty.$$

Из леммы 1 следует, что с вероятностью единица $\sup\limits_{\omega} |I_T(\omega)| \to 0$ при $T \to \infty$.

Пусть $\Phi_T(\theta^0, \omega) = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T g(t, \theta^0) e^{i\omega t} dt$. Тогда, с учетом вида функции $g(t, \theta^0)$, $t \in R^1$, справедливо равенство

$$\Phi_T(\theta^0, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2A_0}{T} c_k \int_0^T e^{i(\lambda_k \omega_0 + \omega)t} dt.$$

Пусть $0 < \delta < \dfrac{\Delta\omega_0}{2}$ и $|\lambda_{i_0}\omega_0 + \omega| \ge \delta$. Предположим, что для любого $k \ne i$ имеет место $|\lambda_k \omega_0 + \omega| \le \delta$. Тогда для любого $l \ne k$ справедливо $|\lambda_l \omega_0 + \omega| = |(\lambda_k \omega_0 + \omega) + (\lambda_l - \lambda_k)\omega_0| > \omega_0 \left| |\lambda_l - \lambda_k| - \dfrac{1}{2}\Delta \right| \ge \dfrac{1}{2} \Delta\omega_0 > \delta$. Учитывая условие 4 и лемму 1, имеем

$$\varlimsup_{T\to\infty} \sup_{\substack{\omega \ge 0 \\ |\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta}} Q_T(\omega) \le \varlimsup_{T\to\infty} \sup_{\substack{\omega \ge 0 \\ |\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta}} |\Phi_T(\theta^0, \omega)|^2 =$$

$$= \varlimsup_{T\to\infty} \sup_{\substack{\omega \ge 0 \\ |\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta}} \left[\frac{2}{T} \int_0^T g(t, \theta^0) e^{i\omega t} dt \right] =$$

$$= \varlimsup_{T\to\infty} \sup_{\substack{\omega \ge 0 \\ |\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega| \ge \delta}} \left[\frac{2A_0}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(\lambda_k \omega_0 + \omega)t} dt \right]^2 \le$$

$$\le \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\substack{\omega\ge 0\\ |\lambda_{i_0}\omega_0-\omega|\ge\delta}} \left\{ \max_{k\neq\pm i_0} \left[A_0^2 |c_k|^2 \left| \frac{2}{T}\int_0^T e^{i(\lambda_k\omega_0+\omega)t} dt \right|^2 \right] \right\} \le$$

$$\le 4A_0^2 \max_{k\neq\pm i_0} |c_k|^2 < 4A_0^2 |c_{i_0}|^2 . \qquad (10)$$

Легко видеть, что $\lim_{T\to\infty} Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = 4A_0^2 |c_{i_0}|^2$.

Теперь сильную состоятельность оценки $\widetilde{\omega}_T$ доказываем методом от противного аналогично доказательству теоремы 1 в работе [7].

Покажем, что $\widetilde{\omega}_T \to \omega_0$ при $T\to\infty$ с вероятностью единица. Пусть $\mathrm{E} = \{e\}$ — пространство элементарных событий,

$$\Psi = \{e, \ \overline{\lim_{T\to\infty}} \sup_{\omega\in\Phi_\delta} Q_T(\omega) < \lim_{T\to\infty} Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = L, \ L<\infty\},$$

где $\Phi_\delta = \{\omega : \left|\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega\right| \ge \delta\}$, $\delta < \dfrac{\Delta\omega_0}{2}$.

В силу предыдущих рассуждений $P\{\Psi\} = 1$. Тогда рассмотрим множество $\Psi_1 = \{e, \ \widetilde{\omega}_T \not\to \omega_0, \ T\to\infty\}$. Выберем элементарное событие $e\in\Psi_1\cap\Psi$. Для него существует подпоследовательность $T_k(e)\to\infty$ при $k\to\infty$ такая, что $\widetilde{\omega}_{T_k(e)}(e) \to \widetilde{\omega}'(e) \neq \omega_0$.

Возьмем $\delta(e) < \min\left(|\widetilde{\omega}'(e) - \lambda_{i_0}\omega_0|, \ \dfrac{\Delta\omega_0}{2} \right)$. Тогда в силу того, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sup_{\omega\in\Phi_{\delta(e)}} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\omega) < \lim_{k\to\infty} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\lambda_{i_0}\omega_0),$$

имеет место

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sup_{\omega\in\Phi_{\delta(e)}} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\omega_{T_k(e)}(e)) < \lim_{k\to\infty} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\lambda_{i_0}\omega_0),$$

причем

$$\lim_{k\to\infty} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\lambda_{i_0}\omega_0) = L, \text{ где } L > \overline{\lim_{k\to\infty}} Q_{T_k(e)}^{(e)}(\omega_{T_k(e)}(e)).$$

Получили противоречие. Следовательно, $P\{\Psi_1\} = 0$ и $\widetilde{\omega}_T \to \omega_0$ при $T\to\infty$ с вероятностью единица.

