ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2013

*ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА*

УДК 519.21

**Я. І. Єлейко, К. В. Косаревич**

# Одна некласична модель кількісної конкуренції на ринку в умовах двосторонньої невизначеності

*(Представлено академіком НАН України І. М. Коваленком)*

*Запропоновано модель конкурентної поведінки виробників з випадковими випусками при умові різнорідного характеру впливу невизначеності. Введено поняття двосторонньої невизначеності. Виділено клас розподілів випадкового випуску одного виробника, який гарантує існування та єдиність ситуації рівноваги при двосторонній невизначеності в побудованій моделі.*

Прийняття управлінських рішень супроводжується відсутністю точної, достовірної інформації, що створює ситуацію невизначеності [1]. Зокрема, дослідженню конкурентної поведінки виробників на ринку та пошуку ситуацій рівноваги при повній або частковій інформаційній невизначеності присвячено чимало фундаментальних робіт [2, 3]. Проте випадковий характер обставин, які обумовлюють невизначеність ситуації і призводять при кількісній конкуренції до випадкових випусків, необов'язково є однорідним для різних виробників. Саме тому при дослідженні вибору гравцями їх стратегій важливим є врахування власне характеру невизначеності. В зв'язку з цим у даній роботі розглядається некласична модель конкуренції виробників з призначенням випадкових випусків за умови різнорідної природи невизначеності.

Галузь економіки формують $n$ фірм-виробників однорідної продукції з об'ємами випусків $q_i$, $i = 1, \ldots, n$. Галузевий попит на товар задається однозначною функцією попиту $D\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Рішення про обсяг випуску приймається до того, як стане відомою ринкова ціна. Нехай $q = (q_i, i \in I)$ — вектор випуску товару. Ціна на ринку встановлюється таким чином, щоб фактична пропозиція товару $\sum\limits_{i\in I} q_i$ відповідала попиту на нього, тобто $p(q) = D^{-1}\Big(\sum\limits_{i\in I} q_i\Big)$. Нехай існує обсяг випуску $\overline{q}$ такий, що $p(q) = 0$, $\forall\, q \geqslant \overline{q}$, а функція $p(q)$ спадна, увігнута $\forall\, q \in (0, \overline{q})$, $p(q) > 0$, $p'(q) < 0$, $p''(q) < 0$, $\forall\, q \geqslant 0$.

*"Сильна" невизначеність.* Нехай випуск $q_1$ фірми 1 є випадковою величиною з деяким абсолютно неперервним розподілом на $[\gamma_0, \gamma]$, де $[\gamma_0, \gamma]$ — відрізок з нефіксованою верхньою межею, $\gamma_0 = \mathrm{const}$, $\gamma$ набуває значень з множини $[\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}]$, $\gamma^{(2)} > \gamma^{(1)} > \gamma_0$. Поведінка фірми 1 орієнтована на пошук стратегії $Eq_1$, яка максимізує сподіване значення

прибутку $\Pi_1(q) = q_1 D^{-1}\Big(\sum\limits_{i\in I} q_i\Big) - cq_1$, де $c$ — витрати на виготовлення одиниці продукції, $c = \text{const}$. При нефіксованому $\gamma$ $Eq_1 \colon [\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}] \to S_1$, $S_1 \subseteq [\gamma_0, \gamma]$, тобто стратегія $Eq_1$ фірми 1 є функцією, що набуває значень з деякої компактної множини, $E(\cdot)$ — оператор математичного сподівання. Таким чином, фірма 1 розв'язує задачу максимізації $E\Pi_1(Eq_1) = E\Big(q_1 D^{-1}\Big(\sum\limits_{i\in I} q_i\Big)\Big) - E(cq_1)$ на множині $S_1$ всеможливих значень функції $Eq_1(\gamma)$. Надалі будемо говорити, що фірма 1 приймає рішення в умовах "сильної" невизначеності.

