

**КАРКАСНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ:  
СТАЦИОНАРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ  
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

**Ключевые слова:** *реляционный каркас, схема реляционной базы данных, предметная область — динамические задачи теории упругости, изотропные среды с произвольными неоднородностями, CASE-средство.*

**ВВЕДЕНИЕ**

Современные вычислительные комплексы в сочетании с программными системами, базирующимися на обусловленных алгоритмах, позволяют высокоэффективно моделировать напряженно-деформированное состояние сред с усложненными свойствами. Однако вопрос автоматизированного синтеза приложений, гибко перенастраиваемых в зависимости от изменения конфигурации механических систем, практически не изучен. Большинство исследований в этой области посвящено развитию метода конечных элементов [1]. Однако существуют иные подходы, позволяющие существенно экономить вычислительные ресурсы и тем самым повышать точность вычислений. Поэтому при рассмотрении вопроса проектирования инструментальных программных средств (CASE-средств) [2], позволяющих синтезировать и сопровождать приложения (моделирующие динамическое поведение сложных механических систем) необходимо проанализировать именно эти методики решения задач механики сплошных сред.

Для анализа ресурсов конструкций, имеющих значительное число неоднородностей и работающих под воздействием динамических нагрузок, необходимо исследовать взаимодействие волн перемещений и напряжений в упругой среде с отверстиями, включениями, трещинами и линейными вставками. Поэтому изучение дифракции упругих волн на системах произвольных неоднородностей является важным и актуальным вопросом. Однако ввиду привлечения больших объемов вычислений и значительных ресурсов цифровой памяти такие задачи мало исследованы. В связи с этим особое значение приобретают эффективные параллельные алгоритмы, в основе которых лежат обоснованные аналитические методы [3]. Для решения плоских и антиплоских задач теории дифракции [4, 5] большой эффективностью обладает метод интегральных уравнений [6–8]. Дополнительные преимущества этого подхода заключаются в сокращении числа пространственных переменных, достаточно высокой скорости сходимости и возможности применения различных эффективных численных методов решения [6]. Кроме того, метод обладает большими возможностями при построении параллельных вычислительных схем [9].

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

При проектировании программного CASE-средства синтеза и сопровождения приложений, как правило, предметная область (ПрО) представляется в виде схемы базы данных (БД) [2, 10], и все дальнейшие действия сводятся к проектированию инструментального приложения БД.

Цель настоящей статьи — анализ специализированной ПрО — метода сингулярных интегральных уравнений (СИУ), а также алгоритма параллельного

численного решения СИУ на примере моделирования задач динамической теории упругости. Результатом анализа является построение схемы БД и, как следствие, проект CASE-средства параллельного решения систем СИУ, разработанный на ПрО моделирования поведения систем неоднородностей в изотропной неограниченной среде, находящейся под воздействием гармонических волн плоской и антиплоской деформации.

Схему БД исследуемой ПрО будем разрабатывать с использованием каркасного анализа, когда реляционный каркас [10] используется как шаблон схемы. Каркасный анализ ПрО позволил сформировать списки основных сущностей-объектов, а также всех связей между ними. Это дает возможность придать структуре разрабатываемой программной системы соответствие требованиям модифицируемости и безаномальности [10], что, в свою очередь, позволяет говорить о кроссплатформности и интероперабельности проектируемого средства.

Дополнительным конкурентным преимуществом такого подхода является возможность применения современных OLAP-решений к получаемым итоговым множествам (массивам решений), хранимым в реляционной БД, и соответственно численному [11] решению обратных задач механики — задачи идентификации и задачи управления поведением систем.

Такой анализ позволяет учесть в схеме БД все необходимые совокупности сущностей-объектов — метаданных, геометрических характеристик исследуемых решеток, искомым величин, объектов интерфейса приложений и т.д. При этом основные математические структуры ПрО, положенные в основу проектируемого инструментального средства, представляются в виде списков, а основные функции — как процедуры отслеживания целостности данных. Рассмотрим более подробно некоторые базовые задачи, а также основные отличительные особенности метода СИУ для каждой из них.

#### АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Под продольным сдвигом (или антиплоской деформацией) понимают напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, нагруженного по боковой поверхности усилиями, которые направлены и равномерно распределены вдоль образующей. Предполагается, что ось деформации направлена вдоль оси  $OZ$  декартовой прямоугольной системы координат  $OXYZ$ . Отличными от нуля являются две компоненты тензора напряжений:  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  и перемещение  $W(x, y, t)$ , причем

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + f = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad \sigma_{13} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial W}{\partial y},$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mu$  — модуль сдвига среды,  $t$  — время,  $f$  — объемная сила.

Из этого следует, что перемещение  $W(x, y, t)$  удовлетворяет неоднородному волновому уравнению Гельмгольца [6]:

$$\nabla^2 W - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu} f, \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

**Система цилиндрических неоднородностей в бесконечной среде.** Рассмотрим неограниченное изотропное пространство, содержащее систему, состоящую из  $m$  бесконечных вдоль оси  $OZ$  неоднородностей, поперечное сечение которых представляет собой замкнутые (без общих точек) или разомкнутые контуры произвольной формы. Пусть  $L$  — совокупность этих контуров и положительное направление выбрано так, что при движении вдоль  $L$  область  $D_1$  остается слева (рис. 1).

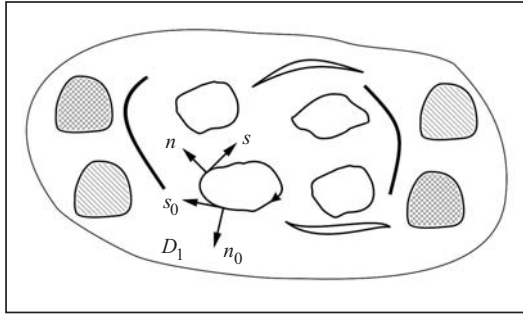


Рис. 1

- криволинейных контуров трещин-разрезов ( $L^{(5)}$ ).

Источником внешнего воздействия поля перемещений может быть набегающая на цилиндры из бесконечности монохроматическая SH-волна или гармонический сосредоточенный источник заданной интенсивности [7]. В результате взаимодействия приходящей волны с данной системой неоднородностей возникает сложное дифрагированное волновое поле. Считаем, что отраженная и проникающая (случай присутствия упругих включений) волны имеют ту же частоту колебаний, что и возбуждающий источник. Это позволяет сделать переход к амплитудам перемещений. Пусть  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $W_2$  — амплитуды перемещений возбуждающего, отраженного и проникающего полей соответственно. Тогда общее поле амплитуд  $W$  составляет  $W^+ = W_0 + W_1$  в матрице (область  $D_1$ ) и  $W^- = W_2$  внутри упругих включений (область  $D_2$ ). В случае гармонической зависимости от времени ( $e^{-i\omega t}$ ) амплитуды  $W_1$  и  $W_2$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца [6].

