УДК 517.977

Ю.Н. ОНОПЧУК, Ал.А. ЧИКРИЙ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР СБЛИЖЕНИЯ

Ключевые слова: *нестационарная дифференциальная игра, стробоскопическая стратегия, условие Каратеодори, многозначное отображение, условие Понтрягина, измеримый селектор, условие Лаппо–Данилевского, функционал Минковского, формула Коши.*

ВВЕДЕНИЕ

Определенное представление о состоянии дифференциальных игр можно составить по результатам монографий [1–8]. В них содержатся методы исследования конфликно-управляемых процессов, а также разработанные на их основе практические приложения [8]. В настоящее время ряд инженерных способов перехвата движущихся целей обоснован с помощью теоретических конструкций. Так, правило экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [2] дает обоснование преследования по погонной кривой Л. Эйлера [9], а метод разрешающих функций [5] обосновывает, в частности, метод сближения по лучу, а также параллельное преследование [9]. Последний применяется при решении широкого круга задач группового и поочередного преследований [5, 10–12, 30], при исследовании импульсных процессов и систем переменной структуры [13], при изучении игровых задач для систем дробного порядка [14] и процессов с интегральными ограничениями на управления [15], фазовыми ограничениями на состояния [5] и при отказе управляющих устройств [16]. Метод разрешающих функций позволяет исследовать и ряд других содержательных задач, включая важную проблему взаимодействия группировок управляемых объектов [5, 8, 10, 11, 31].

Упомянутый метод базируется на использовании обратных функционалов Минковского, специальных многозначных отображений и обеспечивает гарантированный результат для задачи сближения. Ключевая идея метода состоит в построении специальных скалярных функций, названных разрешающими (решающими игровую задачу), которые оценивают ход динамической игры в любой момент. Возможность строить эти функции в аналитическом виде позволяет решать широкие классы игровых задач в единой схеме.

Цель данной работы — применить метод разрешающих функций к исследованию нестационарных игровых задач. Особенность нестационарных квазилинейных процессов состоит в том, что их параметры (матрица системы, области управления игроков, терминальное множество) зависят от времени, и, зная характер этих зависимостей, необходимо установить соотношения между ними, которые достаточны для окончания игры за конечное время. Исследования касаются игровой ситуации с одним преследователем и одним убегающим. Тем не менее ясно, что теоретические конструкции могут использоваться и в более общей ситуации с группами участников.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

Пусть движение объекта в конечномерном вещественном евклидовом пространстве R^n описывается системой квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t, u, v), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \qquad (1)$$

где $A(t)$ — матричная функция порядка n, элементы которой — измеримые функции, суммируемые на любом конечном интервале $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$. Параметры управления игроков u и v выбираются из областей управления $U(t)$ и $V(t)$, причем $U(t) \in K(R^p)$, $V(t) \in K(R^q)$ и являются измеримыми компактнозначными отображениями для $t \in [t_0, +\infty)$. Вектор-функция $\varphi(t, u, v)$ — блок управления — определена на множестве $[t_0, +\infty) \times R^p \times R^q$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: для всех фиксированных $(u, v) \in R^p \times R^q$ измерима по t, $t \in [t_0, +\infty)$, и для любого фиксированного $t \in [t_0, +\infty)$ непрерывна по совокупности (u, v) на $R^p \times R^q$. Также будем считать, что

$$\| \varphi(t, u, v \| \leq a(t) \ \ \forall\, u \in U(t), \ v \in V(t), \ t \in [t_0, +\infty), \tag{2}$$

где $a(t)$ — суммируема на любом конечном интервале $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$, функция.

Кроме нестационарной динамической системы (1) задано терминальное множество $M^*(t)$ цилиндрического вида

$$M^*(t) = M_0 + M(t), t \in [t_0, +\infty). \tag{3}$$

Здесь M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M(t)$ — измеримое многозначное отображение, которое принимает значения из $K(L)$, где L — ортогональное дополнение к M_0 в R^n.

Цель первого игрока-преследователя (u) — с помощью выбора параметра управления u в рамках наложенных ограничений вывести траекторию процеса (1) на терминальное множество (2) за кратчайшее время. Цель второго игрока — убегающего (v) — с помощью параметра управления v отклонить траекторию процесса (1) от встречи с множеством $M^*(t)$ в конечный момент времени, а если это невозможно, то максимально оттянуть момент этой встречи.

Л.С. Понтрягин [1] предложил рассматривать задачи сближення–уклонения в отдельности для установления достаточных условий выигрыша первого игрока (задача сближения) либо условий выгрыша второго игрока (задача уклонения). Будем придерживаться этой идеологии, сосредоточив внимание на задаче сближения.

Вполне понятно, что игровая задача (1)–(3) охватывает случай преследования–убегания [1–23] при разделенных и независимых движениях игроков.

Для полной формулировки задачи сближения необходимо точно определить информированность обоих игроков в процессе игры. Примем сторону первого игрока и выясним, какой результат он может гарантировать себе. Будем считать, что второй игрок в качестве управления выбирает произвольные измеримые функции со значениями из многозначного отображения $V(t)$. Поскольку это отображение измеримо и замкнутозначно, то согласно теореме об измеримом выборе [24] это возможно. Совокупность таких управлений — измеримых селекторов отображения $V(t)$ — обозначим Ω_E и будем называть программным управлением.

Если первый игрок в момент принятия решения t, $t \geq t_0$, имеет информацию о начальном состоянии процесса (t_0, z_0), $z_0 = z(t_0)$, и предыстории управления убегающего

$$v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V(s), s \in [t_0, t]\},$$

т.е. $u(t) = u(t_0, z_0, t, v_t(\cdot))$, то будем считать, что он использует квазистратегию. Естественно, функция $u(t)$ обязана быть измеримой и принимать значения из отображения $U(t)$. Если первый игрок принимает решение в момент t лишь на основе информации о начальном положении процесса (1) (t_0, z_0) и мгновенного значения управления убегающего $v(t)$, т.е. $u(t) = u(t_0, z_0, t_0, v(t))$, то будем говорить о контруправлении по Н.Н. Красовскому [2], которое назначается стробоскопической стратегией О. Хайека [29]. В каждом из упомянутых выше случаев считается, что преследователю также известны параметры процесса (1), (3): матричная функция $A(t)$, блок управления $\varphi(t, u, v)$, многозначные отображения $U(t), V(t), M^*(t)$ при $t \geq t_0$.

При этих условиях для каждого класса стратегий необходимо найти достаточные условия окончания игры (1)–(3) в пользу первого игрока за некоторое гарантированное время и управление преследователя, которое обеспечивает ему этот результат.