*"Слабка" невизначеність.* Решта учасників ринку визначаються з цільовим обсягом продукції $q_i^0$, $i = 2,\ldots,n$, причому $c_i^1 q_i^0$ — витрати на закупівлю матеріалів або засобів для виготовлення запланованого обсягу. Однак протягом виробничого процесу під впливом випадкової природи середовища, в якому фірми приймають рішення, цільовий обсяг випуску $q_i^0$ кожного $i$-го учасника ринку корегується деякими випадковими величинами $\eta_i$, $i = 2,\ldots,n$, зі сталими середнім та дисперсією, $E\eta_i = \mu_i > 0$ та $D\eta_i = \sigma^2$, $i = 2,\ldots,n$, відповідно. Таким чином, відбувається відхилення виробників $2,\ldots,n$ від запланованого обсягу випуску $q_i^0$ до фактичного випадкового $q_i = \eta_i q_i^0$ з витратами $c_i^2 q_i$ на виготовлення останнього. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що фірми $2,\ldots,n$ мають однакові закупівельні спроможності, тобто $c_i^1 = c_1$, $c_i^2 = c_2$, $i = 2,\ldots,n$. Поведінка фірм $2,\ldots,n$ визначається призначенням рівня цільового випуску $q_i^0 > 0$ такого, що максимізує сподіване значення прибутку $\Pi_i(q) = q_i D^{-1}\Big(\sum\limits_{i\in I} q_i\Big) - c_1 q_i^0 - c_2 q_i$ на множині $S_i$, $i = 2,\ldots,n$, можливих стратегій. Отже, метою виробників $2,\ldots,n$ є максимізація функції $E\Pi_i(q) = E\Big(q_i D^{-1}\Big(\sum\limits_{i\in I} q_i\Big)\Big) - E(c_1 q_i^0 + c_2 q_i)$ за $q_i^0 \in S_i$. Умови, в яких функціонують фірми $2,\ldots,n$, називатимемо умовами "слабкої" невизначеності.

У запропонованій моделі випуски всіх виробників є випадковими, проте вплив невизначеності на прийняття рішень фірмами $2,\ldots,n$ водночас добре описується випадковою величиною зі сталим середнім, а отже, поведінку фірм $2,\ldots,n$ можна вважати менш невизначеною. Надалі досліджуватимемо двосторонню невизначеність, при якій фірма 1 знаходиться в умовах сильної невизначеності, а фірми $2,\ldots,n$ — в умовах слабкої невизначеності.

*Припущення 1.* Фірми $1,\ldots,n$ взаємодіють в умовах двосторонньої невизначеності.

*Припущення 2.* $\exists\, \widetilde{q}_j^0 > 0\ \forall\, q_j^0 > \widetilde{q}_j^0\ E\Big[D^{-1}\Big(q_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \widetilde{q}_j^0 \eta_j\Big)\Big] = 0$, $\forall\, q_1 \in [\gamma_0, \gamma]$, $\forall\, j = 2,\ldots,n$.

Описану економічну ситуацію, що відображає конкурентну взаємодію виробників при двосторонній невизначеності, розглядатимемо як гру

$$G = (I, \{S_i\}_{i\in I}, \{E\Pi_i(q)\}, i \in I), \tag{1}$$

де $I = \{1,\ldots,n\}$ — множина гравців (виробників товару); $S_1 \subseteq [\gamma_0, \gamma]$ — множина допустимих стратегій першого гравця (сподіваних випусків фірми 1); $S_j = [0, \widetilde{q}_j^0]$ — множина допустимих стратегій гравця $j$, $j = 2,\ldots,n$ (цільових обсягів випуску); $E\Pi_i(q)$ — значення сподіваного виграшу (сподіваного прибутку) гравця $i \in I$.