Сформулируем краевые условия на совокупности  $L$  для разрешающих уравнений Гельмгольца:

- 1) на  $L^{(1)}$ :  $\tau_{n_0}^+ = \tau_{n_0}^-$ ,  $W^+ = W^-$  — условие типа склейки соответствующих касательных напряжений и перемещений со стороны матрицы и включений;
- 2) на  $L^{(2)}$ :  $\tau_{n_0}^+ = \mu_1 \frac{\partial W^+}{\partial n_0} = 0$ ;
- 3) на  $L^{(3)}$ :  $W^+ = \text{const}$ ;
- 4) на  $L^{(4)}$ :  $W^\pm = \text{const}$ ;
- 5) на  $L^{(5)}$ :  $\tau_{n_0}^\pm = 0$  — берега трещин-разрезов свободны от сил.

Таким образом, задача дифракции SH-волн на системе неоднородностей рассмотренного типа в неограниченной изотропной среде сводится к решению уравнений Гельмгольца при выполнении краевых условий на  $L$  и дополнительных условий излучения типа Зоммерфельда на бесконечности [6].

В настоящей статье решение краевых задач 1–4 основано на представлении амплитуды  $W_1$  рассеянного поля (и амплитуды  $W_2$  проникающего поля при наличии  $L^{(1)}$ ) в виде потенциала типа простого слоя [9]

$$W_m(x, y) = \int_L f_m(s) G_m(x, y, \xi, \eta) ds, \quad G_m = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_m r), \quad m = 1, 2, \quad (1)$$

$$r = |z - \zeta|, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L,$$

а решение краевой задачи 5 — в виде потенциала типа двойного слоя

$$W_1(x, y) = - \int_{L^{(5)}} g(s) \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (2)$$

Совокупность  $L$  включает совокупности

- контуров однородных упругих включений ( $L^{(1)}$ );
- контуров отверстий ( $L^{(2)}$ );
- замкнутых контуров однородных жестких включений ( $L^{(3)}$ );
- разомкнутых контуров криволинейных жестких вставок ( $L^{(4)}$ );

Данные интегральные представления автоматически удовлетворяют необходимым уравнениям Гельмгольца и условиям излучения на бесконечности. Остается выполнить граничные условия на контурах неоднородностей.

Сделаем следующее замечание. Удовлетворение граничных условий по перемещениям приводит к интегральным уравнениям первого рода с логарифмическими ядрами, численная реализация которых недостаточно эффективна с точки зрения точности параллельных вычислений. С целью получения СИУ первого рода, для которых разработана высокоточная схема параллельных вычислений [9], граничное равенство по перемещениям дифференцировалось по дуговой координате  $s_0$ . Единственные решения СИУ первого рода, которые возникают в результате выполнения модифицированных граничных условий, получаем, если к этим уравнениям присовокупить некоторые дополнительные интегральные равенства (дополнительные условия), вытекающие из постановки соответствующей краевой задачи.

В случае, если совокупность  $L^{(1)}$  содержит  $I$  контуров упругих включений, каждый из которых имеет длину  $l_i$ , необходимые дополнительные условия вытекают из равенства средних перемещений на  $L_i^{(1)}$ ,  $i=1, \dots, I$ :

$$\frac{1}{l_i} \int_{L_i^{(1)}} W^+ ds_0^i = \frac{1}{l_i} \int_{L_i^{(1)}} W^- ds_0^i, \quad i=1, \dots, I. \quad (3)$$

Если совокупность  $L^{(3)}$  содержит  $K$  замкнутых контуров подвижных жестких включений, дополнительные интегральные равенства (дополнительные условия) следуют, исходя из законов движения включений как абсолютно жестких тел. Тогда уравнения движения включений можно записать в виде

$$\int_{L_k^{(3)}} \tau_{n_0}^+ ds_0^k = -\omega^2 \rho_0 S_0 \int_{L_k^{(3)}} W^+ ds_0^k, \quad k=1, \dots, K, \quad (4)$$

где  $\omega$  — частота колебаний,  $\rho_0$  и  $S_0$  — соответственно плотность и площадь однородных жестких включений.

Если  $L^{(4)}$  — совокупность  $M$  контуров криволинейных жестких вставок, дополнительные условия вытекают из равенства нулю главного вектора сил, действующих на контуре  $L_m^{(4)}$   $m$ -й вставки ( $m=1, \dots, M$ ):

$$\int_{L_m^{(4)}} f_1(s^m) ds^m = 0, \quad f_1(s^m) = \left[ \frac{\partial W}{\partial n} \right] \text{ на } L_m^{(4)}. \quad (5)$$

Удовлетворение соответствующих граничных условий на  $L$  сводит рассматриваемые краевые задачи к системе интегральных уравнений. Изложим это более подробно.

1. На  $L^{(1)}$  выполнение граничных условий по напряжениям приводит к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, а выполнение модифицированных граничных условий по перемещениям — к СИУ первого рода. Для замыкания алгоритма необходимо присовокупить дополнительные условия (3).

2. На  $L^{(2)}$  краевая задача сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

3. На  $L^{(3)}$  модифицированные граничные условия  $\frac{dW^+}{ds_0} = 0$  приводят к системе СИУ первого рода.

Необходимые дополнительные условия для разрешимости этих уравнений вытекают из (4).

4. На  $L^{(4)}$  также выполняются модифицированные граничные условия  $\frac{dW^+}{ds_0} = 0$ , в результате имеем СИУ первого рода на системе разомкнутых контуров. Дополнительные интегральные равенства, обеспечивающие единственность решения, имеют вид (5). Здесь плотности интегральных уравнений равны скачкам производной по нормали от амплитуды перемещения  $(f_1(s^m) = \left[ \frac{\partial W}{\partial n} \right])$  на  $L_m^{(4)}$ , и они имеют корневую особенность на концах  $m$ -й криволинейной вставки ( $m = 1, \dots, M$ ).

5. На  $L^{(5)}$  интегральное представление (2) автоматически обеспечивает непрерывность производной по нормали от перемещения. Скачок перемещения на  $L^{(5)}$  имеет вид  $(g(s^n) = [W])$  на  $L_n^{(5)}$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Краевая задача сводится к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям первого рода. Необходимые дополнительные условия вытекают из условия равенства нулю скачков перемещений на концах  $L_n^{(5)}$ ,  $n = 1, \dots, N$ :

$$\int_{L_n^{(5)}} \frac{dg}{ds^n} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь решение  $\frac{dg}{ds^n}$  имеет корневую особенность на концах  $n$ -го разреза.