Заметим, что состояние системы (1) определяет пара (t, z). Динамическая игра (1)–(3) считается законченной в момент $T(t_0, z_0)$ из начального состояния (t_0, z_0), если существует такой измеримый селектор $u(t)$ многозначного отображения $U(t)$, что для любого измеримого селектора $v(t)$ многозначного отображения $V(t)$ соответствующая траектория системы (1) $z(t) = z(t_0, z_0, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot))$ попадет на множество $M^*(t)$ в момент $t = T(t_0, z_0)$.

Отметим, что траекторией системы (1) при выбранных управлениях игроков является абсолютно непрерывная функция $z(t)$, которая почти везде удовлетворяет уравнению (1), это решение Каратеодори.

Перейдем к схеме метода решения задачи (1)–(3). Пусть π — ортопроектор, который действует из R^n в L. Рассмотрим многозначное отображение

$$\varphi(t, U(t), v) = \{\varphi(t, u, v) : u \in U(t)\},\ t \geq t_0, v \in V(t).$$

В силу допущений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) и теоремы о прямом образе [24] это отображение измеримо по t и непрерывно по v.

Пусть также

$$W(t, \tau, v) = \pi\,\Phi(t, \tau)\varphi(\tau, U(\tau), v),\ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W(t, \tau, v),\ t \geq \tau \geq t_0,\ v \in V(\tau).$$

Здесь $\Phi(t, \tau)$ — переходная матрица однородной системы (1) — матрица Коши, или так называемый матрицант [25–28]. Если выполнено условие Лаппо–Данилевского [27], то матрицант может быть выражен подобно стационарному случаю как экспонента в степени интеграла от матрицы системы. Многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ измеримо по τ и непрерывно по v, а отображение $W(t, \tau)$ измеримо по τ [24], причем в силу неравенства (2) при фиксированном t для каждого $\omega \in W(t, \tau)$ при любом $\tau \geq t_0$ имеем $\|\omega\| \leq b(\tau)$, где $b(\tau)$ суммируема на каком-либо конечном интервале из $[t_0, +\infty)$.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ принимает непустые значения для $t_0 \leq \tau \leq t < +\infty$.

Поскольку отображение $W(t, \tau)$ замкнутозначно и измеримо по τ, то в силу теоремы об измеримом выборе [24] существует хотя бы один измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau)$, $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq t_0$, который является суммируемой по τ на $[t_0, t]$ функцией при каждом t.

Зафиксируем его и обозначим

$$\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)) = \pi\Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \gamma(t, \tau)d\tau.$$

С помощью обратного функционала Минковского [5] для замкнутого множества X, $X \subset R^n$,

$$\alpha_X(p) = \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha p \in X\},\ 0 \in X,\ p \in R^n,$$

рассмотрим функцию

$$\alpha(t,\tau,v,m)=\alpha_{W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)}(m-\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))),$$
$$t\geq\tau\geq t_0,\ v\in V(\tau),\ m\in M(t).$$

В силу свойств функции $\alpha_X(p)$, многозначного отображения $W(t,\tau,v)$ и селектора $\gamma(t,\tau)$ функция $\alpha(t,\tau,v,m)$ измерима по τ и полунепрерывна сверху по m [5]. Положим $\alpha(t,\tau,v)=\sup\limits_{m\in M(t)}\alpha(t,\tau,v,m)$.

Согласно теореме о маргинальном отображении [24] функция $\alpha(t,\tau,v)$ измерима по τ. При этом она полунепрерывна сверху по v [5] и $L\times B$-измерима по совокупности (τ,v), $\tau\in[t_0,t]$, $v\in V(\tau)$, для любых t, $t<+\infty$ [20, 21].

Кроме того, рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v)=\{\alpha\geq 0:[W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)]\cap\alpha[M(t)-\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))]\neq\varnothing\},$$
$$t\geq\tau\geq t_0,\ v\in V(\tau),\ \mathfrak{A}(t,\tau,v)\in 2^{R_+}, \tag{4}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\alpha_1(t,\tau,v)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,v)\}. \tag{5}$$

Из предыдущих построений вполне очевидно, что

$$\alpha(t,\tau,v)=\alpha_1(t,\tau,v),\ t_0\leq\tau\leq t<+\infty,\ v\in V(\tau).$$

Функцию $\alpha(t,\tau,v)$ в дальнейшем будем называть разрешающей [5, 20]. Поскольку для конфликтно-управляемого процесса (1), (3) выполнено условие Понтрягина, то многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ корректно определено и принимает непустые значения для всех допустимых значений аргументов. Следует заметить, что при $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\in M(t)$ получим $\mathfrak{A}(t,\tau,v)\equiv[0,+\infty)$ и соответственно $\alpha(t,\tau,v)=+\infty$ при любых $\tau\in[t_0,t]$ согласно приведенным выше формулам (4), (5).

Если $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\overline{\in}M(t)$, то функция $\alpha(t,\tau,v)$ принимает конечные значения для $t_0\leq\tau\leq t<+\infty$, $v\in V(\tau)$.

Рассмотрим множество

$$T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\geq t_0:\inf_{v(\cdot)\in\Omega_{\mathrm{E}}}\int_{t_0}^{t}\alpha(t,\tau,v(\tau))\,d\tau\geq 1\right\}. \tag{6}$$

Поскольку функция $\alpha(t,\tau,v)$ является $L\times B$-измеримой по совокупности (τ, v) при каждом $t>t_0$ на своей области определения, то она и суперпозиционно измерима, а значит, соответсвующий интеграл в (6) имеет смысл.

Заметим, что если $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\in M(t)$ для некоторого $t>t_0$, то $\inf\limits_{v\in V(\tau)}\alpha(t,\tau,v)=+\infty$ для $\tau\in[t_0,t]$. В этом случае значение интеграла в соотношении (6) естественно положить равным $+\infty$, а соответствующее неравенство выполнено автоматически. Если неравенство в фигурных скобках в (6) не выполняется для всех $t>t_0$, положим $T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) выполнено условие Понтрягина, отображение $M(t)$ выпуклозначно, т.е. $M(t)=\mathrm{co}\,M(t)$ для $t\geq t_0$.

Тогда если для заданного начального состояния (t_0,z_0) нестационарного процесса (1) существует такой измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$, $t_0\leq\tau\leq t<+\infty$, многозначного отображения $W(t,\tau)$, что $T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\neq\varnothing$ и $T\in T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))$, то траектория процесса может быть приведена на терминальное множество (3) в момент T с помощью управления вида

$$u(t)=u(t_0, z_0, t, v_t(\cdot)),\ t\in[t_0, T].$$

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau)\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0, T]$, — произвольная измеримая функция, а $\gamma(T,\tau)$, $\tau\in[t_0, T]$, — фиксированный измеримый селектор отображения $W(t,\tau)$. Рассмотрим сначала случай $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))\overline{\in} M(T)$. Для этого введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_{t_0}^{t}\alpha(T,\tau,v(\tau))\,d\tau,\ t\in[t_0, T].$$

Функция $h(t)$ абсолютно непрерывна как функция верхнего предела интеграла, а значит, непрерывна. Она не возрастает, поскольку по построению функция $\alpha(T,\tau,v)$ неотрицательна и соответственно интеграл как функция верхнего предела есть функция неубывающая. Кроме того, $h(t_0)=1$, а поскольку по определению $h(T)\le 0$, то из теоремы Коши о непрерывных функциях вытекает, что существует такой момент времени t_*, $t_*\in(t_0, T]$, что $h(t_*)=0$. Очевидно, что t_* зависит от $v(\cdot)$.