Фірма 1 максимізує сподіване значення свого прибутку при фіксованих рівнях випусків решти виробників, тобто розв'язує задачу

$$\max_{Eq_1 \in S_1} E\Pi_1(Eq_1, (q_{-1}^0)^*), \tag{2}$$

де $q_{-1}^0$ — стратегії фірм $2,\ldots,n$.

В той самий час виробник $i$ розв'язує задачу

$$\max_{q_i^0 \in S_i} E\Pi_i((Eq_1)^*, q_i^0, (q_{-i}^0)^*), \qquad i = 2, \ldots, n, \tag{3}$$

де через $q_{-i}^0$ позначатимемо рішення решти фірм, відмінних від першої та $i$-ї. Якщо $(q_i^0)^*$ є розв'язком даної задачі, то сподіваний обсяг випуску фірм $2, \ldots, n$ дорівнює $(Eq_i)^* = (q_i^0)^* \mu_i$.

**Означення.** Рівновагою за Нешом в умовах двосторонньої невизначеності для гри (1) будемо називати набір $((Eq_1)^{NE}, (q_{-1}^0)^{NE})$ сподіваного випуску фірми 1 та цільових випусків фірм $2, \ldots, n$ такий, що

$$E\Pi_1((Eq_1)^{NE}, (q_{-1}^0)^{NE}) \geqslant E\Pi_1(Eq_1, (q_{-1}^0)^{NE}), \qquad \forall\, Eq_1 \in S_1; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &E\Pi_i((Eq_1)^{NE}, (q_i^0)^{NE}, (q_{-i}^0)^{NE}) \geqslant E\Pi_i((Eq_1)^{NE}, q_i^0, (q_{-i}^0)^{NE}),\\ &\forall\, q_i^0 \in S_i, \qquad i = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

*Припущення 3.* Профіль стратегій $((Eq_1)^{NE}, (q_{-1}^0)^{NE})$ є внутрішньою точкою множини $S = \prod_{i \in I} S_i$.

Методи розв'язування задачі істотно залежать від виду функції оберненого попиту.

*Припущення 4.* Нехай функція оберненого попиту на продукт задається $p(q) = D^{-1}\left(\sum_{i \in I} q_i\right) = a - b\sum_{i \in I} q_i$, де $p$ — додатна ціна продукту; $\sum_{i \in I} q_i$ — його обсяг, випущений (і проданий фірмами); $a > 0$ — потенціал ринку; $b > 0$ — показник еластичності попиту на ринку.

Таким чином, очікувані прибутки фірми 1 та фірм $2, \ldots, n$ відповідно становлять

$$E\Pi_1 = E\left(\left(a - b\left(q_1 + \sum_{s=2}^{n} \eta_s q_s^0\right)\right) q_1 - c q_1\right),$$

$$E\Pi_i = E\left(\left(a - b\left(q_1 + \sum_{s=2}^{n} \eta_s q_s^0\right)\right) \eta_i q_i^0 - (c_1 + c_2\eta_i) q_i^0\right), \qquad i = 2, \ldots, n.$$

*Припущення 5.* Випадкові величини $q_i$, $i = 1, \ldots, n$, — попарно незалежні.

Згідно з припущенням 5, відповідні сподівані прибутки набудуть вигляду

$$E\Pi_1 = (a - c)Eq_1 - bEq_1^2 - bEq_1 \sum_{s=2}^{n} q_s^0 E(\eta_s), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} E\Pi_i = (a - c_2) q_i^0 E(\eta_i) - c_1 q_i^0 - bE(\eta_i q_i^0)^2 - bEq_1 E(\eta_i q_i^0) - bE(\eta_i q_i^0) \sum_{\substack{s=2\\ s \neq i}}^{n} q_s^0 E(\eta_s),\\ i = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7}$$

**Теорема.** *Нехай розподіл випадкового випуску $q_1$ фірми 1 на відрізку $[\gamma_0, \gamma]$ з нефіксованою верхньою межею такий, що $Eq_1^2 \colon [\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}] \to S_1'$ належить класу квадратичних, двічі неперервно-диференційовних за змінною $Eq_1$ функцій. Тоді в межах припущень 1–5 для гри (2) існує єдина рівновага за Нешом в умовах двосторонньої невизначеності.*