В качестве примера запишем СИУ для случая  $L = L^{(1)} + L^{(2)}$ , где  $L^{(1)}$  — совокупность  $I$  контуров упругих включений,  $L^{(2)}$  — совокупность  $J$  контуров полостей. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu_1 f_1(s_{10}^i) + \frac{1}{2} \mu_2 f_2(s_{10}^i) + \\ & + \sum_{p=1}^I \int_{L_p^{(1)}} (\mu_1 K^+(s_{10}^i, s_1^p) f_1(s_1^p) - \mu_2 K^-(s_{10}^i, s_1^p) f_2(s_1^p)) ds_1^p + \\ & + \sum_{r=1}^J \int_{L_r^{(2)}} \mu_1 K(s_{10}^i, s_2^r) f(s_2^r) ds_2^r = N_1(s_{10}^i), \\ & \sum_{p=1}^I \int_{L_p^{(1)}} (M^+(s_{10}^i, s_1^p) f_1(s_1^p) - M^-(s_{10}^i, s_1^p) f_2(s_1^p)) ds_1^p + \\ & + \sum_{r=1}^J \int_{L_r^{(2)}} M(s_{10}^i, s_2^r) f(s_2^r) ds_2^r = N_2(s_{10}^i), \quad i = 1, \dots, I, \\ & \frac{1}{2} \mu_1 f(s_{20}^j) + \sum_{p=1}^I \int_{L_p^{(1)}} \mu_1 K^+(s_{20}^j, s_1^p) f_1(s_1^p) ds_1^p + \\ & + \sum_{r=1}^J \int_{L_r^{(2)}} \mu_1 K(s_{20}^j, s_2^r) f(s_2^r) ds_2^r = N_3(s_{20}^j), \quad j = 1, \dots, J. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь ядра  $M^+(s_{10}^i, s_1^p)$ ,  $M^-(s_{10}^i, s_1^p)$  — сингулярны, остальные ядра — непрерывны. СИУ следует рассматривать совместно с дополнительными условиями (3).

В случае полупространства с заземленной или свободной от сил границей  $y=0$  система СИУ может быть построена, если исходить из соответствующих интегральных представлений, рассмотренных в [12–14].

**Периодическая система неоднородностей в неограниченной среде.** Метод интегральных уравнений, развиваемый в данной работе, является универсальным. Поэтому предлагаемая методика исследования распространяется на случай дифракции гармонической волны сдвига  $W_0 = \tau e^{-i\gamma_2 y}$  на 2d-периодической решетке, составленной из неоднородностей указанного типа (рис. 2).

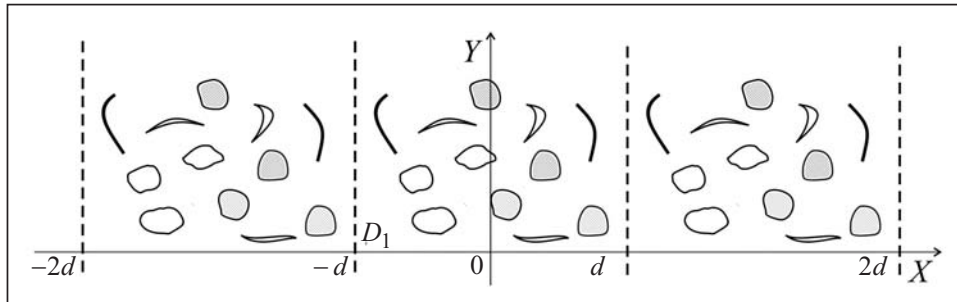


Рис. 2

В этой постановке также можно использовать интегральные представления (1), (2), если в них в качестве функций источника  $G_1$  и  $G_2$  выбрать периодические функции источника для областей  $D_1$  и  $D_2$  (случай присутствия в решетке упругих включений). Имеем [15]

$$G_m(x, y, \xi, \eta) = \frac{\ln 2}{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \ln \left( \sin \frac{\pi(z-\xi)}{2d} \sin \frac{\pi(\bar{z}-\bar{\xi})}{2d} \right) + \frac{1}{2d} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(y-\eta) \cos \alpha_k(x-\xi), \quad (8)$$

$$f_0^{(m)}(p) = -\frac{|p|}{2} + \frac{e^{i\gamma_m|p|}}{2i\gamma_m}, \quad f_k^{(m)}(p) = \frac{e^{i\beta_k^{(m)}|p|}}{i\beta_k^{(m)}} + \frac{e^{-\alpha_k|p|}}{\alpha_k}, \quad k \neq 0, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{d},$$

$$\beta_k^{(m)} = \sqrt{\gamma_m^2 - \alpha_k^2}, \quad \gamma_m > \alpha_k, \quad \beta_k^{(m)} = i\sqrt{\alpha_k^2 - \gamma_m^2}, \quad \alpha_k > \gamma_m, \quad m=1, 2.$$

Ряд в (8) сходится равномерно и абсолютно: в точке приложения источника общий член ряда ведет себя как  $\frac{1}{k^3}$ . При таком выборе  $\beta_k^{(m)}$  для распространяющихся мод знаки групповой и фазовой скоростей в каждой моде совпадают по всей области частот. Одинаковая направленность фазовой скорости и скорости переноса энергии в гармонической волне обеспечивают выполнение условий излучения на бесконечности [6].

Аналогичные представления можно получить и в случае полупространства [13, 14].

**Система цилиндрических неоднородностей в волноводах.** Представляет интерес исследование динамической напряженности нерегулярных волноводов при распространении в них гармонических волн сдвига. Предполагаем, что стенки волновода  $x=0$  и  $x=d$  свободны от сил ( $A=-1$ ) или заземлены ( $A=1$ ), а нерегулярность волновода вызвана наличием внутри него цилиндрических полостей, жестких или упругих включений, криволинейных жестких вставок или трещин-разрезов (рис. 3).

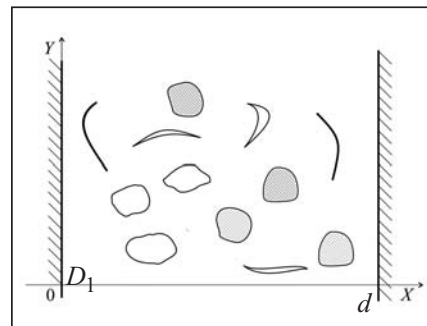


Рис. 3

Возбуждающей нагрузкой может быть излучающаяся из бесконечности гармоническая SH-волна или линейный гармонический источник.

Следуя выбранной методике исследования, в интегральных представлениях (1) и (2) вместо функций источника  $G_1$  и  $G_2$  используется функция Грина для соответствующего волновода ( $A = -1$  или  $A = 1$ ). Имеем [16]

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1-A}{2\pi} \ln 2 + \frac{1}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\pi(z-\xi)}{2d} \right| - \frac{A}{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\pi(z+\bar{\xi})}{2d} \right| + \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(y-\eta) \begin{cases} \cos \alpha_k x \cos \alpha_k \xi \\ \sin \alpha_k x \sin \alpha_k \xi \end{cases}, \quad m=1,2. \quad (9)$$

Здесь в фигурных скобках верхние значения соответствуют случаю волновода со свободными от сил стенками ( $A = -1$ ), нижние — случаю волновода с заземленными стенками ( $A = 1$ ).