Промежутки времени $[t_0, t_*)$ и $[t_*, T]$ в дальнейшем будем называть активным и пассивным соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначное отображение

$$U(\tau,v)= \tag{7}$$

$$=\{u\in U(\tau): \pi\,\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v)-\gamma(T,\tau)\in\alpha(T,\tau,v)[M(T)-\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))]\}.$$

В силу свойств разрешающей функции $\alpha(T,\tau,v)$, ее $L\times B$-измеримости и условий, наложеных на параметры конфликтно-управляемого процесса (1)–(3), из теоремы об обратном образе [24] вытекает, что отображение $U(\tau,v)$ $L\times B$-измеримо при $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0, T]$. Согласно теореме измеримого выбора существует хотя бы один $L\times B$-измеримый селектор $u(\tau,v)$ отображения $U(\tau,v)$. Как утверждается в [20], он является суперпозиционно измеримой функцией, т.е. $u(\tau)=u(\tau,v(\tau))$ — измеримая функция. Управление первого игрока на активном участке положим равным $u(\tau)$, $\tau\in[t_0, t_*)$.

Рассмотрим пассивный участок времени $[t_*, T]$, полагая в формуле (7) разрешающую функцию $\alpha(T,\tau,v)\equiv 0$ при $v\in V(\tau)$ $\tau\in[t_*, T]$. Получим многозначное отображение

$$U_0(\tau,v)=\{u\in U(\tau): \pi\,\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v)-\gamma(T,\tau)=0\}. \tag{8}$$

Как и в предыдущем случае, отображение $U_0(\tau,v)$ компактнозначно и $L\times B$-измеримо, поэтому в нем существует $L\times B$-измеримый селектор $u_0(\tau,v)$. Управление первого игрока на пассивном участке выберем равным $u_0(\tau)=u_0(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[t_*, T]$. Как и в предыдущей ситуации, $u_0(\tau)$ — измеримая функция.

В случае $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))\in M(T)$ управление первого игрока на всем промежутке $[t_0, T]$ выберем в виде $u_0(\tau)=u_0(\tau,v(\tau))$, где $u_0(\tau,v)$ — $L\times B$-измеримый селектор многозначного отображения $U_0(\tau,v)$.

Покажем, что при выборе управлений первым игроком по указанным правилам траектория процесса (1) будет приведена на терминальное множество $M_0+M(T)$ в момент T при любых допустимых управлениях второго игрока.

Рассмотрим сначала случай $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))\overline{\in} M(T)$. Из формулы Коши для квазилинейных нестационарных систем [25, 26] имеем

$$\pi z(T)=\pi\Phi(T, t_0)z_0+\int_{t_0}^{T}\pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau. \tag{9}$$

Из этой формулы, используя соотношения (7), (8), получим включение

$$\pi z(T) \in \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T, \cdot))\left[1 - \int_{t_0}^{t_*} \alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau\right] + \int_{t_0}^{t_*} \alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))M(T)d\tau . \quad (10)$$

Поскольку $M(T)$ — выпуклый компакт, а $\alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))$ — по построению неотрицательная функция и $\int_{t_0}^{t_*} \alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau = 1$, то $\int_{t_0}^{t_*} \alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))\, M(T)\, d\tau = M(T)$.

Учитывая упомянутые выше факты, из соотношения (10) имеем $\pi z(T) \in M(T)$ или $z(T) \in M^*(T)$.

Пусть $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T, \cdot)) \in M(T)$. Тогда из формулы (9) с учетом соотношения (8) получим $\pi z(T) = \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T, \cdot)) \in M(T)$.

Теорема доказана.

Если множество $T(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot))$ замкнуто, то поскольку $T(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)) \subset \subset [t_0, +\infty)$, существует его минимальный элемент

$$t_{\min}(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \min\{t : t \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot))\} .$$

Замечание 1. При $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T, \cdot)) \in M(T)$ управление первого игрока может быть выбрано в виде $L \times B$-измеримого селектора отображения $U(\tau, \upsilon)$, где в соотношении (7) вместо функции $\alpha(T, \tau, \upsilon)$ стоит произвольная неотрицательная измеримая функция $\alpha(T, \tau)$ такая, что $\int_{t_0}^{T} \alpha(T, \tau)\, d\tau = 1$, поскольку $\mathfrak{A}(T, \tau, \upsilon) = [0, +\infty)$ для $\upsilon \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Такими, например, есть функции

$$1/T - t_0 , \ 2\tau / T^2 - t_0^2 , \ 3\tau^2 / T^3 - t_0^3 , \ e^{\tau} / e^T - e^{t_0}, \ \ldots$$

Из доказательства теоремы 1 видно, что первый игрок в момент t, $t \in [t_0, T]$, использует информацию о предыстории $\upsilon_t(\cdot)$ управления второго игрока, причем она необходима лишь для определения момента t_*, что есть нулем контрольной функции и разделяет активный и пассивный промежутки. На самих же промежутках первый игрок использует контруправление по Красовскому, которое назначается стробоскопической стратегией Хайека. При этих условиях представляет интерес вопрос: когда в теореме 1 для реализации процесса сближения можно ограничиться контруправлениями, не используя информацию о предыстории управления второго игрока?

Для того чтобы на него ответить, сформулируем условие.

Условие 1. В условиях теоремы 1 при $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T, \cdot)) \overline{\in} M(T)$ многозначное отображение $\mathfrak{A}(T, \tau, \upsilon)$ является выпуклозначным для $\upsilon \in V(\tau)$, $t_0 \le \tau \le T$, т.е.

$$\mathfrak{A}(T, \tau, \upsilon) = [0, \alpha(T, \tau, \upsilon)] .$$

Замечание 2. Условие 1 выполнено, если отображение $W(T, \tau, \upsilon)$ выпуклозначно при $\upsilon \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, а множество $M(T)$ — выпуклый компакт. Это условие эквивалентно связности образов отображения $\mathfrak{A}(T, \tau, \upsilon)$.

