УДК 519.21

Б.В. БОНДАРЕВ, О.Е. СОСНИЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ КЛАРКА. 1. ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Ключевые слова: *стохастический интеграл по пуассоновской мере, безарбитражность, (B,S)-рынок, вероятность неразорения.*

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на исключительную популярность модели Самуэльсона [1–3]:

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}, \qquad (1)$$

которая описывает эволюцию цены рискового актива (акции), где $W(t)$, $0 \le t \le T$, — стандартный винеровский процесс, однако, исходя из задач практики, вряд ли можно предполагать непрерывность изменения цен и нормальность логарифма отношения цен. Если первый факт не вызывает сомнений — цена акции меняется скачками, то второму факту следует уделить особое внимание.

В модели (1) «основным» является винеровский процесс, приращения которого имеют нормальное распределение. При этом отмечено [4], что на интервалах времени сравнительно небольшой длины (до трех недель) распределение приращений отлично от нормального. Первые публикации, в которых излагается это явление, появились в 1915 г. Результаты достаточно серьезного статистического анализа, подтверждающего отличие упомянутых распределений от нормального, были опубликованы М. Кендаллом в 1953 г. в работе [5]. Оказалось, что отмеченный феномен является всеобщим (см. [4]): ненормальность приращений проявляется на всех биржах независимо от объекта торговли. Отличие распределения приращений от нормального заключалось в том, что (см. [4]) в действительности наблюдалось заметно больше достаточно больших и достаточно малых по абсолютной величине приращений, чем их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Другими словами, наблюдаемые распределения приращений биржевых цен на интервалах времени умеренной длины являются более островершинными, чем нормальное распределение, имея заметно более «тяжелые хвосты». Следует отметить, что подобными свойствами обладают распределения, эксцесс которых положителен [6]. Поэтому винеровские процессы оказались отнюдь не бесспорными для построения моделей динамики биржевых цен.

Вместо основного винеровского процесса $W(t)$ П. Кларк [7, 8] для описания биржевых цен предложил использовать модель с основным процессом $W(Z(t))$, т.е. в качестве основного использовать подчиненный винеровский процесс, где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, а $Z(t)$ — процесс с неубывающими траекториями, начинающимися в нуле. Если в качестве $Z(t)$ взять процесс Пуассона с параметром λ, который не зависит от $W(t)$, то величина $W(Z(t))$ будет иметь положительный эксцесс. Действительно,

$$MW^2(Z(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} MW^2(k)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \lambda t,$$

$$MW^4(Z(t)) = \sum_{k=0}^{+\infty} MW^4(k)\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{+\infty} 3k^2\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = 3(\lambda t)^2 + 3\lambda t,$$

тогда коэффициент эксцесса [6] определяется формулой

$$\gamma_2 = \frac{MW^4(Z(t))}{[MW^2(Z(t))]^2} - 3 = \frac{3}{\lambda t} > 0, \tag{2}$$

что свидетельствует о большей, чем у нормального «островершинности» распределения. Из (2) , в частности, следует, что с ростом времени коэффициент эксцесса убывает, а наибольшая островершинность наблюдается при малых $t > 0$.

Таким образом, предложенная П. Кларком эволюция цены рискового актива, которая описывается моделью

$$S(t) = S(0)\exp\{ct + W(Z(t))\},$$

больше соответствует реальным данным, чем модель П. Самуэльсона. В данной статье модель, описывающая цену акции, имеет вид

$$\overline{S}(t) = S(0)\exp\{(\mu - \lambda[\sqrt{e} - 1])t + W(Z(t))\}. \tag{3}$$

Как будет показано ниже, модель (3) отличается от модели П. Кларка тем, что параметр $\mu > 0$, как и в модели П. Самуэльсона (1), имеет смысл локальной доходности.

Первоочередной задачей настоящей статьи является проверка модели (3) на безарбитражность [9]. В действительности безарбитражность этой модели следует из работы [10], однако в силу ограниченного доступа к этой работе и ввиду рассматриваемого случая как частного были сформулированы более понятные достаточные условия и приведено доказательство безарбитражности модели (3), которое фактически будет сведено к краткому повтору доказательства из [10] для рассматриваемого случая.

