УДК 519.21

С.В. АНТОНЮК, И.В. ДОРОШЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ С УЧЕТОМ МАРКОВСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Ключевые слова: *асимптотическая стохастическая устойчивость, марковский процесс, слабый инфинитезимальный оператор, стохастические дифференциально-функциональные уравнения.*

Пусть R^n — n-мерное действительное евклидово пространство и $1 \le p < \infty$. Пространство X является пространством предыстории, т.е. $R^n \times D_\rho^p$, где D_ρ^p — пространство измеримых функций таких, что

$$\int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s)\, ds < \infty . \tag{1}$$

Норма в пространстве X вводится следующим образом [1]:

$$\|\varphi\|_X = \left(|\varphi(0)|^p + \int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s)\, ds \right)^{1/p} \equiv (|\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_\rho^p)^{1/p}, \tag{2}$$

$$\|\varphi\|_\rho^p < \infty,\ 1 \le p < \infty .$$

Определение 1. Функция $\rho : R^+ \to R^+$ называется функцией сглаживающего типа, если удовлетворяет таким условиям:

1) ρ суммируемая в R^+;

2) $\forall z \ge 0$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \overline{K}(z) \equiv ess\sup_{s \in R^+} \frac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \le \overline{\overline{K}} < \infty, \\ \underline{K}(z) \equiv ess\sup_{s \in R^+} \frac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty; \end{gathered} \tag{3}$$

3) ρ ограниченна в R^+;

4) $\rho > 0$ строго положительная на $s \in (0, \infty)$;

5) $s\rho(s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Например, в качестве $\rho(s)$ можно анализировать функцию e^{-s}.

Рассмотрим на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{F}, P)$ с фильтрацией $\mathsf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ стохастическое дифференциально-функциональное уравнение с марковским параметром (СДФУсМП)

$$dx(t) = f(t, x^t, \xi(t))\, dt,\ t \ge t_0 \ge 0 , \tag{4}$$

при начальных условиях

$$x^t = \varphi^{t_0} , \tag{5}$$

где $\{\xi(t) \equiv \xi(t, \omega)\} : [0, +\infty) \times \Omega \to R^m$ — стохастически непрерывный однородный марковский процесс с непрерывными справа реализациями $y \in Y$, согласованный с фильтрацией F (Y — компактное фазовое пространство), $f : [t_0, \infty) \times \times X \times Y \to R^n$ — непрерывное отображение по всем аргументам, $x^t = (x(t), x_\rho^t)$, $x_\rho^t(s) \equiv \begin{cases} x(t-s), & t_0 \le s \le t, \\ \varphi(s-t), & s > t. \end{cases}$

Определение 2. Непрерывный по переменной $t \ge t_0$ n-мерный случайный процесс $x(t) \in R^n$ называется решением задачи (4), (5) на множестве $[t_0, T) \subset R^+$, если $x(t)$ измеримый относительно $\mathcal{F}_t$ при $t \le T$, $x^t \in X$ при $t \in [t_0, T]$, $x^{t_0} = \varphi^{t_0}$ с вероятностью 1 для всех $t \in [t_0, T]$ и одновременно выполняется равенство [2]

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x^s, \xi(s)) ds, \quad t \in [t_0, T]. \tag{6}$$

Если два сильных решения совпадают с вероятностью 1, то они называются стохастически эквивалентными. Будем говорить, что уравнение (4) имеет сильное решение при начальном условии (5), если все решения (6) стохастически эквивалентны.

Если $\xi(t_0) = y$, то для каждого $\varphi = x^0 \in X$, $s \ge 0$ введем обозначение $x^t(s, \varphi, y)$, $t \ge s$, как процесс предыстории, определенный по решению уравнения (1), построенного по начальному условию φ.

Теорема 1 [1]. Пусть функционал $f : [t_0, \infty) \times X \times Y \to R^n$ непрерывный по всем аргументам, а также выполняются:

• условие Липшица: существует постоянная $L > 0$ такая, что для всех $\varphi, \psi \in X$ и $\forall t \in [t_0, T]$ имеем $| f(t, \varphi, y) - f(t, \psi, y) | \le L \| \varphi - \psi \|_X$;

• условие равномерной ограниченности: существует постоянная $L > 0$ такая, что для $t \in [t_0, T]$ и для $\varphi \in X$

$$| f(t, \varphi, y) | \le L(\| \varphi \|_X + 1).$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (4), (5).