Условие 2. Если $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T, \cdot)) \overline{\in} M(T)$ и выполнены условия теоремы 1, то функция

$$\alpha_*(T, \tau) = \inf_{\upsilon \in V(\tau)} \alpha(T, \tau, \upsilon) , \ \tau \in [t_0, T],$$

является измеримой по τ и справедливо равенство

$$\inf_{\upsilon(\cdot) \in \Omega_E} \int_{t_0}^{T} \alpha(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau = \int_{t_0}^{T} \inf_{\upsilon \in V(\tau)} \alpha(T, \tau, \upsilon)d\tau .$$

Теорема 2. Пусть для нестационарного конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) выполнено условие Понтрягина.

Тогда если для начального состояния (t_0, z_0) процесса (1) существует такой измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$, $t_0 \le \tau \le t < +\infty$, многозначного отображения $W(t,\tau)$, что $T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \ne \varnothing$ и $T \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))$, причем выполнены условия 1, 2 и множество $M(T)$ выпукло, то траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент T с помощью контруправления вида

$$u(t) = u(t_0, z_0, t, v(t)),\ t \in [t_0, T].$$

Доказательство. Пусть $v(\tau)$, $v(\tau) \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, — произвольная измеримая функция. Рассмотрим случай $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot)) \overline{\in} M(T)$. С учетом условия 2 обозначим $\alpha(T) = \int_{t_0}^{T} \alpha_*(T,\tau)d\tau$ и положим $\alpha^*(T,\tau) = {}^{1}\!/_{\alpha(T)}\,\alpha_*(T,\tau)$. Поскольку $\alpha(T) \ge 1$ согласно выражению (6) и выполнено условие 1, то функция $\alpha^*(T,\tau)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\alpha^*(T,\tau) \le \alpha_*(T,\tau) \le \alpha(T,\tau,v),\ v \in V,\ \tau \in [t_0, T],$$

является измеримым селектором для многозначного отображения $\mathfrak{A}(T,\tau,v)$, $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U^*(\tau, v) = \tag{11}$$

$$= \{ u \in U(\tau) : \pi \Phi(\mathrm{T},\tau)\,\varphi(\tau, u, v) - \gamma(\mathrm{T},\tau) \in \alpha^*(\mathrm{T},\tau)[\mathrm{M(T)} - \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))]\}.$$

Из выражения (11) и свойств параметров конфликтно-управляемого процесса (1), (3) вытекает, что отображение $U^*(\tau, v)$ компактнозначно и $L \times B$-измеримо при $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Согласно теореме об измеримом выборе [24] в нем существует $L \times B$-измеримый селектор $u^*(\tau, v)$, который, в свою очередь, является суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление первого игрока равным $u^*(\tau) = u^*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [t_0, T]$.

В случае $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot)) \in M(T)$ выберем управление первого игрока на всем промежутке $[t_0, T]$ в виде $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$, где $u_0(\tau, v)$ — некоторый $L \times B$-измеримый селектор многозначного отображения $U_0(\tau, v)$, которое задается формулой (8) и совпадает с отображением $U^*(\tau, v)$ при $\alpha^*(T,\tau) \equiv 0$.

Покажем, что в каждом случае траектория процесса (1) будет приведена на терминальное множество в момент T.

Если $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot)) \overline{\in} M(T)$, то из формулы Коши, учитывая выражение для многозначного отображения $U^*(\tau, v)$, получим включение

$$\pi z(T) \in \xi(t_0, z_0, T, \gamma(T,\cdot))[1 - \int_{t_0}^{T} \alpha^*(T,\tau)d\tau] + \int_{t_0}^{T} \alpha^*(T,\tau) M(T) d\tau. \tag{12}$$

Поскольку $M(T)$ — выпуклый компакт, а $\alpha^*(T,\tau)$ — неотрицательная функция такая, что $\int_{t_0}^{T} \alpha^*(T,\tau)\,d\tau = 1$, то $\int_{t_0}^{T} \alpha^*(T,\tau) M(T) d\tau = M(T)$. На основании этого из включения (12) получим $\pi z(T) \in M(T)$.

В случае $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T, \cdot)) \in M(T)$ с учетом закона выбора управления первым игроком и формулы Коши непосредственно имеем $\pi z(T) \in M(T)$.

Условие 1 может быть ослаблено или заменено некоторой модификацией.

Условие 3. При $\xi(t_0, z_0, T, \gamma(T, \cdot)) \overline{\in} M(T)$ существует такой измеримый селектор $\alpha(T, \tau)$, $\alpha(T, \tau) \in \mathfrak{A}(T, \tau, \upsilon)$, $\upsilon \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, что не зависит от υ и удовлетворяет условию $\int\limits_{t_0}^{T} \alpha(T, \tau) d\tau = 1$.

Последнее условие приводит к некоторой модификации основной схемы метода разрешающих функций, которая дает, в некоторой степени, исчерпывающий ответ на вопрос о разрешимости игровых задач сближения в классе стробоскопических стратегий.

Действительно, рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau) = \bigcap_{\upsilon \in V(\tau)} \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon), \; t \ge \tau \ge t_0 .$$

Оно имеет непустые образы, поскольку $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)$, $\upsilon \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, а также является измеримым по τ [24] и замкнутозначным. Введем опорную функцию отображения $\mathfrak{A}(t, \tau)$ в направлении +1:

$$\alpha(t, \tau) = \sup\{\alpha \ge 0 : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}, \; t \ge \tau \ge 0 .$$

Согласно теореме об опорной функции [24] она является измеримой по τ. Обозначим множество

$$\Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \{t \ge 0 : \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(t, \tau) d\tau \ge 1\}. \tag{13}$$

Если для некоторого $\bar{t} > 0$ $\xi(t_0, z_0, \bar{t}, \gamma(\bar{t}, \cdot)) \in M(\bar{t})$, то очевидно, что $\mathfrak{A}(\bar{t}, \tau) = [t_0, +\infty)$, а $\alpha(\bar{t}, \tau) = +\infty$ для $\tau \in [t_0, \bar{t}]$ и естественно значение $\int\limits_{t_0}^{\bar{t}} \alpha(\bar{t}, \tau) d\tau = +\infty$, соответствующее неравенству в (13), считать выполненным автоматически, т.е. $\bar{t} \in \Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot))$. Если неравенство в (13) не выполняется для любого $t > t_0$, то будем считать, что $\Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. Пусть для нестационарного конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) выполнено условие Понтрягина и $M(t) = \operatorname{co} M(t),\; t \ge t_0$.

Тогда если для начального состояния (t_0, z_0) существует измеримый по τ селектор $\gamma(t, \tau)$, $\gamma(t, \tau) \in W(t, \tau)$, $t_0 \le \tau \le t < +\infty$, такой, что $\Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)) \ne \varnothing$ и $\Theta \in \Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot))$, то траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент Θ с помощью некоторого контруправления.