Второй вопрос в данной статье — построение оценки для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B,S)-рынке, в которой риск описывается стандартной моделью Крамера–Лундберга [11] при условии, что эволюция цены рискового актива описывается моделью (3).

1. БЕЗАРБИТРАЖНОСТЬ МОДЕЛИ П. КЛАРКА

Если $Z(t)$ — процесс Пуассона с параметром λ, не зависящий от $W(t)$, то процесс $W(Z(t))$ очевидно допускает представление

$$W(Z(t)) = \sum_{i=0}^{Z(t)} \xi_i, \tag{4}$$

где $\xi_0 = 0$, ξ_i, $i \geq 1$, — независимые $N(0,1)$-распределенные величины. В силу того, что для сложного процесса Пуассона справедливо [12, 13] представление

$$\sum_{i=0}^{Z(t)} \xi_i = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \widetilde{\nu}(d\alpha, ds) \tag{5}$$

в виде стохастического интеграла по пуассоновской мере $\nu(A, t)$, в данном случае

$$\mathrm{M}\nu(A, t) = \lambda t \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} d\alpha, \quad \widetilde{\nu}(A, t) = \nu(A, t) - \mathrm{M}\nu(A, t). \tag{6}$$

Как отмечалось, безарбитражность модели (3) следует из результатов работы [10]. Дадим краткое доказательство этого факта для нашего случая. Действительно, в $\{\xi_i\}$, $i \geq 1$, существует экспоненциальный момент

$$\mathrm{M}e^{\beta\xi} = e^{\beta^2/2} < \infty.$$

Пусть
$$\eta(t)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\nu(d\alpha, ds)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\tilde{\nu}(d\alpha, ds),$$
поскольку
$$\lambda\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha ds=0,$$
$$\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\nu(d\alpha, ds)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\tilde{\nu}(d\alpha, ds)+\lambda\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha ds,$$
введем процесс
$$\chi(t)=(\mu-\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[e^{\alpha}-1]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha)t+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\tilde{\nu}(d\alpha, ds).$$
Тогда процесс, описывающий эволюцию цены акции (3), примет вид
$$\bar{S}(t)=S(0)e^{\chi(t)}. \tag{7}$$
Из (7) с учетом обобщенной формулы Ито [14] имеем
$$d\bar{S}(t)=\bar{S}(t)[\mu dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[e^{\alpha}-1]\tilde{\nu}(d\alpha, dt)], \tag{8}$$
откуда
$$\frac{\bar{S}(t+\Delta t)-\bar{S}(t)}{\bar{S}(t)}=\mu\Delta t+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[e^{\alpha}-1]\tilde{\nu}(d\alpha,\Delta t),\ M\frac{\bar{S}(t+\Delta t)-\bar{S}(t)}{\bar{S}(t)\Delta t}=\mu,$$
т.е. $\mu>0$ — средняя локальная доходность рискового актива (акции).

Нетрудно заметить, что по исходной мере P процесс $\bar{S}(t)$ будет мартингалом лишь при $\mu=0$, т.е. безарбитражность (3) модели будет существовать лишь при нулевой доходности, что вполне естественно, но не соответствовать реальности, так как нет основания использовать такой актив. При этом хорошо известно [2], что для безарбитражности достаточно показать мартингальность процесса эволюции цены рискового актива по некоторой мере $\tilde{P}$, эквивалентной исходной мере P.

Найдем плотность перехода от меры P к мере $\tilde{P}$, согласно которой $S(0)e^{\chi(t)}$ будет мартингалом. Если такая плотность $\rho(t)$ существует, то модель (3) безарбитражна. Плотность $\rho(t)$ должна удовлетворять следующим трем условиям:

а) $\rho(t)>0$;

б) $\mathrm{M}\rho(t)=1$;

в) $\rho(t)$ — мартингал, т.е. $\mathrm{M}\{\rho(t)/\Im_0^s\}=\rho(s)$.

При подстановке $\rho(t)$ в обобщенную формулу Байеса [2] должно выполняться соотношение
$$\mathrm{M}_{\tilde{P}}(S(t)/\Im_0^s)=\frac{1}{\rho(s)}\mathrm{M}_P(\rho(t)S(t)/\Im_0^s)=S(s).$$

Определим плотность (см. [15]) виде $\rho(t)=\exp(\pi(t))$.