Определение 3. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ задачи (4), (5) назовем:

• стохастически устойчивым, если $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для $t_0 \ge 0$, $y \in Y$ выполняется неравенство

$$P\{\omega : \sup_{t \ge t_0} | x(t, t_0, \varphi, y) | \ge \varepsilon_1\} < \varepsilon_2 \tag{7}$$

как только $\| \varphi \|_X < \delta$;

• асимптотически стохастически устойчивым, если выполняется (7) и существует такое $\delta_1 > 0$, что для $t \ge s \ge 0$, $y \in Y$ и $\varphi \in S_{\delta_1} \equiv \{\varphi \in X \mid \| \varphi \|_X < \delta_1\}$

$$P\{\omega : \lim_{t \to \infty} | x^t(s, \varphi, y) | = 0\} = 1. \tag{8}$$

Пусть $\mathcal{M}_t^{s,\varphi} \equiv \sigma\{x(u) : s \le u \le t\}$ — полная σ-алгебра, построенная по решению $x(\cdot)$. Процесс $t \to x^t(s, \varphi)$ со значениями в X является измеримым, $\mathcal{M}_t^{s,\varphi}$ согласованным и непрерывным [1].

Определим слабый инфинитезимальный оператор для марковского процесса в пространстве X для непрерывных ограниченных функционалов $v : R^+ \times X \times Y \to R$, $v \in G(V)$.

Определение 4. Функционал $v(t, \varphi, y)$ принадлежит области определения слабого инфинитезимального оператора $\mathcal{L}$, если:

• в каждой точке $(s, \varphi, y) \in V$ существуют числа $\Delta > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\sup_{0<t\le\Delta} \frac{1}{t} | E\{v(t+s, x^{t+s}(s,\varphi,\ y),\ y(t))\} - v(s,\varphi,\ y) | \le c\,; \tag{9}$$

• в каждой точке $(s, \varphi, y) \in V$ существует граница

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} [E\{v(t+s, x^{t+s}(s,\varphi,\ y),\ y(t)\} - v(s,\varphi,\ y)] \equiv (\mathcal{L}v)(s,\varphi,\ y)\,. \tag{10}$$

Лемма [3]. Если Q — открытое множество в X, $v \in D(L)$, $\tau(t) \ge s$ — марковский момент времени (первый момент выхода из Q) для строгого марковского процесса $x^t(s,\varphi, y)$ такого, что $E\{\tau(t)\} < \infty$, то имеет место формула

$$E\{v(s+\tau(t), x^{s+\tau(t)}(s,\varphi,\ y),\ y(\tau(t)))\} =$$

$$= v(s,\varphi,\ y) + E\left\{ \int_0^{\tau(t)} (\mathcal{L}v)(s+z, x^{s+z}(s,\varphi,\ y),\ y(z))\,dz \right\} \tag{11}$$

при всех $s \ge 0$, $t \ge 0$, $\varphi \in Q$, где $\tau(t) \equiv \min\{\tau, t\}$, $\tau \equiv \inf\{z \in R^+ \mid x^{s+z}(s,\varphi, y) \in Q\}$.

Пусть $N \in \mathcal{N}, \tau_N$ — первый момент выхода с области $S_N \equiv \{\varphi \in X \mid \|\varphi\|_X\ N\}$.

Если при каждом $t > 0$ имеем $P\{\lim\limits_{N\to\infty} \tau_N(t) = t\} = 1$, то формулу (11) можно переписать в виде

$$E\{v(s+t, x^{s+t}(s,\varphi,\ y),\ y(t))\} =$$

$$= v(s,\varphi,\ y) + E\left\{ \int_0^{t} (\mathcal{L}v)(s+z, x^{s+z}(s,\varphi,\ y),\ y(z))\,dz \right\}. \tag{12}$$

Определение 5. Верхней производной Ляпунова назовем границу

$$\lim_{\Delta\downarrow 0} \sup_{0<t\le\Delta} \frac{1}{t} [E\{v(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,\ y),\ y(t))\} - v(s,\varphi,\ y)] \equiv (\widetilde{\mathcal{L}}v)(s,\varphi,\ y)\,,$$

если для всех достаточно малых $\Delta > 0$ в каждой окрестности $S_r \times Y$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Delta} | E\{v(s+\Delta, x^{s+\Delta}(s,\varphi,\ y),\ y(\Delta))\} - v(s,\varphi,\ y) | \le g_r(s,\varphi,\ y)\,,$$

где $g_r(s,\varphi, y)$ — непрерывная функция своих аргументов, ограниченная по φ в каждом S_r.

Определение 6. Если функционал $v : R^+ \times X \times Y \to R$ непрерывен по всем аргументам, $v \in D(\mathcal{L})$ (или $v \in D(\widetilde{\mathcal{L}})$) и удовлетворяет условиям

$$c_1 |\varphi(0)|^{p_1} \le v(s,\varphi,\ y) \le c_2 \|\varphi\|_X^{p_2} \tag{13}$$

для некоторых $c_1, c_2 > 0$, $p_2 \ge p_1 > 0$ и всех $s \in R^+$, $y \in Y$ и $\varphi \in X$, то такой функционал назовем функционалом Ляпунова–Красовского [2, 4, 5].

Поскольку далее нас будет интересовать решение задачи (4), (5) лишь до выхода из некоторого открытого множества, то достаточно предположить, что выполняется локальное условия Липшица и локальное условие равномерной ограниченности.