При выборе ветви корня в выражении для  $\beta_k^{(m)}$  (см. (8)) излучаемая энергия ограничена при  $y \rightarrow \pm\infty$  и волновое поле внутри волновода носит характер расходящихся волн, что соответствует условиям излучения (зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$ ). Точки  $\alpha_k = \gamma_m$  являются точками возникновения новых волноводных распространяющихся гармоник. В случае заземленного волновода ( $A = 1$ ) гармоники начинают возникать при  $\gamma_m > \alpha_1$  и их число равно  $\left[ \frac{\gamma_m d}{\pi} \right]$ ; если стенки волновода свободны от сил ( $A = -1$ ), то распространяющиеся волны наблюдаются при любой частоте и их число равно  $1 + \left[ \frac{\gamma_m d}{\pi} \right]$  ( $[\cdot]$  означает целую часть числа).

При подстановке функций Грина (9) в интегральное представление (1) автоматически будут удовлетворены разрешающие уравнения Гельмгольца, обеспечено выполнение условий излучения на бесконечности и граничных условий на стенках волновода. Кроме того, в случае  $L^{(4)}$  автоматически обеспечивается непрерывность перемещения и скачка производной по нормали от перемещения на системе криволинейных жестких вставок. Аналогично в случае  $L^{(5)}$  представление (2) автоматически дает скачка перемещения на системе криволинейных трещин-разрезов. Подстановка интегральных представлений в граничные условия на  $L$  соответствующих краевых задач сводит последние к системе интегральных уравнений. (Тип и структура этих интегральных уравнений описаны выше.) Если используются модифицированные граничные условия по перемещениям (дифференцирование по дуговой координате  $s_0$ ), к возникающим СИУ первого рода необходимо присовокупить дополнительные интегральные равенства, обеспечивающие однозначность решений.

#### ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Под плоской деформацией понимают напряженно-деформированное состояние цилиндрического тела, нагруженного по боковой поверхности усилиями, действующими в плоскости поперечного сечения. В предположении, что ось цилиндра направлена вдоль оси OZ декартовой прямоугольной системы координат, перемещение  $V_3$  вдоль этой оси равно нулю, а перемещения  $V_1$  и  $V_2$ , а также и компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) зависят только от координат  $X$  и  $Y$ . Отсюда непосредственно следует, что для изотропного тела  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  и  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ , где  $\nu$  — коэффициент Пуассона среды.

**Система неоднородностей в неограниченной среде.** Пусть в неограниченной изотропной среде имеется система бесконечных вдоль оси OZ цилиндрических неоднородностей (см. рис. 1), причем внешнее поле перемещений действует

перпендикулярно оси  $OZ$ . При таких предположениях имеем условия плоской деформации. В качестве внешнего воздействия будем рассматривать набегающую на цилиндры из бесконечности монохроматическую волну расширения-сжатия ( $\tau = \text{const}$ )

$$V_0^{(1)} = 0, V_0^{(2)} = \tau e^{-i\gamma_1^{(1)} y}, \gamma_1^{(1)} = \frac{\omega}{c_1^{(1)}}, c_1^{(1)} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}} \quad (10)$$

или волну сдвига ( $\tau = \text{const}$ )

$$V_0^{(1)} = \tau e^{-i\gamma_1^{(2)} y}, V_0^{(2)} = 0, \gamma_1^{(2)} = \frac{\omega}{c_1^{(2)}}, c_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}. \quad (11)$$

Здесь  $c_1^{(1)}$  и  $c_1^{(2)}$  — скорости соответственно продольной и поперечной волн в матрице (область  $D_1$ ). Аналогичные скорости внутри однородных волокон (область  $D_2$ ) будем обозначать  $c_2^{(1)}$  и  $c_2^{(2)}$  ( $\lambda_1, \mu_1$  и  $\lambda_2, \mu_2$  — коэффициенты Лямэ, а  $\rho_1, \rho_2$  — плотности матрицы и инородных включений соответственно).

При взаимодействии приходящей волны с цилиндрами возникают отраженные и проходящие внутрь цилиндров (если они являются упругими включениями) волны только двух типов: продольные и поперечные [17]. Пусть  $V_k^{(1)}$  и  $V_k^{(2)}$  — амплитуды перемещений отраженного ( $k=1$ ) и проходящего ( $k=2$ ) полей соответственно. Тогда компоненты общего поля перемещений  $\vec{V} = \vec{V}^+$  при  $k=1$  и  $\vec{V} = \vec{V}^-$  при  $k=2$  определяются как

$$V^{(1)} = V_k^{(1)} + (2-k)V_0^{(1)}, V^{(2)} = V_k^{(2)} + (2-k)V_0^{(2)}. \quad (12)$$

В случае гармонической зависимости от времени ( $e^{-i\omega t}$ ) компоненты векторов амплитуд перемещений  $\vec{V}$  удовлетворяют уравнениям движения [17]

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V^{(1)} = 0, \quad (13)$$

$$\mu \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V^{(2)} = 0$$

при соответствующем задании параметров матрицы и включений.

На бесконечности ( $y \rightarrow +\infty$ ) поле рассеянной волны должно удовлетворять условиям излучения, т.е. компоненты  $V_1^{(1)}$  и  $V_1^{(2)}$  должны представлять расходящиеся волны.

Будем исходить из того, что амплитудные значения компонент тензора напряжений связаны с амплитудами перемещений формулами [17]

$$\tau_{11} + \tau_{22} = 2(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial(V^{(1)} + iV^{(2)})}{\partial z} + \frac{\partial(V^{(1)} - iV^{(2)})}{\partial \bar{z}} \right), \quad (14)$$

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy,$$

$$\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12} = -4\mu \frac{\partial(V^{(1)} - iV^{(2)})}{\partial z}, \tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12} = -4\mu \frac{\partial(V^{(1)} + iV^{(2)})}{\partial \bar{z}}.$$



Обозначим  $S_1$  и  $S_2$  амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений  $\vec{S}$  на  $L$ . Тогда в произвольной точке  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$  эти напряжения выражаются через компоненты тензора напряжений следующим образом:

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12}) e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12}) e^{i\varphi_0}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\varphi_0$  — угол положительной касательной к  $L$  в точке  $\zeta_0 \in L$  с осью  $OX$ .

На границе цилиндров представляют интерес распределения амплитуд напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{n_0} &= S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \\ \tau_{n_0 s_0} &= S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0, \quad \tau_{s_0} = (\tau_{11} + \tau_{22}) - \tau_{n_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные условия на  $L$  имеют следующий вид:

- 1) на  $L^{(1)}$ :  $\vec{S}^+ = \vec{S}^-$ ,  $\vec{V}^+ = \vec{V}^-$  — условия типа склейки компонент вектора напряжений  $\vec{S}$  и вектора перемещений  $\vec{V}$  со стороны матрицы и включений;
- 2) на  $L^{(2)}$ :  $\vec{S}^+ = 0$ ;
- 3) на  $L^{(3)}$ :  $V^{(1)} = B_1 - \omega_0 \eta_0$ ,  $V^{(2)} = B_2 + \omega_0 \xi_0$ ,  $(\xi_0, \eta_0) \in L^{(3)}$ ;
- 4) на  $L^{(4)}$ :  $V^{(1)} = B_1 - \omega_0 \eta_0$ ,  $V^{(2)} = B_2 + \omega_0 \xi_0$ ,  $(\xi_0, \eta_0) \in L^{(4)}$ ;
- 5) на  $L^{(5)}$ :  $\vec{S}^\pm = 0$  — берега трещин-разрезов свободны от сил.