Воспользовавшись обобщенной формулой Ито [14], нетрудно убедиться, что если
$$\pi(t)=-\lambda[e^{\gamma^2/2}-1]t+\gamma\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha\tilde{\nu}(d\alpha, d\tau),$$
где $\tilde{\nu}(d\alpha, d\tau)$ — такая же центрированная мера, что и в $\chi(t)$, то процесс $\rho(t)=\exp(\pi(t))$ будет мартингалом.

Используя обобщенную формулу Байеса [2], получаем уравнение

$$\mathrm{M}_{\widetilde{P}}(\overline{S}(t)/\Im_0^s)=\frac{1}{\rho(s)}\mathrm{M}_P(\rho(t)\overline{S}(t)/\Im_0^s)=S(s)=$$
$$=S(0)\exp(-\pi(s))\mathrm{M}\{\exp(\pi(t)+\chi(t))/\Im_0^s\}=S(0)\exp(\chi(s))$$

или

$$\mathrm{M}\{\exp(\pi(t)+\chi(t))/\Im_0^s\}=\exp(\chi(s))\exp(\pi(s)).$$

Обозначим $\zeta(t)=\pi(t)+\chi(t)$, тогда $\mathrm{M}\{\exp(\zeta(t))/\Im_0^s\}=\exp(\zeta(s))$, т.е. процесс $\exp(\zeta(t))$ должен быть мартингалом.

Далее, если

$$\zeta(t)=\pi(t)+\chi(t)=(\mu-\lambda(\sqrt{e}+e^{\gamma^2/2}-2))t+(1+\gamma)\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha\widetilde{\nu}(d\alpha,d\tau),$$

снова, применив формулу Ито, получим

$$e^{\zeta(t)}=e^{\zeta(s)}+\int_s^t e^{\zeta(\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{[1+\gamma]\alpha}-1]\widetilde{\nu}(d\alpha,d\tau)+$$
$$+\int_s^t e^{\zeta(\tau)}[(\mu-\lambda[\sqrt{e}-1]+\lambda[e^{(1+\gamma)^2/2}-e^{\gamma^2/2}])]d\tau.$$

Чтобы процесс $e^{\zeta(t)}$ был мартингалом, достаточно использовать в качестве γ корень уравнения

$$\sqrt{e}-1-\frac{\mu}{\lambda}=e^{\frac{1}{2}+\gamma+\frac{\gamma^2}{2}}-e^{\frac{\gamma^2}{2}},$$

которое равносильно уравнению

$$(\sqrt{e}-1-\frac{\mu}{\lambda})e^{-\gamma^2/2}=e^{1/2+\gamma}-1. \qquad (9)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (9) всегда имеет единственный корень $\gamma_0<0$. Тогда процесс $\pi(t)$ примет конкретный вид:

$$\pi(t)=-\lambda[e^{\gamma_0^2/2}-1]+\gamma_0\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha\widetilde{\nu}(d\alpha,d\tau), \qquad (10)$$

мера $\widetilde{P}$, эквивалентная мере P, будет определена, а процесс $\overline{S}(t)$ будет мартингалом по этой мере. Безарбитражность модели (3) установлена.

2. ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ, РАБОТАЮЩЕЙ НА (B, S)-РЫНКЕ

Если инвестор вкладывает имеющиеся средства как в рисковые активы (например, в акции), так и в безрисковые (например, на банковский счет), то считают, что он оперирует на (B, S)-рынке. В качестве инвестора будет выступать страховая компания. Далее везде предполагаем, что величина банковского счета $B(t)$ изменяется согласно закону

$$dB(t)=rB(t)dt,$$

$B(0)$ — начальная величина счета. Цена рискового актива (акции) описывается процессом (3). Рассмотрим следующую задачу. Инвестор — страховая компания, начальный капитал которой $X(0)=x$, свой капитал $X(t)$ на момент времени t делит следующим образом: долю $0\le u\le 1$ откладывает на покупку акций, оставшуюся долю $0\le 1-u\le 1$ кладет на банковский счет. Тогда в денежном отношении это соответствует величинам $uX(t)$ и $(1-u)X(t)$. Если в момент времени t акция стоила $S(t)$, то на сумму $uX(t)$ можно купить $\frac{uX(t)}{S(t)}$ акций и положить $(1-u)X(t)$ на банковский счет. Тогда к моменту времени $t+\Delta t$ банковский счет будет составлять