Теорема 2. Пусть:

1) выполнено локальное условие Липшица;

2) $f(t, 0, y) \equiv 0$;

3) существует функционал Ляпунова–Красовского $v: R^{+} \times X \times Y \to R$, для которого справедливая оценка (13) при $c_1, c_2 > 0,\ p_2 \geq p_1 > 0,\ s \in R^{+},\ y \in Y,\ \varphi \in X$;

4) при некоторых $c_3 > 0$ и $p \in (0, p_1]$ выполняется неравенство

$$(\widetilde{L}v)(s, \varphi, y) \leq -c_3 |\varphi(0)|^p \tag{14}$$

$\forall s \geq 0,\ y \in Y$ и $\varphi \in X$.

Тогда тривиальное решение задачи (4), (5) асимптотически стохастически устойчиво.

Доказательство. Пусть τ_r — момент первого выхода решения из области $S_r \equiv \{\varphi \in X \mid \|\varphi\|_X < r\}$. Тогда для произвольных $t \geq 0$ и $r > 0$ из формулы (12), учитывая определение функционала v, вытекает неравенство

$$c_1 E\{|x^{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y)|^p\} \leq E\{v(s+\tau_r(t), x^{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y), \xi(\tau_r(t))\} \leq$$

$$\leq v(s, \varphi, y) \leq c_1 \|\varphi\|_X^p.$$

Значит, $\lim\limits_{r\to\infty} \tau_r(t) = t$ и существует $E\{v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), \xi(t))\} < \infty$ для всех $t \geq 0,\ s \geq 0,\ y \in Y$ и $\varphi \in X$.

Пусть $\mathcal{F}_t$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все $\xi(s)$ при $s \in [0, t]$. Тогда $v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), y(t))$ будет $\mathcal{F}_t$-измеримым [1], а марковское свойство для произвольного $u \in [0, t]$ для условного математического ожидания [6] даст равенство

$$E\{v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), \xi(t))\big|_{\mathcal{F}_u}\} =$$

$$= E\{v(s_1 + (t-u), x^{s_1+(t-u)}(s, \psi, z), \xi(t-u))\}\Bigg|_{\substack{s_1 = s+u \\ z = \xi(u) \\ \psi = x^{s+u}(s, \varphi, y)}}.$$

Поэтому из неравенства (14) имеем ограниченность справа

$$E\{v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), \xi(t))\big|_{\mathcal{F}_u}\} \leq E\{v(s+u, x^{s+u}(s, \varphi, y), \xi(u))\},$$

т.е. $\{v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), \xi(t)), \mathcal{F}_t\}$ — неотрицательный супермартингал для $t \geq 0$ [6, 7]. Следовательно, существует граница $\lim\limits_{t\to\infty} v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), \xi(t)) = \eta(\omega) \geq 0$ с вероятностью 1.

Из неравенств (13), (14) легко получить оценки

$$E\{v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), \xi(t))\} \leq c_2 \|\varphi\|_X^p - c_3 \int_0^t E\{|x^{s+s_1}(s, \varphi, y)|^p\} ds_1 \leq$$

$$\leq c_2 \|\varphi\|_X^p - \frac{c_3}{c_1} \int_0^t E\{v(s+s_1, x^{s+s_1}(s, \varphi, y), \xi(s_1))\} ds_1,$$

что дает утверждение

$$E\{\eta(\omega)\} = \lim_{t\to\infty} E\{v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), \xi(t))\} \leq c_2 \|\varphi\|_X^p \lim_{t\to\infty} \exp\left(-\frac{c_3}{c_1} t\right) = 0,$$

а это означает, что с вероятностью 1 $\eta(\omega) = 0$, т.е. $P\{\omega : \eta(\omega) = 0\} = 1$.

Далее из основного неравенства для супермартингалов [7] вытекает следующая цепочка неравенств:

$$P\{\omega : \sup_{t \geq T} |x^{s+t}(s, \varphi, y)| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq P\left\{\omega : \sup_{t \geq T} \frac{1}{T} v(s+t, x^{s+t}(s, \varphi, y), \xi(t)) \geq \varepsilon^p \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1 \varepsilon^p} E\{v(s+T, x^{s+T}(s, \varphi, y), \xi(T))\} \leq \frac{c_2 \|\varphi\|_X^p}{c_1 \varepsilon^p} \exp\left(-\frac{c_3}{c_1} T\right)$$

для всех $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in X$, $s \geq 0$, $y \in Y$. При $T \to \infty$ получаем утверждение теоремы.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонюк С.В. Властивості розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з нескінченною післядією: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Чернівці, 2009. — 174 с.
2. Дорошенко І.В. Стійкість динамічних систем з післядією випадкової структури з врахуванням марковських збурень: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Київ, 2008. — 138 с.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с.
4. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Наука, 1969. — 212 с.
5. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
6. Дуб Дж.Л. Вероятносные процессы. — М.: Физматгиз, 1963. — 605 с.
7. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. — Berlin: Springer-Verlang, 1987. — 601 p.

Поступила 07.12.2011