В случаях 3 и 4 предполагается, что однородные жесткие включения перемещаются и поворачиваются вместе с матрицей;  $B_1$  и  $B_2$  — амплитуды поступательного движения,  $\omega_0$  — значение амплитуды жесткого поворота включений.

В случае 3, используя второй закон Ньютона, получим уравнения, которые характеризуют поступательное движение однородных жестких включений:

$$\int_{L_k^{(3)}} S_r ds_0^k = -\omega_0^2 \rho_0 S_0 B_r, \quad r=1, 2, \quad k=1, \dots, K. \quad (17)$$

Уравнение, описывающее вращательное движение включений, имеет вид

$$\int_{L_k^{(3)}} (S_1(\eta_0^k - y) - S_2(\xi_0^k - x)) ds_0^k = -\omega^2 J_A \omega_0, \quad (18)$$

где  $\rho_0$  — плотность,  $\hat{S}_0$  — площадь однородных жестких включений,  $J_A$  — момент инерции включений относительно произвольной точки  $A(x, y)$ .

В случае 4 результирующие силы и крутящий момент, действующие на  $L^{(4)}$ , равны нулю:

$$\int_{L_k^{(4)}} S_r ds_0^m = 0, \quad r=1, 2; \quad \int_{L_m^{(4)}} (S_1(\eta_0^m - y) - S_2(\xi_0^m - x)) ds_0^m = 0, \quad m=1, \dots, M. \quad (19)$$

Как и в случае антиплоской деформации, решение краевых задач 1–4 основано на интегральных представлениях амплитуд перемещений отраженного ( $k=1$ ) и проходящего внутрь упругих включений ( $k=2$ ) полей в виде потенциалов типа простого слоя [17]:

$$V_k^{(m)}(x, y) = \int_L (f_1^{(k)}(s) G_{m1}^{(k)}(x, y, \xi, \eta) + f_2^{(k)}(s) G_{m2}^{(k)}(x, y, \xi, \eta)) ds, \quad m=1, 2. \quad (20)$$

Здесь  $f_1^{(k)}(s)$  и  $f_2^{(k)}(s)$  — независимые функции ( $k=1, 2$ );  $G_{1j}^{(k)}$  и  $G_{2j}^{(k)}$  — функции Грина ( $j=1, 2$ ), представляющие собой амплитуды перемещений  $j$ -го состояния в точке  $(x, y) \in D_k$  при действии гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке  $\zeta = \xi + i\eta \in L$  и направленной вдоль  $OX$  (первое состояние) или вдоль оси  $OY$  (второе состояние). В случае 4 представления (20) автоматически удовлетворяют условию непрерывности перемещений при переходе через  $L^{(4)}$  и обеспечивают скачки напряжений:  $[S_1] = f_1^{(1)}(s)$ ,  $[S_2] = f_2^{(1)}(s)$ .

При решении краевой задачи 5 используем интегральные представления типа двойного слоя [18]:

$$V^{(m)}(x, y) = \int_{L^{(5)}} (g_1(s)S_{m1}(x, y, \xi, \eta) + g_2(s)S_{m2}(x, y, \xi, \eta)) ds. \quad (21)$$

Здесь  $g_1(s)$  и  $g_2(s)$  — неизвестные функции;  $S_{1j}$  и  $S_{2j}$  — функции Грина ( $j=1, 2$ ), представляющие собой амплитуды напряжений в области  $D_1$  при действии сосредоточенной силы, приложенной в точке  $\zeta \in L$  и направленной вдоль оси  $OX$  (первое состояние) или вдоль оси  $OY$  (второе состояние). Представления (21) автоматически удовлетворяют непрерывность напряжений при переходе через  $L^{(5)}$  и обеспечивают скачки перемещений:  $[V^{(1)}] = g_1(s)$ ,  $[V^{(2)}] = g_2(s)$ .

Функции (20) и (21) удовлетворяют уравнениям движения (13) и условиям излучения на бесконечности при соответствующем выборе указанных функций Грина. Таким образом, решение сформулированных задач дифракции сводится к нахождению неизвестных плотностей интегральных представлений по заданным граничным условиям на  $L$ .

Для построения эффективного численного алгоритма при удовлетворении граничных условий по перемещениям на  $L$  вычислялись комбинации  $V^{(1)} \pm iV^{(2)}$ , которые дифференцировались по дуговой координате  $s_0$ . Аналогично граничные условия по напряжениям удовлетворялись для комбинаций  $S_1 \pm iS_2$ . Такой подход позволил получить системы интегральных уравнений. Рассмотрим их.

1. На контурах упругих включений  $L^{(1)}$  при выполнении граничных условий по напряжениям возникают СИУ второго рода, а удовлетворение модифицированных граничных условий по перемещениям приводит к СИУ первого рода. Необходимые дополнительные условия для разрешимости последних вытекают из равенства средних амплитуд перемещений на  $L^{(1)}$ .

2. На контурах полостей  $L^{(2)}$  соответствующая краевая задача сводится к системе СИУ второго рода, которая имеет единственное решение.

3. На замкнутых контурах жестких включений  $L^{(3)}$  модифицированное граничное условие по перемещениям приводит к системе СИУ первого рода, к которым необходимо присовокупить дополнительные интегральные равенства, вытекающие из (17), (18).

4. На разомкнутых криволинейных контурах жестких вставок  $L^{(4)}$  также возникают СИУ первого рода. Здесь плотности интегральных уравнений являются скачками напряжений на  $L^{(4)}$  и имеют корневую особенность на концах разомкнутых контуров. Необходимые дополнительные условия возникают из условия равенства нулю главного вектора сил, действующих на берегах вставки  $L^{(4)}$ . Жесткий поворот однородных криволинейных жестких вставок определяется из условия равенства нулю главного момента сил, возникающих на  $L^{(4)}$  (см. (19)).

5. На системе криволинейных трещин-разрезов  $L^{(5)}$  краевая задача сводится к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям первого рода. Дополнительные условия для их разрешимости вытекают из условия равенства нулю скачков перемещений на концах трещин-разрезов:

$$\int_{L_n^{(5)}} \frac{dg_1}{ds^n} ds^n = 0, \quad \int_{L_n^{(5)}} \frac{dg_2}{ds^n} ds^n = 0, \quad n=1, \dots, N. \quad (22)$$

Здесь производные от скачков перемещений на  $L^{(5)}$  имеют корневую особенность на концах разрезов.