$$(1-u)X(t)(1+r\Delta t), \tag{11}$$

цена каждой акции согласно модели (3) определяется формулой

$$\bar{S}(t+\Delta t) \approx \bar{S}(t)(1+\mu\Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha}-1]\tilde{\nu}(d\alpha, \Delta t)). \tag{12}$$

Таким образом, на момент времени $t+\Delta t$ от инвестиционной деятельности на (B, S)-рынке за счет пакета акций будем иметь сумму

$$\frac{uX(t)}{\bar{S}(t)}\bar{S}(t+\Delta t) = uX(t)[1+\mu\Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha}-1]\tilde{\nu}(d\alpha, \Delta t)] \tag{13}$$

и сумму $(1-u)X(t)(1+r\Delta t)$ за счет банковских вложений. Далее предположим, что скорость поступления премий в страховую компанию постоянна и равна $c>0$. Суммарный иск к страховой компании за время от t до $t+\Delta t$ описывается сложным пуассоновским процессом и определяется как

$$\Delta\zeta(t) = \sum_{k=N(t)}^{N(t+\Delta t)} \varsigma_k, \tag{14}$$

где $N(t)$ — стандартный процесс Пуассона с параметром $\lambda_0 > 0$, ς_k — независимые неотрицательные одинаково распределенные случайные величины, а также независимые от $N(t)$, которые описывают величины исков к страховой компании, принимают значения во множестве B, функция распределения которых $F(x)$. Известно (см., например, [13]), что величину $\sum_{k=0}^{N(t)} \varsigma_k$, $\varsigma_0 = 0$, можно представить в виде стохастического интеграла по пуассоновской мере, а именно имеет место представление

$$\sum_{k=0}^{N(t)} \varsigma_k = \int_0^t \int_B y\nu_0(dy, ds), \tag{15}$$

где $\nu_0(A, t)$ — пуассоновская мера такая, что

$$P\{\nu(A, t) = i\} = \frac{\left[\lambda_0 t \int_A dF(x)\right]^i}{i!} \exp\left\{-\lambda_0 t \int_A dF(x)\right\}, \ i = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

Здесь $F(x) = P\{\varsigma_k < x\}$, т.е. $\mathrm{M}\nu_0(A, t) = \lambda_0 t \int_A dF(x)$. Везде далее будем предполагать независимость меры $\nu_0(A, t)$ и процесса $W(Z(t))$.

С учетом (11), (13), (15) получим

$$X(t+\Delta t) \approx uX(t)[1+\mu\Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{\alpha}-1]\tilde{\nu}(d\alpha, \Delta t)] +$$
$$+(1-u)X(t)(1+r\Delta t) + c\Delta t - \int_B y\nu_0(dy, \Delta t), \tag{17}$$

где $\nu_0(A, \Delta t) = \nu_0(A, t+\Delta t) - \nu_0(A, t)$.

Из (17) имеем балансовое уравнение

$$dX(t) = X(t)[u\mu + (1-u)r - u\lambda(\sqrt{e}-1)]\,dt +$$
$$+uX(t)\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{\alpha}-1]\nu(d\alpha, dt) + c\,dt - \int_B y\nu_0(dy, dt)\,. \qquad (18)$$

Поставим следующую задачу: найти управление $0 \le u \le 1$ такое, чтобы вероятность неразорения страховой компании за неограниченное время была оценена величиной, которая стремится к единице при стремлении начального капитала x к бесконечности, и эта оценка должна быть наименьшей по $0 \le u \le 1$.

Будем находить решение (18) следующим образом. Пусть

$$\theta_t = \xi_t^0 X(t)\,, \qquad (19)$$

где

$$d\xi_t^0 = -\xi_t^0[u\mu + (1-u)r - u\lambda(\sqrt{e}-1)]dt - \xi_t^0\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha, t)\nu(d\alpha, dt),\ \xi_0^0 = 1\,, \qquad (20)$$

функция $Y(\alpha, t)$ будет соответствующим образом подобрана.