Доказательство. Используем традиционную схему. Пусть $\upsilon(\tau)$, $\upsilon(\tau) \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, \Theta]$, — произвольная измеримая функция. Рассмотрим случай $\xi(t_0, z_0, \gamma(\Theta, \cdot)) \overline{\in} M(\Theta)$.

Введем контрольную функцию

$$h_\Theta(t) = 1 - \int\limits_{t_0}^{t} \alpha(\Theta, \tau) d\tau, \; t_0 \le t \le \Theta,$$

которая абсолютно непрерывна и не возрастает, причем $h_\Theta(t_0) = 1$, а $h_\Theta(\Theta) \le 0$. Поэтому существует такой момент t_*, $t_* \in (t_0, \Theta]$, что $h_\Theta(t_*) = 0$.

Опишем способ управления первым игроком на «активном» участке $[t_0, t_*)$. Для этого рассмотрим многозначное отображение

$$U_{\Theta}(\tau, \upsilon) = \{u \in U(\tau) : \pi\, \Phi(\Theta, \tau)\varphi(\tau, u, \upsilon) -$$
$$-\gamma(\Theta, \tau) \in \alpha(\Theta, \tau)[M(\Theta) - \xi(t_0, z_0, \gamma(\Theta, \cdot))]\},$$
$$\upsilon \in V(\tau), \ \tau \in [t_0, \Theta]. \tag{14}$$

Отображение $U_{\Theta}(\tau, \upsilon)$ компактнозначно и в силу теоремы об обратном образе — $L \times B$-измеримо. Поэтому согласно теореме об измеримом выборе в этом отображении существует $L \times B$-измеримый селектор $u_{\Theta}(\tau, \upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Положим $u_{\Theta}(\tau) = u_{\Theta}(\tau, \upsilon(\tau))$ и выберем его в качестве управления первого игрока на интервале $[t_0, t_*)$.

Пусть $\alpha(\Theta, \tau) = 0$, $\tau \in [t_*, \Theta]$. Тогда из соотношения (14) получим многозначное отображение

$$U_{\Theta}^{0}(\tau, \upsilon) = \{u \in U(\tau) : \pi\, \Phi(\Theta, \tau)\varphi(\tau, u, \upsilon) - \gamma(\Theta, \tau) = 0\}, \tag{15}$$

которое является компактнозначным и $L \times B$-измеримым. Поэтому существует $L \times B$-измеримый селектор $u_{\Theta}^{0}(\tau, \upsilon)$. Управление первого игрока на пассивном участке выберем равным $u_{\Theta}^{0}(\tau) = u_{\Theta}^{0}(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [t_*, \Theta]$. В случае $\xi(t_0, z_0, \Theta, \gamma(\Theta, \cdot)) \in M(\Theta)$ управление первого игрока на всем промежутке $[t_0, \Theta]$ выберем в виде $u_{\Theta}^{0}(\tau)$.

Если первый игрок будет придерживаться указанных правил выбора управления, то игра (1)–(3) будет закончена в момент Θ при любом противодействии второго игрока. Покажем это.

Рассмотрим случай $\xi(t_0, z_0, \Theta, \gamma(\Theta, \cdot)) \overline{\in} M(\Theta)$. Из формулы Коши и соотношений (14), (15) вытекает включение

$$\pi z(\Theta) \in \xi(t_0, z_0, \Theta, \gamma(\Theta, \cdot))[1 - \int_{t_0}^{t_*} \alpha(\Theta, \tau) d\tau] + \int_{t_0}^{t_*} \alpha(\Theta, \tau)\, M(\Theta) d\tau.$$

Учитывая равенства $\int_{t_0}^{t_*} \alpha(\Theta, \tau) d\tau = 1$, $\int_{t_0}^{t_*} \alpha(\Theta, \tau) M(\Theta) d\tau = M(\Theta)$, имеем $\pi z(\Theta) \in M(\Theta)$.

При $\xi(t_0, z_0, \Theta, \gamma(\Theta, \cdot)) \in M(\Theta)$ непосредственно получим такое же включение из формулы Коши согласно закону выбора управления первого игрока. При условии, что $\Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot))$ — замкнутое множество полуоси R_+, введем обозначение $\Theta_{\min}(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)) = \min\{t \geq t_0 : t \in \Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot))\}$.

Утверждение 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) выполнено условие Понтрягина.

Тогда для любого начального состояния (t_0, z_0) и выбранного согласно схеме метода селектора $\gamma(\cdot, \cdot)$ имеет место неравенство

$$\alpha(t, \tau) \leq \alpha_*(t, \tau), \ t_0 \leq \tau \leq t < +\infty. \tag{16}$$

Если при этом выполнено условие 1, то значения функций $\alpha(t, \tau)$ и $\alpha_*(t, \tau)$ совпадают.

Доказательство. Очевидно, что рассматриваемые функции имеют вид

$$\alpha_*(t, \tau) = \inf_{\upsilon \in V(\tau)} \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)\},$$
$$\alpha(t, \tau) = \sup\left\{\alpha : \alpha \in \bigcap_{\upsilon \in V(\tau)} \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)\right\}, \ t_0 \leq \tau \leq t < +\infty.$$

В случае $\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t,\cdot)) \in M(t)$ имеем

$$\alpha(t,\tau) = \alpha_*(t,\tau) \equiv +\infty, \; t_0 \le \tau \le t.$$

Поэтому будем рассматривать лишь случай $\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t,\cdot)) \overline{\in} M(t)$. При этом отметим, что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ является отображением с замкнутыми образами, а в данном случае и компактнозначным.

Обозначим $\alpha = \alpha(t,\tau)$. Тогда поскольку отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ является компактнозначным, а $V(\tau) \in K(R^n)$ для $\tau \ge t_0$, то и отображение $\mathfrak{A}(t,\tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} \mathfrak{A}(t,\tau,v)$

является компактнозначным. Поэтому $\alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)$ для каждого $v \in V(\tau)$. Отсюда вытекает, что $\alpha \le \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\} \; \forall v \in V(\tau)$,
а значит,

$$\alpha \le \inf_{v \in V(\tau)} \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\}.$$

Таким образом, доказано неравенство (16).

Возвратимся ко второй части утверждения. Условие 1 означает, что

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = [0, \alpha(t,\tau,v)], \; v \in V(\tau), \; t_0 \le \tau \le t < +\infty.$$

При этом условии докажем неравенство $\alpha_*(t,\tau) \le \alpha(t,\tau)$, $t_0 \le \tau \le t < +\infty$. Действительно, обозначив $\alpha_* = \alpha_*(t,\tau)$, получим $\alpha_* \in \mathfrak{A}(t,\tau,v) \; \forall v \in V(\tau)$, а значит, $\alpha_* \in \mathfrak{A}(t,\tau)$ и соответственно $\alpha_* \le \alpha(t,\tau)$.