**Периодическая система неоднородностей в неограниченной среде.** Элементы конструкций, используемые в технике и строительстве, функционируют под действием циклических нагрузок и часто содержат большое количество неоднородностей, ориентированных вдоль некоторой оси. Такую конечную решетку можно аппроксимировать бесконечной, а именно периодической решеткой, составленной из упругих и жестких включений, полостей, а также криволинейных жестких вставок или трещин-разрезов. Одним из наиболее распространенных и эффективных методов исследования периодических плоских задач дифракции в среднечастотном диапазоне волн является метод интегральных уравнений.

Рассмотрим неограниченную изотропную среду с плотностью  $\rho_1$  и коэффициентами Ляме  $\lambda_1, \mu_1$ , в которой содержится 2d-периодическая вдоль оси  $OX$  система цилиндрических неоднородностей рассмотренного типа (см. рис. 2). Предположим, что на периодическую решетку из бесконечности набегают гармоническая  $P$ -волна (10) или  $SV$ -волна (11). Необходимо исследовать возникающую плоскую периодическую задачу дифракции методом интегральных уравнений и оценить динамические и механические характеристики периодической решетки.

При решении краевых задач 1–4 в периодической постановке интегральные представления амплитуд перемещений будем искать в виде (20), причем здесь следует положить  $G_{1j}^{(k)}$  и  $G_{2j}^{(k)}$  — компонентами матриц Грина в области  $D_1$  ( $k=1$ ) и в области  $D_2$  ( $k=2$ ), которые представляют собой амплитуды перемещений в точке  $(x, y) \in D_k$  при действии периодической системы гармонических сил, сосредоточенных в точках  $(\xi + 2dp, \eta) \in L_p$  ( $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и направленных вдоль оси  $OX$  ( $j=1$ ) или вдоль оси  $OY$  ( $j=2$ ) [19].

При решении периодической краевой задачи 5 будем использовать интегральные представления (21), если считать, что в них  $S_{1j}$  и  $S_{2j}$  — компоненты матрицы Грина, представляющие собой амплитуды напряжений в матрице (область  $D_1$ ) при действии периодической системы гармонических сил, сосредоточенных в точках  $(\xi + 2dp, \eta) \in L_p$  ( $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и направленных вдоль оси  $OX$  ( $j=1$ ) или вдоль оси  $OY$  ( $j=2$ ) [20].

Подстановка интегральных представлений (20) или (21) в заданные краевые условия на  $L$  приводит к системе СИУ рассмотренных выше типов. К СИУ первого рода необходимо присовокупить дополнительные условия, вытекающие из механической постановки исследуемой краевой задачи.

#### СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Как видно из описания ПрО, каждая локальная задача сведена к системе СИУ, структура каждого из которых строго типизирована. Более того, методика численной реализации позволяет использовать комбинирование типовых вычислительных процедур. Опишем общую схему численной реализации.

Элементы матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), к которым в итоге сводятся системы СИУ, являются результатом дискретизации

контуров. Очевидно, что размер матрицы пропорционален числу неоднородностей. Применим распараллеливание алгоритма, в котором каждый элемент матрицы определяется координатами узлов дискретизации.

Как показано в [9], данный метод сводится к обходу каждого контура по точкам коллокации внеинтегральной переменной  $\zeta_{k0}$  и одновременному обходу каждого контура по аналогичным либо иным узлам переменной интегрирования  $\zeta_k$ .

Параллельно-конвейерная схема вычислений показана на рис. 4. Здесь приведены соотношения пропорции интервалов времени вычислений на синтез массивов исходных данных (время  $t_0$  при количестве процессов  $P_1$ ), синтез матриц СЛАУ (время  $t_1$  при количестве процессов  $P_1$ ), решение СЛАУ методом Гаусса ( $t_2$  — оптимальное время вычислений при оптимальном числе процессов  $P_0$ ),

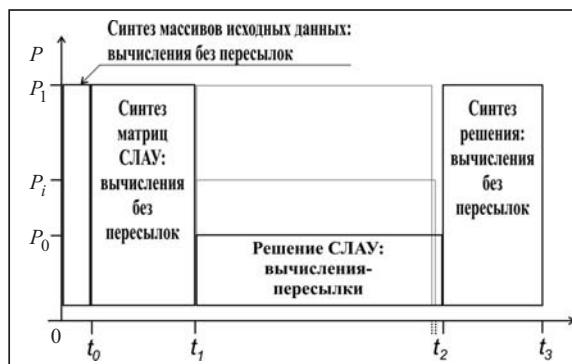


Рис. 4

синтез массивов итоговых решений (время  $t_3$ ). Первый, второй и четвертый этапы макроконвейера не требуют пересылок данных, что означает независимость вычислений. На третьем этапе для решения СЛАУ существует оптимальное число процессов, определяемое спецификой матрицы. Это значит, что для первого, второго и четвертого этапов алгоритма оптимальным является число процессов, соответствующее числу коэффициентов СЛАУ.

В данной методике решения всех перечисленных краевых задач основной операцией является определение текущего расстояния между точками коллокации и интегрирования, заданного на множестве значений параметрических координат неоднородностей. Указанное расстояние является аргументом функции Грина. И поскольку комбинации самих функций Грина и коэффициентов при них являются элементами матрицы СЛАУ, данная процедура может быть базовой при разработке CASE-средства, тем более что, как показано в [9, 13, 14], алгоритм хорошо масштабируется по вычислительным узлам.

Вычислительный процесс решения СЛАУ, в свою очередь, распараллеливается согласно [21]. Параллельное вычисление итоговых искомым характеристик осуществляется подстановкой массивов значений неизвестных функций  $f_k(\beta_p)$  в интегральные представления решений аналогично процедурам формирования матрицы СЛАУ. В зависимости от операционной среды, доступной пользователю, могут применяться два типа формирования матрицы: поэлементное или построчное. Как показано на рис. 4, более оптимальным является поэлементное параллельное формирование матрицы СЛАУ. При этом число узлов равно числу элементов матрицы. Однако для решения СЛАУ эффективнее использовать построчное распараллеливание, когда пересылки и вычисления находятся в балансе. Таким образом, наиболее прогрессивной является операционная среда, в которой пользователь имеет возможность сочетать оба механизма, гибко изменяя число используемых узлов в соответствии с этапом вычислений.

**Схема ПрО и CASE-средства.** Из приведенного выше описания ПрО следует, что структурирование является естественным. Очевидно, что итоговое множество данных, т.е. массив значений искомым функций, является результатом взаимодействия всех базовых компонентов: функций Грина со своими аргументами, правых частей, дополнительных условий или внеинтегральных членов, геометрических характеристик исследуемых задач и т.п. Таким образом,

функционирование приложения такой БД — это работа со списками этих сущностей-объектов.