Используя формулу дифференцирования произведения [16, с. 133], получаем

$$d\theta_t = X(t)d\xi_t^0 + \xi_t^0 dX(t) - X(t)\xi_t^0\int_{-\infty}^{+\infty} u[e^{\alpha}-1]Y(\alpha, t)\nu(d\alpha, dt) =$$

$$= -X(t)\xi_t^0[u\mu + (1-u)r - u\lambda(\sqrt{e}-1)]dt - X(t)\xi_t^0\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha, t)\nu(d\alpha, dt) +$$

$$+\xi_t^0 X(t)[u\mu + (1-u)r - u\lambda(\sqrt{e}-1)]\,dt + \xi_t^0[c\,dt - \int_B y\nu_0(dy, dt)] +$$

$$+\xi_t^0 X(t)\int_{-\infty}^{+\infty} u[e^{\alpha}-1]\nu(d\alpha, dt) - X(t)\xi_t^0\int_{-\infty}^{+\infty} u[e^{\alpha}-1])Y(\alpha, t)\,\nu\,(d\alpha, dt) =$$

$$= \xi_t^0[c\,dt - \int_B y\nu_0(dy, dt)] +$$
$$+\xi_t^0 X(t)\int_{-\infty}^{+\infty}(u[e^{\alpha}-1] - u[e^{\alpha}-1]Y(\alpha, t) - Y(\alpha, t))\nu(d\alpha, dt) = \qquad (21)$$
$$= \xi_t^0[c\,dt - \int_B y\nu_0(dy, dt)]\,,$$

если

$$Y(\alpha, t) = \frac{u[e^{\alpha}-1]}{1+u[e^{\alpha}-1]}\,. \qquad (22)$$

Выбрав $Y(\alpha, t)$ из (22) и подставив в (20), получим уравнение

$$d\xi_t^0 = -\xi_t^0[u\mu + (1-u)r - u\lambda(\sqrt{e}-1)]dt - \xi_t^0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u[e^{\alpha}-1]}{1+u[e^{\alpha}-1]}\nu(d\alpha, dt),\ \xi_0^0 = 1\,, \qquad (23)$$

а

$$d\theta_t = \xi_t^0(c\,dt - \int_B y\nu_0(dy, dt))\,,\ \theta_0 = x\,. \qquad (24)$$

Таким образом,

$$X(t) = \frac{\theta_t}{\xi_t^0} = [\xi_t^0]^{-1}\left[x + \int_0^t \xi_s^0(c\,ds - \int_B y\nu_0(dy, ds))\right]. \qquad (25)$$

Формулу (25) можно записать в следующем виде. Поскольку

$$\mathrm{M}\nu_0(A,t)=\lambda_0 t\int\limits_A dF(x),$$

то, вводя центрированную мартингальную меру

$$\tilde{\nu}_0(A,t)=\nu_0(A,t)-\mathrm{M}\nu_0(A,t),$$

получим

$$X(t)=[\xi_t^0]^{-1}[x+\int\limits_0^t \xi_s^0((c-\lambda_0 a)ds-\int\limits_B y\tilde{\nu}_0(dy,ds))], \tag{26}$$

где $a=\int\limits_B ydF(y)$.

Из (23) следует

$$d[\xi_t^0]^{2m}=-2m[\xi_t^0]^{2m}[u\mu+(1-u)r-u\lambda(\sqrt{e}-1)]dt+$$

$$+[\xi_t^0]^{2m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+u[e^{\alpha}-1])^{2m}}-1\right]\nu(d\alpha,dt). \tag{27}$$

Из (27) вытекает

$$d\mathrm{M}[\xi_t^0]^{2m}=-2m\mathrm{M}[\xi_t^0]^{2m}[u\mu+(1-u)r-u\lambda(\sqrt{e}-1)]dt+$$

$$+\mathrm{M}[\xi_t^0]^{2m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+u[e^{\alpha}-1])^{2m}}-1\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}\lambda dt,\ \ \mathrm{M}[\xi_0^0]^{2m}=1, \tag{28}$$