Следствие 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) выполнено условие Понтрягина.

Тогда для любого начального состояния (t_0, z_0) и селектора $\{\gamma(\cdot,\cdot)$ имеют место соотношения

$$\Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \subset T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)), \tag{17}$$

$$t_{\min}(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \le \Theta_{\min}(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)).$$

Если выполнено дополнительное условие 1 выпуклозначности отображения $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$, то в соотношениях (17) неравенство для чисел переходит в равенство, а включение для множеств становится поточечным равенством.

Замечание 3. Условие выпуклозначности отображения $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$, $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, эквивалентно условию связности его образов или звездности образов относительно нуля. Одним из достаточных условий его выполнения есть звездность относительно нуля, $0 \in L$, многозначного отображения $W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)$, $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, по одному из лучей конуса $\operatorname{con}[M(t) - \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t,\cdot))]$.

Пример 1. Рассмотрим простое движение в плоскости с не зависящими от t параметрами:

$$\dot z = u - v, \; z \in R^2, \; U(t) = \{u : \|u\| \le 2\} \cup \{u : 3 \le \|u\| \le 4\} = U,$$

$$V(t) = \{v : \|v\| \le 2\}, \; M^*(t) = M(t) = M_0 = \{0\}, \; t \ge t_0 = 0.$$

Здесь очевидно, что $A(t) = 0$, $L = R^2$, а $\pi = E$ — оператор тождественного преобразования, который задается единичной матрицей. Тогда $W(t,\tau) = \{0\}$, $0 \le \tau \le t < +\infty$, и условие Понтрягина выполнено. Автоматически имеем $\gamma(t,\tau) = 0$, $0 \le \tau \le t < +\infty$. Пусть $z_0 = (0, -5)$, тогда

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \{\alpha \ge 0 : -\alpha z_0 \in U - v\} = \mathfrak{A}(v).$$

Поскольку отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ принимает числовые значения из R_+ и не зависит от t и τ, то нетрудно вычислить, что при $\upsilon(0,0)$ $\quad \mathfrak{A}(\upsilon)=[0;\ 2/5]\cup[3/5;\ 4/5]$,

при $\upsilon=(0,-2)$ $\quad \mathfrak{A}(\upsilon)=\{0\}\cup[1/5;\ 2/5]$,

при $\upsilon=(0,2)$ $\quad \mathfrak{A}(\upsilon)=[0;4/5]\cup[1;\ 6/5]$,

при $\upsilon=(-2,0)$, $\upsilon=(2,0)$ $\quad \mathfrak{A}(\upsilon)=\{0\}\cup[\sqrt{5}/5;\ 2\sqrt{3}/5]$.

На основании этих значений можно сделать вывод, что $\mathfrak{A}(t,\tau)=\{0\}$ и соответственно $\alpha(t,\tau)=0$, $0\le\tau\le t<+\infty$, а $\alpha_*(t,\tau)=2/5$, $0\le\tau\le t<+\infty$. Значит, $\Theta(0,z_0,0)=\varnothing$, а $T(0,z_0,0)=\{t: t\ge 5/2\}$. В силу симметрии областей управления относительно нуля можно заключить, что $\Theta(0,z_0,0)=\varnothing$, $T(0,z_0,0)=\{t: t\ge \|z_0\|/2\}$ для всех z_0, $z_0\ne 0$.

В этом примере отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ не является выпуклозначным и поэтому игра не может быть закончена за конечное фиксированное время с помощью стробоскопических стратегий ни из одной точки z_0, $z_0\ne 0$, несмотря на выполнение условия Понтрягина. С учетом предыстории управления убегающего, т.е. квазистратегий, наоборот, можно закончить игру за фиксированное время из любых начальных состояний.

2. ЯВНЫЙ ВИД РАЗРЕШАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Анализируя схему метода разрешающих функций, легко увидеть, что для определения времени окончания динамической игры сближения (1)–(3) и построения закона управления первого игрока типа (7) необходимо знать разрешающую функцию $\alpha(t,\tau,\upsilon)$. Средства выпуклого анализа дают возможность при определенных допущениях относительно параметров конфликтно-управляемого процесса найти ее в явном виде с учетом соотношений (4), (5).

Рассмотрим вначале случай выпуклых параметров конфликтно-управляемого процесса с целью использования аппарата опорных функций.

Лемма 1. Пусть для игровой задачи (1)–(3) выполнено условие Понтрягина, а многозначные отображения $M(t)$ и $W(t,\tau,\upsilon)$, $\upsilon\in V(\tau)$, $t_0\le\tau\le t$, являются выпуклозначными. Тогда при $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\,\overline{\in}\, M(t)$

$$\alpha(t,\tau,\upsilon)=\inf_{p\in P(t)}\{C(W(t,\tau,\upsilon);\,p)-(\gamma(t,\tau),\,p)\},\tag{18}$$

где

$$P(t)=\{p\in L: C(M(t);-p)+(\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot)),\,p)=-1\}.\tag{19}$$

Доказательство. Непустота пересечения в выражении (4) для разрешающей функции $\alpha(t,\tau,\upsilon)$ в силу замкнутости и выпуклости множеств, которые используются в пересечении, на языке опорных функций при условии $\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))\,\overline{\in}\, M(t)$ эквивалентна неравенству

$$C(W(t,\tau,\upsilon);\rho)-(\gamma(t,\tau),\rho)+\alpha[C(M(t);-\rho)+(\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot)),\rho)]\ge 0\quad\forall\rho\in L.$$

При этом учитывается, что в случае пересечения двух множеств нуль принадлежит их алгебраической разности. Иначе говоря,

$$-\alpha[C(M(t);-\rho)+(\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot)),\rho)]\le C(W(t,\tau,\upsilon);\rho)-(\gamma(t,\tau),\rho)\quad\forall\rho\in L.\tag{20}$$

Правая часть последнего неравенства неотрицательна для всех $\rho\in L$ в силу условия Понтрягина и надлежащего выбора селектора $\gamma(t,\tau)$. Поэтому если $C(M(t);-\rho)+(\xi(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot)),\rho)\ge 0$, то для любого $\alpha\ge 0$ неравенство (20) выполнено автоматически. Нормируя p с помощью равенства (19), из неравенства (20) получим формулу (18).

Следующее утверждение дает простой способ для нахождения разрешающей функции.

Лемма 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1)–(3) многозначные отображения $W(t, \tau, v)$ и $M(t)$ шарообразны, т.е.

$$W(t, \tau, v) = r_1(t, \tau)S - r_2(t, \tau)v \,, \; M(t) = m(t)S \,,$$

где S — единичный шар с центром в нуле; $r_1(t, \tau)$, $r_2(t, \tau)$ — измеримые по τ числовые функции, $t \ge \tau \ge t_0$, $v \in S$, причем $r_1(t, \tau) \ge r_2(t, \tau)$, а $\gamma(t, \tau)$ — измеримый по τ селектор многозначного отображения $(r_1(t, \tau) - r_2(t, \tau))S$.