Теорема доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда с вероятностью единица справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty} Q_T(\omega_T) = \lim_{T\to\infty} Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = 4A_0^2 |c_{i_0}|^2.$$

Доказательство. Из определения оценки ω_T известно, что $Q_T(\omega_T) \ge Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0)$, поэтому

$$0 \le Q_T(\omega_T) - Q_T(\lambda_{i_0}\omega_0) = I_T(\omega_T) - I_T(\lambda_{i_0}\omega_0) +$$

$$+ \frac{4}{T^2} \left| \int_0^T g(t,\theta^0) e^{i\omega_T t} dt \right|^2 - \frac{4}{T^2} \left| \int_0^T g(t,\theta^0) e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t} dt \right|^2 . \qquad (11)$$

Из леммы 1 следует, что $I_T(\omega) \to 0$ при $T \to \infty$ с вероятностью единица. Тогда при $0 < \delta < \frac{\Delta\omega_0}{2}$ имеем

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{4}{T^2}\sup_{\omega\geq 0}\left|\int_0^T g(t,\theta^0)e^{i\omega t}dt\right|^2 - \frac{4}{T^2}\left|\int_0^T g(t,\theta^0)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{4}{T^2}\max\left\{\sup_{\substack{|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega|\geq\delta\\ \omega\geq 0}}\left|\int_0^T g(t,\theta^0)e^{i\omega t}dt\right|^2, \sup_{\substack{|\lambda_{i_0}\omega_0-\omega|<\delta\\ \omega\geq 0}}\left|\int_0^T g(t,\theta^0)e^{i\omega t}dt\right|^2\right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{T^2}\left|\int_0^T g(t,\theta^0)e^{i\lambda_0\omega_0 t}dt\right|^2\right\} \leq 0.$$

Таким образом, на основании неравенств (10), (11) можно утверждать, что с вероятностью единица

$$\lim_{T\to\infty} Q_T(\omega_T) = \lim_{T\to\infty} Q_T(\lambda_i\omega_0) = 4A_0^2|c_{i_0}|^2.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда с вероятностью единица имеет место соотношение

$$T\left(\frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}} - \omega_0\right) \to 0 \text{ при } T \to \infty.$$

Доказательство. Из доказательства леммы 2 известно, что при $T \to \infty$ правая часть (11) стремится к нулю с вероятностью единица. Тогда при $T \to \infty$ с вероятностью единица

$$\left|\frac{2}{T}\int_0^T g(t,\theta^0)e^{i\omega_T t}dt\right|^2 - \left|\frac{2}{T}\int_0^T g(t,\theta^0)e^{i\lambda_{i_0}\omega_0 t}dt\right|^2 \to 0. \tag{12}$$

Рассмотрим

$$\lim_{T\to\infty}\left|\frac{2}{T}\int_0^T g(t,\theta^0)e^{i\omega_T t}dt\right|^2 = 4A_0^2|c_{i_0}|^2 \lim_{T\to\infty}\left|\frac{e^{i(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)T}-1}{(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T)T}\right|^2.$$

Поскольку $\omega_0 > 0$ и $\omega_T \geq 0$, с учетом последнего равенства соотношение (12) справедливо тогда и только тогда, когда при $T \to \infty$

$$\left|\frac{e^{i(\omega_T-\lambda_{i_0}\omega_0)T}-1}{(\lambda_{i_0}\omega_0-\omega_T)T}\right| \to 1$$

с вероятностью единица или, что то же,

$$\frac{\sin(\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega_T)T}{(\lambda_{i_0}\omega_0 - \omega_T)T} \to 1 \text{ при } T \to \infty$$

с вероятностью единица. Последнее возможно тогда и только тогда, когда $T\left(\frac{\omega_T}{\lambda_{i_0}} - \omega_0\right) \to 0$ при $T \to \infty$ с вероятностью единица. Таким образом, доказана скорость сходимости оценки $\widetilde{\omega}_T$ к ее истинному значению.

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1–4. Тогда величина $\widetilde{A}_T = \frac{1}{2}|c_{i_0}|^{-1} \times \times Q_T^{1/2}(\omega_T)$ является сильно состоятельной оценкой параметра A_0 при $T \to \infty$.

Доказательство теоремы 3 очевидным образом вытекает из леммы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ананьєва О.О., Іванов О.В. Консистентність оцінки найменших модулів параметра нелінійної регресії // Наук. вісті НТУУ «КПІ». Теорет. та прикл. пробл. фіз.-мат. наук. — 2009. — Вип. 3. — С. 138–142.
2. Біла Г.Д. Консистентність оцінки невідомих параметрів у моделях із сильно залежним шумом // Теорія оптимальних рішень: Зб. наук. праць. — Київ: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2012. — С. 36–41.
3. Жураковський Б.М., Іванов О.В. Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань у моделях із сильно залежним шумом // Наук. вісті НТУУ «КПІ». Теорет. та прикл. пробл. математики. — 2010. — Вип. 4. — С. 60–66.
4. Іванов О.В., Жураковський Б.М. Властивості періодограмних оцінок параметрів гармонічного коливання у моделях регресії з сильно залежним шумом // Там же. — 2012. — № 4 (84). — С. 59–65.
5. Beran J. Statistics for long-memory processes. — New York: Chapman & Hall, 1994. — 315 p.
6. Иванов А.В., Леоненко Н.Н. Статистический анализ случайных полей. — К.: Вища шк., 1986. — 216 с.
7. Кнопов П. С. Оценивание неизвестных параметров почти периодической функции при наличии шума. I // Кибернетика. — 1984. — № 6. — С. 83–87, 98.

Поступила 14.01.2013