откуда

$$\mathrm{M}[\bar{\xi}_s^0]^{2m}=\exp\{-2m[u\mu+(1-u)r-u\lambda(\sqrt{e}-1)]t+$$

$$+\lambda t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+u[e^{\alpha}-1])^{2m}}-1\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha\}. \tag{29}$$

Пусть

$$\psi(u)=[u\mu+(1-u)r-u\lambda(\sqrt{e}-1)]-$$

$$-\frac{\lambda}{2m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+u[e^{\alpha}-1])^{2m}}-1\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha,\ \ 0\le u\le 1. \tag{30}$$

Из (30) имеем

$$\psi(0)=r>0,\ \ \psi(1)=\mu-\lambda(\sqrt{e}-1)-\lambda e^{2m^2}+\frac{\lambda}{2m},$$

$$\psi'(u)=\mu-r-\lambda(\sqrt{e}-1)+\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[e^{\alpha}-1]}{(1+u[e^{\alpha}-1])^{2m+1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha, \tag{31}$$

$$\psi'(0)=\mu-r-\lambda(\sqrt{e}-1)+\lambda(\sqrt{e}-1)=\mu-r>0,$$

$$\psi''(u)=-(2m+1)\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[e^{\alpha}-1]^2}{(1+u[e^{\alpha}-1])^{2m+2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha^2/2}d\alpha<0.$$

Тогда: 1) если для выбранного $m>0$ имеем $\psi(1)\le 0$, то существует точка $u^*\in(0,\,1)$ такая, что $\psi'(u^*)=0$, и, следовательно, u^* является точкой максимума для функции $\psi(u)$ на промежутке $0\le u\le 1$; 2) если для взятого $m>0$ имеем $\psi(1)>0$ и $\psi(u^*)\ge\psi(1)>0$, то существует точка $u^*\in(0,\,1)$ такая, что $\psi'(u^*)=0$, и, следовательно, u^* является точкой максимума для функции $\psi(u)$ на промежутке $0\le u\le 1$; 3) если корень уравнения $\psi'(u^*)=0$ такой, что $u^*\ge 1$, то $\max\limits_{0\le u\le 1}\psi(u)=\psi(1)>0$.

Пусть

$$d=\max_{0\le u\le 1}\psi(u)=\psi(\bar u)>0\,,\; 0\le u^*<1\Rightarrow \bar u=u^*,\; u^*\ge 1\Rightarrow \bar u=1\,, \tag{32}$$

тогда из (29) и (32) следует, что

$$\mathrm{M}[\xi_t^0]^{2m}=\exp\{-2mdt\}\,. \tag{33}$$

Пусть

$$\bar\xi_t=\int_0^t\int_B \alpha\xi_s^0\tilde\nu_0(d\alpha,\,ds)\,,$$

где

$$\tilde\nu_0(A,\,t)=\nu_0(A,\,t)-\lambda_0 t\int_A dF(x)\,.$$

Здесь $\nu_0(A,\,t)$ есть пуассоновская мера со средним $\lambda_0 t\int_A dF(x)$.

В дальнейшем необходимо использовать следующий результат.

Теорема 1 (см. [11]). Пусть $\mu>r>0$, если для какого-то целого $m>0$

$$\int_B x^{2m}dF(x)<+\infty,\; \mathrm{M}[\xi_t^0]^{2m}\le\exp\{-2mdt\}\,,\; 0<d<+\infty\,,$$

то имеет место неравенство

$$\sup_{0\le\tau<+\infty}\mathrm{M}|\bar\xi_\tau|^{2m}\le b^{2m}\left(\frac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m\left[1+\sqrt{\frac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}, \tag{34}$$

где $b=\left[\int_B x^{2m}dF(x)\right]^{1/2m}$.

Нетрудно убедиться в том, что решением (23) является процесс

$$\xi_t^0=\exp\left\{-[u\mu+(1-u)\,r-u\lambda(\sqrt{e}-1)]\,t+\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(\frac{1}{1+u[e^\alpha-1]}\right)\nu(d\alpha,\,t)\right\}. \tag{35}$$

Из (35) следует, что процесс $\xi_t^0>0$ с вероятностью единица, а также имеет место оценка (33).