Тогда при $\| \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)) \| > m(t)$ разрешающая функция $\alpha(t, \tau, v)$ является бóльшим положительным корнем квадратного уравнения

$$\| r_2(t, \tau)v + \gamma(t, \tau) - \alpha\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)) \| = r_1(t, \tau) + \alpha m(t) \,, \; t \ge \tau \ge t_0 \,, \; v \in S \,,$$

относительно α, $\alpha \ge 0$.

Доказательство. Из представления (4) при условиях леммы имеем

$$\{r_1(t, \tau)S - r_2(t, \tau)v - \gamma(t, \tau)\} \cap \alpha\{m(t)S - \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot))\} \neq \varnothing,$$
$$t \ge \tau \ge t_0, \; v \in S.$$

Непустота пересечения эквивалентна включению

$$r_2(t, \tau)v + \gamma(t, \tau) - \alpha\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)) \in (r_1(t, \tau) + \alpha m(t))S \,.$$

Наибольшее значение α будем иметь тогда, когда вектор слева попадет на границу шара переменного радиуса, т.е. когда

$$\| r_2(t, \tau)v + \gamma(t, \tau) - \alpha\xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)) \| = (r_1(t, \tau) + \alpha m(t)) \,, \; t \ge \tau \ge t_0, \; v \in S \,.$$

Если $\| \xi(t_0, z_0, t, \gamma(t, \cdot)) \| \le m(t)$, то очевидно, что

$$\alpha(t, \tau, v) \equiv +\infty, \; t \ge \tau \ge t_0, \; v \in S \,.$$

3. СЛУЧАЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО БЛОКА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим динамический процесс

$$\dot{z} = A(t)z + \int_{t_0}^{t} B(t, s)\varphi(s, u(s), v(s))ds \,, \tag{21}$$
$$u(s) \in U(s) \,, \; v(s) \in V(s) \,, \; z(t_0) = z_0, \; t \ge t_0,$$

где $z \in R^n$, матричная функция $B(t, s)$ измерима по t и суммируема по s для каждого конечного $t \in R_+$. Матричная функция $A(t)$, блок управления $\varphi(t, u, v)$ и многозначные отображения $U(t)$, $V(t)$ удовлетворяют условиям разд. 1, а терминальное множество $M^*(t)$ имеет вид (3).

Для процесса (21) и терминального множества (3) ставится задача сближения за некоторое гарантированное время в классе квази- и стробоскопических стратегий. Нетрудно видеть, что если $B(t, s) = \delta(t - s)E$, где $\delta(t - s)$ — дельта-функция Дирака, а E — единичная матрица, то уравнение (21) переходит в уравнение (1).

Лемма 3. При выбранных допустимых управлениях игроков решение системы (21) может быть представлено в виде аналога формулы Коши

$$z(t) = \Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} C(t, s)\varphi(s, u(s), v(s))ds \,, \tag{22}$$

где

$$C(t, s) = \int_{s}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau, s)d\tau \,,$$

$\Phi(t, \tau)$ — переходная матрица однородной системы (21).

Доказательство. Применив формулу Коши (4) к системе (21), получим

$$z(t)=\Phi(t,t_0)z_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\int_{t_0}^{\tau}B(\tau,s)\varphi(s,u(s),\upsilon(s))dsd\tau\,.$$

Изменив порядок интегрирования, согласно формулы Дирихле имеем

$$z(t)=\Phi(t,t_0)z_0+\int_{t_0}^{t}(\int_{s}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau,s)d\tau)\varphi(s,u(s),\upsilon(s))ds\,,$$

отсюда вытекает формула (22).

Применим к игровой задаче (21), (3) метод разрешающих функций, изложенный в разд. 1, базируясь при этом на представлении решения системы (21) в виде формулы (22). Для этого рассмотрим многозначные отображения

$$W_C(t,\tau,\upsilon)=\pi C(t,\tau)\varphi(\tau,U(\tau),\upsilon)\,,\ W_C(t,\tau)=\bigcap_{\upsilon\in V(\tau)}W_C(t,\tau,\upsilon)\,,\ t\geq\tau\geq t_0.$$

Будем считать выполненным аналог условия Понтрягина

$$W_C(t,\tau)\neq\varnothing\ \ \forall t\geq\tau\geq t_0\,. \tag{23}$$

Поскольку отображение $W_C(t,\tau)$ является измеримым по τ и замкнутозначным, то по теореме об измеримом выборе в нем существует измеримый по τ селектор $\gamma_C(t,\tau)$. Зафиксируем его и обозначим

$$\xi_C(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))=\pi\Phi(t,t_0)+\int_{t_0}^{t}\gamma_C(t,\tau)d\tau\,.$$

Введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}_C(t,\tau,\upsilon)=$$
$$=\{\alpha\geq 0:[W_C(t,\tau,\upsilon)-\gamma_C(t,\tau)]\cap\alpha[M(t)-\xi_C(t_0,z_0,t,\gamma(t,\cdot))]\neq\varnothing\} \tag{24}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\alpha_C(t,\tau,\upsilon)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}_C(t,\tau,\upsilon)\}\,. \tag{25}$$

Они имеют те же свойства, что и отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ и функция $\alpha(t,\tau,\upsilon)$, введенные в разд. 1.

Рассмотрим множество

$$T_C(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\geq t_0:\inf_{\upsilon(\cdot)\in\Omega_E}\int_{t_0}^{t}\alpha_C(t,\tau,\upsilon(\tau))d\tau\geq 1\}$$

и в случае его замкнутости числовую функцию

$$t_C(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\min\{t:t\in T_C(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\}\,.$$

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса с интегральным блоком управления (21), (3) выполнено условие (23) и многозначное отображение $M(t)$ является выпуклозначным.

Тогда если для заданного начального состояния (t_0,z_0) существует такой измеримый по τ селектор $\gamma_C(t,\tau)$, $t_0\leq\tau\leq t<+\infty$, многозначного отображения $W_C(t,\tau)$, что $T_C(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\neq\varnothing$ и $T_C\in T_C(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))$, то траектория процесса (21) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент T_C с помощью управления, которое назначается некоторой квазистратегией.

Если для момента T_C, отображения $\mathfrak{A}_C(T_C, \tau, v)$ и функции $\alpha_C(T_C, \tau, v)$ дополнительно выполнены условия 1, 2, то этот же результат может быть достигнут с помощью контруправлений.

Доказательство проводится аналогично доказательствам теорем 1 и 2.