Дійсно, нехай $Eq_1^2 = k_1(Eq_1)^2 + k_2 Eq_1 + k_3$, де $k_1 > 0$, $k_2$, $k_3$ — довільні константи. Тоді функція сподіваного прибутку фірми 1, визначена в (6), є увігнутою за всіма значеннями функції $Eq_1(\gamma)$, а отже, умовами оптимальності для задачі (2) є

$$\left.\frac{\partial(E\Pi_1(Eq_1, (q_{-1}^0)^*))}{\partial(Eq_1)}\right|_{Eq_1=(Eq_1)^*} = 0.$$

Водночас фірма $i$ розв'язує задачу максимізації ввігнутої функції свого сподіваного прибутку. Умови оптимальності для задачі (3) мають вигляд

$$\left.\frac{\partial(E\Pi_i((Eq_1)^*, q_i^0, (q_{-i}^0)^*))}{\partial(q_i^0)}\right|_{q_i^0=(q_i^0)^*} = 0.$$

Враховуючи (6), (7), отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a - c - b\left.\dfrac{\partial(Eq_1^2)}{\partial(Eq_1)}\right|_{Eq_1=(Eq_1)^*} - b\displaystyle\sum_{s=2}^{n}(q_s^0)^* E(\eta_s) = 0; \\ (a - c_2)E\eta_i - c_1 - 2b(q_i^0)^* E\eta_i - bEq_1 E\eta_i - bE\eta_i \displaystyle\sum_{\substack{s=2\\ s\neq i}}^{n}(q_s^0)^* E(\eta_s) = 0, \quad i = 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{8}$$

Внаслідок того, що $Eq_1^2$ належить класу квадратичних функцій, система (8) матиме вигляд

$$\begin{cases} a - c - 2bk_1(Eq_1)^* + k_2 - b\displaystyle\sum_{s=2}^{n}(q_s^0)^* \mu_s = 0; \\ (a - c_2)\mu_i - c_1 - 2b\mu_i(q_i^0)^* - b\mu_i(Eq_1)^* - b\mu_i \displaystyle\sum_{\substack{s=2\\ s\neq i}}^{n}(q_s^0)^* \mu_s = 0, \qquad i = 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{9}$$

Система лінійних рівнянь (9) має єдиний розв'язок $((Eq_1)^*, (q_{-1}^0)^*)$, що для конкурентної гри (1) є рівновагою за Нешом в умовах двосторонньої невизначеності.


1. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений. – Москва: Логос, 2000. – 296 с.
2. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. – Москва: Мир, 1985. – 200 с.
3. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн Э.* Теория игр и экономическое поведение. – Москва: Наука, 1970. – 708 с.



*Львівський національний університет ім. Івана Франка*



*Надійшло до редакції 22.01.2013*



**Я. И. Елейко, Е. В. Косаревич**


## Одна неклассическая модель количественной конкуренции на рынке в условиях двусторонней неопределенности


*Предложена модель конкурентного поведения производителей со случайными выпусками при условии разнородного характера влияния неопределенности. Введено понятие двусторонней неопределенности. Выделен класс распределений случайного выпуска одного производителя, который гарантирует существование и единственность ситуации равновесия при двусторонней неопределенности в построенной модели.*

**Ya. I. Yelejko, K. V. Kosarevych**

## One nonclassical model of quantitative competition on a market under two-sided uncertainty

*A model of the competitive behavior of producers with random production quantities under conditions of the heterogeneous nature of the effect of uncertainty is proposed. The concept of two-sided uncertainty is introduced. The class of distributions of a random quantity of manufacturer's production, which guarantees the existence and uniqueness of equilibria under the two-sided uncertainty in the model, is separated.*