Далее при $c\ge a\lambda$ в силу положительности процесса ξ_t^0 с учетом неравенства (34) имеем

$$P\{X(t)>0,\;0\le t\le T\}=$$

$$=P\{[\xi_t^0]^{-1}\left[x+\int_0^t\xi_s^0((c-\lambda_0 a)ds-\int_B y\tilde\nu_0(dy,\,ds))\right]>0,\;0\le t\le T\}=$$

$$= P\left\{\left[x + \int_0^t \xi_s^0 ((c-\lambda_0 a)ds - \int_B y\tilde{\nu}_0(dy, ds))\right] > 0,\ 0 \le t \le T\right\} \ge$$

$$\ge P\left\{\left|\int_0^t \int_B \xi_s^0 y\tilde{\nu}_0(dy, ds)\right| < x + \int_0^t \xi_s^0 (c-\lambda_0 a)ds,\ 0 \le t \le T\right\} \ge$$

$$\ge P\left\{\left|\int_0^t \int_B \xi_s^0 y\tilde{\nu}_0(dy, ds)\right| < x,\ \ 0 \le t \le T\right\} =$$

$$= 1 - P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \int_B \xi_s^0 y\tilde{\nu}_0(dy, ds)\right| \ge x\right\} \ge 1 - \frac{\mathrm{M}\left[\int_0^T \int_B \xi_s^0 y\tilde{\nu}_0(dy, ds)\right]^{2m}}{x^{2m}} \ge$$

$$\ge 1 - \frac{1}{x^{2m}} b^{2m} \left(\frac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m \left[1 + \sqrt{\frac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}. \qquad (36)$$

В силу справедливости вложения

$$\{X(t) > 0,\ 0 \le t \le \alpha\} \supseteq \{X(t) > 0,\ 0 \le t \le \beta\},\ \alpha \le \beta,$$

имеем последовательность множеств, которые сужаются. Для такой последовательности существует предел $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \{X(t) > 0,\ 0 \le t \le \alpha\} = \{X(t) > 0,\ 0 \le t < +\infty\}$ и имеет место предельный переход

$$\lim_{\alpha\to+\infty} P\{X(t) > 0,\ 0 \le t \le \alpha\} = P\{\lim_{\alpha\to+\infty} \{X(t) > 0,\ \ 0 \le t \le \alpha\}\} = P\{X(t) > 0,$$

$$0 \le t < +\infty\}.$$

Переходя к пределу $T \to +\infty$, из (36) имеем

$$P\{X(t) > 0,\ t \in [0, +\infty)\} = \lim_{T\to+\infty} P\{X(t) > 0,\ 0 \le t \le T\} \ge \qquad (37)$$

$$\ge 1 - \frac{b^{2m}\left(\frac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m \left[1 + \sqrt{\frac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}.$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть $x > 0$ — начальный капитал страховой компании, функционирующей на (B, S)-рынке, на котором эволюция рискового актива описывается соотношением (3). Пусть $0 < r < \mu$, r — действующая процентная ставка, суммарные иски к страховой компании описываются сложным процессом Пуассона (15), где $\lambda_0 > 0$ — интенсивность стандартного процесса Пуассона $N(t)$, который описывает число исков, поступивших в страховую компанию за время $[0, t]$, $F(x) = P\{\varsigma_k < x\}$ ($0 < \varsigma_k$ — независимы один от другого и от $N(t)$ одинаково распределенные величины исков, имеющие конечные моменты $\mathrm{M}\varsigma_k^{2m} < +\infty$,

$b=(\mathrm{M}\varsigma_k^{2m})^{1/2m}$, $\mathrm{M}\varsigma_k = a$). В этом случае, если $0 \le \bar{u} \le 1$ такая, что $\psi(\bar{u}) = \max\limits_{0\le u \le 1} \psi(u) = d > 0$, при этом $\bar{u} \cdot 100\%$ денег вкладываются в акции, а остаток — на банковский счет, тогда для вероятности неразорения страховой компании справедлива оценка

$$P\{X(t)>0,\ t\in[0,+\infty)\} \ge 1 - \frac{b^{2m}\left(\dfrac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m \left[1+\sqrt{\dfrac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}. \quad (38)$$