Замечание 4. Для конфликтно-управляемого процесса (21), (3) остается справедливым аналог теоремы 3, где в модифицированной схеме фигурируют момент T_C, многозначное отображение

$$\mathfrak{A}_C(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} \mathfrak{A}_C(t, \tau, v),$$

его опорная функция в направлении +1

$$\alpha_C(t, \tau) = \sup\{\alpha \geq 0 : \alpha \in \mathfrak{A}_C(t, \tau)\}$$

и множество

$$\Theta_C(t_0, z_0, \gamma_C(\cdot, \cdot)) = \{t \geq t_0 : \int_{t_0}^{t} \alpha_C(t, \tau) d\tau \geq 1\}.$$

Для иллюстрации приведем простой пример.

Пример 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (21), (3)

$$A(t) \equiv 0, \ B(t, s) \equiv E, \ \varphi(t, u, v) = u - v,$$

$$M^*(t) = M_0 = M(t) = \{0\}, \ U(t) = aS, \ a > 1,$$

$$V(t) = S, \ t_0 = 0.$$

Таким образом, траекторию процесса

$$\dot{z} = \int_0^t (u(s) - v(s)) ds, \ u \in aS, \ v \in S, \tag{26}$$

необходимо привести в начало координат за конечное время.

В данном случае $L = R^n$, а ортопроектор π является оператором тождественного преобразования и задается единичной матрицей E. В свою очередь, поскольку $A(t) \equiv 0$, то $\Phi(t, \tau) = E$, $t \geq \tau \geq 0$, а значит,

$$C(t, s) = (t - s)E, \ 0 \leq s \leq t.$$

Многозначные отображения

$$W_C(t, s, v) = (t - s)(aS - v), \ W_C(t, s) = (t - s)(a - 1)S, \ t \geq s \geq 0,$$

и условие Понтрягина (23) выполнены, поскольку $a > 1$.

В силу того, что $0 \in W_C(t, s)$, $t \geq s \geq 0$, положим $\gamma_C(t, s) \equiv 0$. Тогда из формул (24) и (25) с использованием леммы 2 получим, что разрешающая функция $\alpha_C(t, \tau, v)$ является бо́льшим положительным корнем квадратного уравнения

$$\| (t - s)v - \alpha z \| = (t - s)a$$

относительно α и имеет вид

$$\alpha_C(t, s, v) = (t - s)\alpha(z, v),$$

где

$$\alpha(z, v) = \frac{(z, v) + \sqrt{(z, v)^2 + \|z\|^2 (a^2 - \|v\|^2)}}{\|z\|^2}, \ t \geq s \geq 0.$$

Из геометрических соображений легко видеть, что минимум функции $\alpha_C(t,s,v)$ по v на S достигается на элементе $v = -\dfrac{z}{\|z\|}$ и

$$\min_{\|v\|\le 1} \alpha_C(t,s,v) = \frac{(t-s)(a-1)}{\|z\|}.$$

Поскольку функция $\alpha_C(t,s,v)$ непрерывна по t, то момент $t_C(0,z,0)$ является корнем уравнения

$$\int_0^t (t-s)\frac{a-1}{\|z\|}\,ds = 1$$

и имеет вид

$$t_C = t_C(0,z,0) = \left(\frac{2\|z\|}{a-1}\right)^{1/2},$$

где z — произвольное начальное состояние процесса (26).

Заметим [5], что в случае простых движений $\dot z = u - v$, $u \in aS$, $v \in S$, без интегрального блока управления, но с теми же параметрами процесса, что и в данном примере, время попадания в начало координат определяется выражением

$$t_{\min} = t_{\min}(0,z,0) = \frac{\|z\|}{a-1}.$$

Время t_C и время $t_{\min}$ существенно отличаются между собой и зависят от $\|z\|$ и a.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита схема метода разрешающих функций для нестационарных квазилинейных систем с переменными областями управлений и терминальным множеством. Даны достаточные условия завершения игры в классе квази- и стробоскопических стратегий. Изучены различные схемы метода, приведено сравнение гарантированных времен, в частности рассмотрены процессы с интегральным блоком управления. Результаты иллюстрируются на модельних примерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — Т. 2. — 576 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. – 420 с.
3. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — К.: Наук. думка, 1992. — 260 с.
4. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 65 с.
5. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 424 p.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. – 288 с.
7. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. – 480 с.
8. Siouris G.M. Missile guidance and control systems. — New York: Springer-Verlag, 2004. — 666 p.
9. Локк А.С. Управление снарядами. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. — 775 с.
10. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: МГУ, 1980. — 198 с.
11. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Удмурт. ун-т, 2009. — 266 с.

12. Чикрий Ал.А. О проблеме группового преследования // Докл. НАН Украины. — 1997. — № 6. — С. 28–32.

13. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. — К.: Наук. думка, 2005. — 220 с.

14. Control of fractional-order dynamic systems under uncertainty / A.A. Chikrii, I.I. Matychyn, K. Gromaszek, A. Smolarz // Modelling and Optimization / Ed. by J. Sikora.— Lublin: Publ. Lublin Univ. of Technology (Poland), 2011. — P. 3–56.

15. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики Ур. отд. РАН, 2009. — **15**, № 4. — С. 290–301.

16. Онопчук Ю.Н., Чикрий Ал.А. Об одной игровой задаче сближения при отказе управляющих устройств // Матеріали XIII Міжнар. наук. конф. з автоматич. управління «Автоматика-2006» (25–28 верес. 2006 р.). — Вінниця: ВНТУ, 2006. — С. 34.

17. Чикрий Ал.А. О нестационарной задаче преследования // Теория оптимальных решений. — 1995. — С. 34–39.

18. Чикрий Ал.А. Об одном классе нестационарных задач преследования // Проблемы управления и информатики. — 1995. — № 4. — С. 64–74.

19. Онопчук Ю.Н., Чикрий Ал.А. Нестационарные процессы управления движением в условиях неопределенности // Теория оптимальных решений. — 2008. — № 7. — С. 17–24.

20. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИ РАН им. В.А. Стеклова. — 2010. — **271.** — С. 76–92.

21. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 4. — С. 40–64.

22 Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.

23. Чикрій О.А. Нестаціонарні процеси керування в умовах невизначеності: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук / ІК ім. В.М. Глушкова НАНУ. — Київ, 2010. — 156 с.

24. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.

25. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. — Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1999. — 409 с.

26. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.

27. Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 235 с.

28. Морозов В.М., Калёнова В.И. Оценивание и управление в нестационарных линейных системах. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 144 с.

29. Hajek O. Pursuit games. — New York: Acad. Press, 1975. — **12.** — 266 p.

30. Чикрий А.А. Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Тр. Междунар. мат. центра им. С. Банаха, Варшава. — 1985. — **14.** — С. 81–107.

31. Siouris G. Aerospace anionics systems // A Modern Synthesis. — San Diego: Acad. Press, 1993. — 466 p.

Поступила 15.11.2012