Приведенный выше список задач механики сплошных сред можно значительно расширить. Так, к типам нагрузки могут быть добавлены изгибные волны, а категория волн расширена нестационарными. Область распространения может быть замкнутой. Свойства среды распространения могут быть не только изотропными, но и ортотропными и даже анизотропными. Модели описания распространения, например, изгибных волн в пластинах могут быть также различными — от модели Кирхгофа-Лява [22] до уточненных моделей типа Тимошенко [23]. Отметим, что на стыке механики и

электрофизики исследуются новые среды [24]. Однако общим вычислительным базисом для этого многообразия задач является метод СИУ.

В [25, 26] описана структура каркасной [10] инструментальной программной среды, которая масштабируется метаданными. Как показал анализ ПрО, для всех задач математической физики, решаемой методом СИУ, структура алгоритма и большинство вычислительных процедур типизируемы. Значит, для проектирования нового CASE-средства может быть применен реляционный каркас. Из рис. 5 следует, что даже при условии неполноты анализа ПрО и незавершенности проекта CASE-средства, основанное на каркасном шаблоне, может быть модифицируемо и развиваемо.

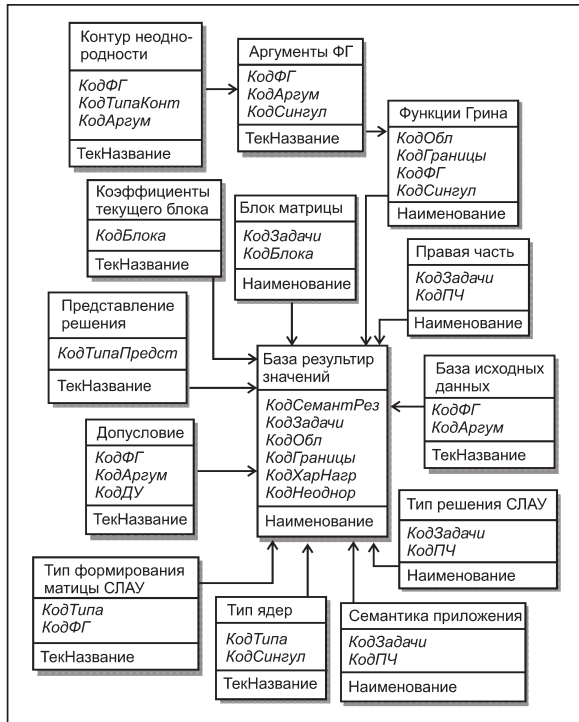


Рис. 5

**Результаты численных исследований.** Проведем параметрическое исследование одной из новых прикладных задач. С целью исследования сходимости построенного алгоритма рассмотрим случай нормального падения волны сдвига [9] на систему, состоящую из эллиптических или ромбических отверстий и упругих включений, поочередно расположенных в упругом полупространстве на одинаковом расстоянии  $d$  один от другого и ориентированных вдоль свободной от сил границы полупространства  $y=0$  (рис. 6).

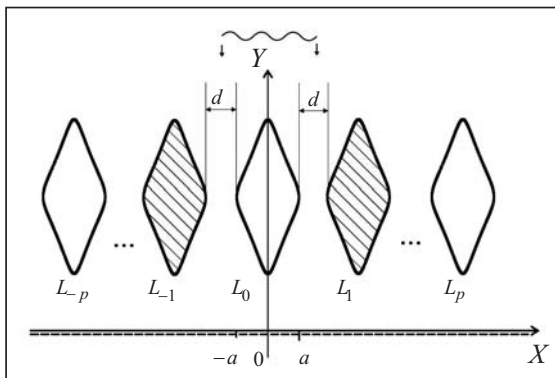


Рис. 6

Используем известные [27] параметрические уравнения для задания основного контура  $L_0$ :

$$\xi(\beta) = b \sin \beta - v \sin 3\beta,$$

$$\eta(\beta) = a \cos \beta + v \cos 3\beta,$$

$$0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (23)$$

При  $\nu = 0,14036$  контур имеет вид ромба со скругленными точками возврата, а при  $\nu = 0$  контур имеет эллиптическую форму. Остальные контуры для простоты будем располагать симметрично относительно оси  $Y$ . В этом случае рассматриваемая дифракционная задача обладает свойством симметрии, что позволяет осуществлять первичное самотестирование получаемых результатов.

В ходе численной реализации определялись безразмерные напряжения  $\sigma_\beta = \tau_s / \mu_1$  на контурах отверстий, а также безразмерные контурные напряжения  $\sigma_\beta = \tau_s / \mu_1$  и  $\sigma_n = \tau_n / \mu_1$  на контурах упругих включений. Точность вычислений проверялась сравнением результатов при различных значениях  $N$ . Проводилось также сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [14], как для случая системы ромбических отверстий в полупространстве со свободной от сил границей, так и для одиночного отверстия или упругого включения [12].

Численное исследование показало, что в полубесконечном случае с границей, свободной от сил, при воздействии на описанную систему SH-волной из бесконечности эффект насыщения [28], как и в [14], наблюдается не строго. И хотя при линейном и симметричном относительно нагрузки расположении неоднородностей вдоль границы для усредненного исследования достаточно не более девяти неоднородностей, при дальнейшем наращивании числа неоднородностей наблюдаются незначительные пульсации в распределении напряжений. Обусловленность матриц при этом проверялась на основании алгоритма, описанного в [29].

В настоящей работе проводились вычисления контурных напряжений  $\sigma_n$  и  $\sigma_\beta$  вдоль контуров центрального  $L_0$  и крайнего  $L_k$  включения (полого или упругого, рис. 6) в случае решетки, состоящей из нечетного числа неоднородностей ( $p = k$ ). Отсчет угла  $\beta$  ведется от нуля (теневая точка) до  $\pi$  (лобовая точка) для центрального отверстия (учитывается симметрия в случае нормального падения волны сдвига) и от нуля до  $2\pi$  для крайних упругих включений (в силу симметрии распределения напряжений на контурах  $L_k$  и  $L_{-k}$  зеркальны). Рассматривается случай, когда неоднородности имеют форму ромбов, вытянутых навстречу набегающей волне. Для всех графиков  $\mu_1 / \mu_2 = 5,0$ ;  $\rho_1 / \rho_2 = 2,0$ ;  $b / a = 2,5$ , а расстояние от границы до центрального волокна  $h = 4$  (на рис. 6 не показано).

На рис. 7 даны графики распределения безразмерных контурных напряжений  $\sigma_\beta$  и  $\sigma_n$  для крайнего ромбического упругого включения в случае трех неоднородностей и набегающей из бесконечности волны сдвига в полупространства с границей, свободной от сил. Для кривых 1, 2 и 3 волновое число  $\gamma_2 a$  равно 0,3, 0,9, и 1,5 соответственно.