Рассмотрим численный пример. Сравним вероятности неразорения при $\bar{u} = u^*$ и $\bar{u} = 0$, т.е. рассмотрим два случая: 1) компания работает на (B,S)-рынке, т.е. $\bar{u} \cdot 100\%$ денег вкладываются в акции, а остаток на банковский счет; 2) компания все средства вкладывает в банк. Из теоремы легко видеть, что чем меньше числитель в (38)

$$V = b^{2m}\left(\frac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m \left[1+\sqrt{\frac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}, \quad (39)$$

тем больше вероятность неразорения. Так, например, $\mu = 0.15$, $r = 0.12$, $\lambda_0 = 0.023$, $m = 2$. Тогда, воспользовавшись пакетом Maple, получим: 1) $u^* \approx 0.311$, $d \approx 0.1234$; 2) $u = 0$, $d = r = 0.12$. Подставим эти значения в (39) и получим

$$V_1 = b^{2m}\left(\frac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m \left[1+\sqrt{\frac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)} \approx 2.903 b^4,$$

$$V_2 = b^{2m}\left(\frac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m \left[1+\sqrt{\frac{2r}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)} \approx 2.941 b^4.$$

Откуда следует, что $V_2 > V_1 \Rightarrow P_2 < P_1$, где V_i, P_i — числитель и оценка вероятности неразорения для i-го случая соответственно. Следовательно, при оптимальном управлении компания, работающая на полном (B,S)-рынке (вложения как в рисковые, так и безрисковые активы), имеет вероятность неразорения большую, чем компания, которая вкладывает все средства только в безрисковые активы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье построена оценка для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B,S)-рынке, риск которой описывается стандартной моделью Крамера–Лундберга, если эволюция рискового актива описывается моделью (3). Также найдено оптимальное управление капиталом страховой компании, при котором вероятность неразорения страховой компании, которая вкладывает стредства как в рисковые, так и в безрисковые активы ((B,S)-рынок), больше, чем у компании, которая вкладывает все стредства только в безрисковые активы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing // Industr. Manag. Rev. — 1965. — **6**. — P. 13–31.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. — М.: Фазис, 1998. — Т. 1, 2. — 1056 с.
3. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. — М.: ГУ ВШЭ, 2001. — 260 с.
4. Королев В.Ю. Построение моделей распределений биржевых цен при помощи методов асимптотической теории случайного суммирования // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1997. — **4**, вып. 1. — С. 86–100.
5. Kendall M.G. The analysis of economic time-series. Part 1. Prices // J. Royal Statist. Soc. — 1953. — **96.** — P. 11–25.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник математика (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1968. — 720 с.
7. Clark P.K. A subordinated stochastic process model of cotton futures prices: Ph. D. Thesis. — Cambridge (Ma): Harvard Univ, 1970.
8. Clark P.K. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices // Econometrica. — 1973. — **41.** — P. 135–155.
9. Ross S.A. The arbitrage theory of capital asset pricing // J. Econ. Theory. — 1976. — **13**. — P. 341–360.
10. Бондарев Б.В, Смоляков А.И., Степанов Е.В. Об одной модели эволюции акции и соответствующей задаче Р. Мертона // Приклад. статистика. Актуар. та фінанс. математика. — 2004. — № 2. — С. 11–21.
11. Бондарєв Б.В., Баєв А.В. Про ймовірність банкрутства страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку // Теория вероятности и мат. статистика. — 2006. — № 74. — С. 10–22.
12. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів: Навч. посібник. — К.: Либідь, 1990. — 168 с.
13. Бондарев Б.В. Математические модели в страховании. — Донецк.: Апекс, 2002. — 114 с.
14. Гихман И.И. Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.
15. Merton R.C. Optimum consumption and portfolio rules in continuous — time model // J. Econom. Theory. — 1971. — **3.** — P. 373–413.
16. Стохастическое исчисление. Теория вероятностей-3. Итоги науки и техники / С.В. Анулова, А.Ю. Веретенников, Н.В. Крылов, Р.Ш. Липцер, А.Н Ширяев. Сер.: Современные проблемы математики. — М., 1989. — **45**. — С. 5–253.

Поступила 23.02.2012