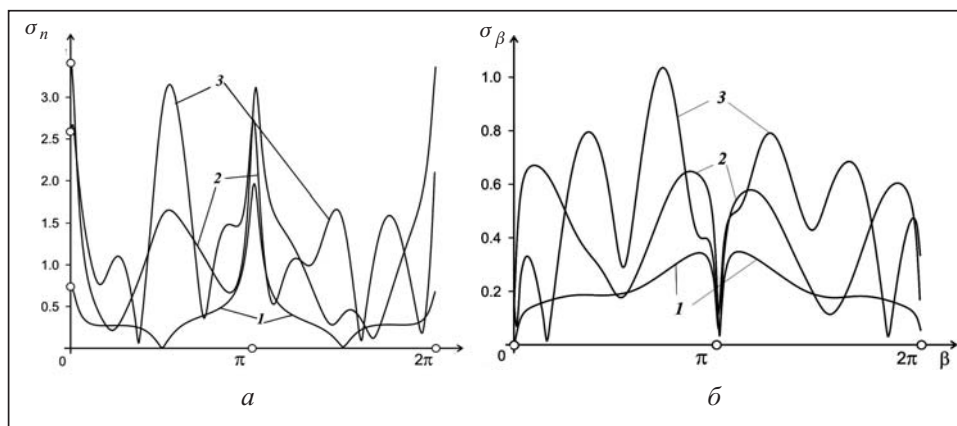


Рис. 7

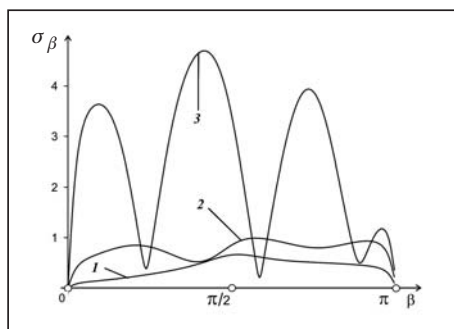


Рис. 8

На рис. 8 показаны графики распределения контурных напряжений  $\sigma_\beta$  на границе центрального ромбического отверстия для случая трех неоднородностей и набегания из бесконечности волны сдвига в полупространстве с границей, свободной от сил. Как и на рис. 7, кривые 1, 2, 3 соответствуют  $\gamma_2 a = \{0,3; 0,9; 1,5\}$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как указывалось в [3, 9, 13, 14], в задачах математической физики параллельные алгоритмы позволяют значительно

сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики исследуемых полей. Это важно, так как получение точных величин, например максимумов напряжений вплоть до восьмого знака, а также точных координат их дислокации позволяет избежать разрушений конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок.

Сочетание метода интегральных уравнений, позволяющего значительно ускорить решение задачи, и процедур распараллеливания, также приводящих к значительной экономии времени вычислений, существенно увеличивает эффективность рассмотренного алгоритма.

Исходя из этого, можно полагать, что построенные предложенным методом инструментальные программные средства синтеза приложений, численно решающие разнообразные интегральные уравнения, позволяют своевременно и точно прогнозировать поведение различных систем с усложненными свойствами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. — М.: Изд. АСВ (Ассоциации строительных вузов), 2000. — 152 с.
2. Колянов Г.Н. CASE. Структурный системный анализ (автоматизация и применение). — М.: Лори, 1996. — 360 с.
3. Вертгейм И.И., Терпугов В.Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ: Учебное пособие. — Пермь: ПГУ, 2007. — 84 с.
4. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. — К.: Наук. думка, 1978. — 307 с.
5. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. — К.: Наук. думка, 1985. — 136 с.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. — К.: Наук. думка, 1984. — 344 с.
7. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Дифракция волн сдвига на цилиндрических неоднородностях произвольного поперечного сечения // Динамика и прочность машин. — 1991. — Вып. 52. — С. 38–45.
8. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1991. — № 4. — С. 119–127.
9. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной упругой среде // Проблемы программирования. — 2010. — № 2–3. — С. 604–610.
10. Панченко Б.Е. Каркасное проектирование доменно-ключевой схемы реляционной базы данных // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 3. — С. 174–187.
11. Белов В.С. Информационно-аналитические системы. Основы проектирования и применения. — М.: МЭСИ, 2005. — 111 с.

12. Назаренко А.М. Дифракция волн сдвига на цилиндрических включениях и полостях в упругом полупространстве // Проблемы прочности. — 1990. — № 11. — С. 90–94.
13. Панченко Б.Е. Высокочточное кластерное решение задачи дифракции волн сдвига на системе отверстий в полубесконечной изотропной среде с защемленной границей // Проблемы программирования. — 2012. — № 1. — С. 121–131.
14. Панченко Б.Е. Поведение системы некруговых отверстий в полупространстве со свободной границей от воздействия стационарных SH-волн // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 4. — С. 84–93.
15. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Взаимодействие волн сдвига с периодической системой цилиндрических неоднородностей произвольного поперечного сечения // Проблемы машиностроения. — 1992. — Вып. 38. — С. 48–52.
16. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Динамическая напряженность полосы с неоднородностями произвольной формы (антиплоская деформация) // Динамика и прочность машин. — 1991. — Вып. 52. — С. 68–74.
17. Назаренко А.М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации // Динамические системы. — 2005. — № 19. — С. 54–60.
18. Назаренко А.М., Фильштинский Л.А. Взаимодействие упругих волн с криволинейной трещиной в полуплоскости // Теоретическая и прикладная механика. — 1988. — Вып. 19. — С. 77–82.
19. Ложкін О.М., Назаренко О.М. Дифракція пружних хвиль на періодичних системах циліндричних порожнин та жорстких включень // Акустичний вісник. — 2006. — 9, № 4. — С. 35–42.
20. Назаренко О.М., Ложкін О.М. Дифракція пружних гармонічних хвиль на періодичній системі криволінійних тріщин в умовах плоскої деформації // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2006. — Вып. 4. — С. 162–169.
21. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В. Численное программное обеспечение интеллектуального МІМД-компьютера «Инпарком». — К.: Наук. думка, 2007. — 220 с.
22. Назаренко А.М., Острик В.И. Вынужденные колебания прямоугольной пластинки с тонким криволинейным включением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1990. — № 4. — С. 93–98.
23. Назаренко А.М. Об одном подходе к исследованию волновых полей в пластинах с трещинами и включениями в рамках уточненных теорий // Динамика и прочность машин. — 1989. — Вып. 50. — С. 49–55.
24. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 336 с.
25. Перевозчикова О.Л., Тульчинский В.Г., Коломиец А.В. и др. Высокопродуктивные методы анализа и спецификации пространств атрибутов предметной области для организации вычислений // Отчет о НИР № 0107U000800 ВФ.145.09.11. — К., 2011. — 378 с.
26. Панченко Б.Е. Исследования доменно-ключевой схемы реляционной базы данных // Кибернетика и системный анализ — 2012. — № 6. — С. 157–172.
27. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. — К.: Наук. думка, 1989. — 352 с.
28. Кюркчан А.Г., Скородумова Е.А. Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов // Акустический журнал. — 2007. — 53, № 1. — С. 5–14.
29. Химич А.М., Полянко В.В. Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов // Проблемы программирования. — 2008. — № 3. — С. 145–149.

*Поступила 03.07.2012*